

Maryam Mirzakhani était reconnue pour ses travaux profonds en géométrie symplectique, en géométrie hyperbolique et sur les espaces de modules des surfaces de Riemann. Elle a commencé à publier des articles mathématiques sur une grande variété de sujets dès son plus jeune âge et a été la première femme et la première Iranienne à remporter la prestigieuse médaille Fields pour ses réalisations en mathématiques. Elle a également étudié les espaces de Teichmüller en lien avec le groupe de classes d'application. Voyons la définition de tels espaces. Une surface de Riemann compacte munie d'un nombre fini de points marqués est dite de type fini. Si l'on fixe une surface de référence compacte F de genre g , tout difféomorphisme de F vers une surface de Riemann R peut être ramené à une structure conforme sur la surface de référence (notons $S(F)$ l'ensemble de toutes les structures conformes sur F). Si l'on désigne comme d'habitude par $\text{Diff}^+(F)$ le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation, alors le quotient $\mathcal{M}(F) = S(F)/\text{Diff}^+(F)$ est l'espace des structures conformes sur F avec n points distingués et étiquetés (c'est simplement l'espace de modules des surfaces de Riemann de type F). Si l'on prend plutôt le quotient par le sous-groupe normal des difféomorphismes qui sont homotopes à l'application identité, on obtient l'espace des structures conformes marquées sur F :

$$\mathcal{T}(F) = S(F)/\text{Diff}_0(F).$$

C'est l'espace de Teichmüller des surfaces de type F . Si l'on prend le quotient du premier groupe de difféomorphismes par le second, on obtient le groupe pur des classes d'application que nous avons mentionné précédemment.

Donnons maintenant une autre définition : un réseau de transport (ou *train track*) pour une surface hyperbolique R à pointes est une famille de courbes lisses plongées avec un ensemble fini de sommets appelés aiguillages et d'arêtes appelées branches. Il existe une unique tangente à chaque aiguillage telle que les courbes se rencontrent à l'aiguillage avec la même ligne tangente et que le voisinage d'un aiguillage est une union d'arcs lisses plongés disjoints. Il y a quelques restrictions supplémentaires sur la forme que peut prendre une composante du complément du réseau de transport. Comme pour de nombreux concepts en géométrie moderne, le concept de réseau de transport a été introduit par Thurston, qui avait besoin de quelque chose qui donnerait une structure symplectique par morceaux pour l'espace des laminations géodésiques mesurées $\mathcal{MGL}$. Une lamination est un feuilletage d'un sous-ensemble fermé¹.

Rappelons qu'un feuilletage de dimension k sur une n -variété est une collection de sous-variétés immergées de dimension k , connexes et disjointes de M dont l'union est M et telles que, dans le voisinage d'un point de M , il existe une carte lisse (U, φ) , où $\varphi(U)$ est un produit de sous-ensembles ouverts connexes $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. De plus, chaque feuille du feuilletage intersecte U en une union dénombrable de tranches de dimension k . Une carte de ce type est appelée carte feuilletée. Les sous-variétés immergées sont en fait des classes d'équivalence, connues sous le nom de feuilles du feuilletage, où le feuilletage est une relation d'équivalence. Ces critères sont satisfaits de manière

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Scott Wolpert, *Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry* (American Mathematical Society, 2009).

triviale dans le cas où l'on prend l'ensemble de tous les sous-espaces affines de dimension k de $\mathbb{R}^n$ parallèles à $\mathbb{R}^k$.

Comme autre exemple, si l'on prend l'ensemble des composantes connexes des courbes dans le plan (y, z) données par les équations suivantes :

$$z = \sec y + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$y = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et que l'on fait tourner les courbes autour de l'axe z , on obtient un feuilletage de $\mathbb{R}^3$ avec une belle visualisation géométrique². Une lamination $\mathcal{G}$ est géodésique si ses feuilles sont des géodésiques complètes. Une mesure transverse μ pour une lamination géodésique est une attribution à chaque arc transverse lisse τ de $\mathcal{G}$ d'une mesure non négative dont le support est $\tau \cap \mathcal{G}$. Une lamination géodésique mesurée est l'union d'un nombre fini de géodésiques fermées simples et d'un nombre non dénombrable de géodésiques complètes ouvertes, et le complément d'une lamination géodésique mesurée est une union finie de sous-surfaces convexes à bords géodésiques.

Une lamination géodésique est portée par un réseau de transport τ à condition qu'il existe une application différentiable f de la surface hyperbolique qui soit homotope à l'application identité et telle que $f(\mu)$ soit contenue dans τ et que la différentielle ne s'annule pas sur une feuille. Étant donnée une surface hyperbolique marquée, le groupe de classes d'application agit sur l'espace associé des laminations géodésiques mesurées. Un résultat fondamental est que l'action du groupe des classes d'application sur $\mathcal{MGL}$ est ergodique³. Cette terminologie peut sembler étrange si vous avez étudié la théorie ergodique, mais souvenez-vous que nous avons défini une mesure sur l'espace. Dans ce cas, nous avons effectivement le groupe MCG agissant sur un espace mesuré $(\mathcal{MGL}, \mathcal{A}, \mu)$, où $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre. Une σ -algèbre sur un ensemble X est une famille de sous-ensembles qui contient X et qui est fermée par passage au complémentaire, par formation d'unions dénombrables et par formation d'intersections dénombrables.

Comme exemple trivial, prenons la collection de tous les sous-ensembles d'un ensemble X . C'est une σ -algèbre, mais si nous prenons la collection de tous les sous-ensembles finis d'un ensemble infini X , alors cette collection ne peut pas contenir X . Elle n'est donc pas fermée par passage au complémentaire, et ce n'est pas une σ -algèbre (ni même une algèbre) sur X . Comme toujours, nous nous intéressons également à la construction de nouvelles σ -algèbres à partir d'anciennes, et il existe diverses façons de le faire. L'intersection d'une collection de σ -algèbres sur X est une autre σ -algèbre, par exemple. Si X est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre sur l'ensemble, une fonction μ , dont le domaine est la σ -algèbre, et dont les valeurs appartiennent à la demi-droite achevée $[0, +\infty]$ avec $+\infty$ inclus comme point, est *dénombrablement additive* si, pour toute suite infinie d'ensembles disjoints $\{A_i\}$ dans $\mathcal{A}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2. John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (New York : Springer, 2003).

3. Scott Wolpert, *Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry* (American Mathematical Society, 2009).

Une mesure est une fonction de ce type telle que $\mu(\emptyset) = 0$, et un triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré⁴. On dit qu'un groupe discret G agissant sur un espace mesuré via des transformations conservant la mesure a une action ergodique si $g \cdot a = a, \forall g \in G$ implique que $\mu(a) = 1$ ou $\mu(a) = 0$.

En d'autres termes, on dit qu'un groupe discret G agissant sur un espace mesuré via des transformations conservant la mesure a une action ergodique si $g \cdot a = a, \forall g \in G$ implique que les seuls ensembles mesurables qui sont invariants sous l'action du groupe sont X et $\emptyset$. Comme d'habitude, cette affirmation n'est valable qu'à des ensembles de mesure nulle près. Dans ce cas, l'élément de volume de Thurston est l'unique mesure invariante sous le groupe MCG dans la classe de mesure.

Maryam Mirzakhani a généralisé une identité due à McShane et a montré que certaines sommes de longueurs géodésiques indexées par le MCG conduisent à des fonctions qui sont constantes sur l'espace de Teichmüller. Cette identité peut être utilisée pour obtenir des partitions de l'unité sur l'espace de Teichmüller qui sont invariantes sous l'action du groupe de classes d'application. Le terme sommande pour l'identité de longueur est une fonction rationnelle définie sur le plan comme suit :

$$H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x+y}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{x-y}{2}}},$$

et les fonctions sur $\mathbb{R}^3$ définies par les relations :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{D}(x, y, z) = H(y + z, x), \quad \mathcal{D}(0, 0, 0) = 0,$$

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}(x, y, z) = H(z, x + y) + H(z, x - y), \quad \mathcal{R}(0, 0, 0) = 0.$$

Prenons l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(L_1, \dots, L_n)$ de g structures hyperboliques marquées, où $L_1, \dots, L_n$ sont les longueurs des frontières géodésiques $\beta_1, \dots, \beta_n$ des structures⁵. L'identité de longueur de McShane-Mirzakhani énonce que pour une surface hyperbolique R , on a :

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{D}(L_1, l_{\alpha_1}(R), l_{\alpha_2}(R)) + \sum_{j=2}^n \sum_{\alpha} \mathcal{R}(L_1, L_j, l_{\alpha}(R)) = L_1,$$

où la première sommation porte sur les paires de géodésiques fermées simples telles que $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ délimitent une paire de pantalons plongée, et la double sommation porte sur les géodésiques fermées simples telles que β_1, β_j, α délimitent une paire de pantalons plongée. C'est la version de l'identité de longueur pour les frontières de longueur positive, mais il existe des versions pour les surfaces hyperboliques à pointes, et les identités de longueur sont un vaste sujet en soi.

Cette identité fournit également un moyen d'évaluer l'intégrale de volume WP $\int_{\mathcal{T}/\text{MCG}} dV$. Maryam Mirzakhani a réalisé que l'identité de longueur et la construction de Fenchel-Nielsen des surfaces hyperboliques conduisent à une récurrence pour les intégrales de volume WP connue sous le nom de récurrence de volume de Maryam Mirzakhani. Les coordonnées de Fenchel-Nielsen sont des coordonnées sur l'espace de Teichmüller. Une collection de $3g - 3 + n$ géodésiques fermées simples

4. David Cohn, *Measure Theory* (New York : Springer, 2013).

5. Scott Wolpert, *Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry* (American Mathematical Society, 2009).

disjointes peut être utilisée pour découper une surface en $2g-2+n$ paires de pantalons, de telle sorte que les frontières des pantalons sont des pointes de longueur nulle et non des géodésiques de longueur positive. Les coordonnées de Fenchel-Nielsen pour un point de l'espace de Teichmüller d'une surface sont données par deux ensembles de paramètres qui peuvent être utilisés pour recoller la surface à partir des morceaux de la décomposition. Le premier paramètre est la longueur de frontière l_j et le second est le twist de Fenchel-Nielsen τ_j , qui mesure le déplacement hyperbolique entre deux frontières. Comme on pourrait intuitivement le deviner, le twist de Fenchel-Nielsen autour d'une géodésique simple est l'action d'ouvrir la surface le long de la géodésique, en faisant pivoter les frontières des deux cercles résultants l'une par rapport à l'autre, puis en les recollant. Les longueurs des coordonnées sont simplement les longueurs des géodésiques qui sont homotopes aux $3g-3+n$ géodésiques fermées simples disjointes. On peut montrer que l'application de $\mathcal{T}$ vers les paramètres définie par :

$$\mathcal{T} \rightarrow (l_j, \tau_j) \in \prod_{j=1}^{3g-3+n} (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$$

est une équivalence. Les coordonnées de Fenchel-Nielsen peuvent être utilisées pour montrer que la variation de longueur d'une géodésique simple a une longueur WP finie au voisinage de 0. On peut montrer que ces coordonnées sont des coordonnées symplectiques de telle sorte que l'on peut définir une forme symplectique WP comme :

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_j dl_j \wedge d\tau_j.$$

Ceci peut être prouvé directement en cherchant les coefficients de la 2-forme⁶.

Le volume de Weil-Petersson est un volume d'un espace de modules et les volumes de ce type peuvent être calculés en utilisant des revêtements pour les espaces de modules intermédiaires et en considérant la décomposition d'une surface en différentes configurations de sous-surfaces : c'est ce qui conduit finalement au théorème de récurrence du volume. Il y a des considérations de symétrie finie à prendre en compte lors de l'ouverture d'une surface de cette manière, mais nous passerons rapidement sur la récurrence de volume qu'a trouvée Maryam Mirzakhani. Commençons par l'espace de Teichmüller de structures hyperboliques marquées comme auparavant $\mathcal{T}(L_1, \dots, L_n)$ de genre g , où $L_1, \dots, L_n$ sont les longueurs des frontières géodésiques $\beta_1, \dots, \beta_n$. Comme auparavant, on obtient un espace de modules en prenant le quotient de l'espace de Teichmüller par le groupe pur des classes d'application. Le volume WP $V_g(L_1, \dots, L_n)$ de cet espace de modules est une fonction symétrique des longueurs de frontière. En supposant des longueurs positives, on pose :

$$V_0(L_1, L_2, L_3) = 1,$$

$$V_1(L_1) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{L_1^2}{48}.$$

Le volume satisfait également ce qui suit :

$$\frac{\partial}{\partial L_1} V_g(L) = \mathcal{A}_g^{\text{con}}(L) + \mathcal{A}_g^{\text{dcon}}(L) + \mathcal{B}_g(L),$$

6. Scott Wolpert, *On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curves*, Amer. J. Math., 107(4) 969–997 (1985).

avec

$$\mathcal{A}_g^*(L) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{\mathcal{A}}_g^*(x, y, L) xy \, dx \, dy,$$

$$\mathcal{B}_g(L) = \int_0^\infty \hat{\mathcal{B}}_g(x, L) x \, dx,$$

$$\hat{\mathcal{B}}_g(x, L) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (H(x, L_1 + l_j) + H(x, L_1 - l_j)) V_g(x, L_2, \dots, \hat{L}_j, \dots, L_n),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_g^{\text{con}}(x, y, L) = H(x + y, L_1) V_{g-1}(x, y, \hat{L}),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_g^{\text{dcon}}(x, y, L) = \sum_{g_1 + g_2 = g, I_1 \sqcup I_2 = \{2, \dots, n\}} H(x + y, L_1) V_{g_1}(x, L_{I_1}) V_{g_2}(y, L_{I_2}),$$

où la sommation porte sur les décompositions de paires de structures hyperboliques et I_1 et I_2 sont des ensembles non ordonnés qui fournissent une partition. Le $\hat{L}$ fait référence au fait que nous considérons un volume de modules d'une sous-surface, puisque $\hat{L} = (L_2, \dots, L_n)$. Sans trop entrer dans les détails, le fait-clé est que le volume WP de l'espace de modules peut être écrit comme une intégrale de volumes de surfaces dont la décomposition implique une paire de pantalons en moins.

On peut alors dériver une récurrence d'intégration générale. Si l'on commence par une multi-courbe :

$$\gamma = \sum_{j=1}^m a_j \gamma_j$$

et une certaine fonction f qui devient petite à l'infini, on peut écrire une somme qui est invariante sous le groupe de classes d'application :

$$f_\gamma(R) = \sum_{\text{MCG}/\text{Stab}(\gamma)} f \left(\sum_{j=1}^m a_j l_{\gamma_j}(R) \right).$$

Le stabilisateur dans ce cas est le sous-groupe du groupe de classes d'application qui stabilise les courbes pondérées. Pour une multi-courbe pondérée et une somme de fonctions par le MCG, Maryam Mirzakhani a montré que l'on a :

$$\int_{\mathcal{T}(R)/\text{MCG}} f_\gamma \, dV = (|\text{Sym}(\gamma)|)^{-1} \int_{\mathbb{R}_{>0}^m} f(|\mathbf{x}|) V(R(\gamma); \mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x},$$

où $|\mathbf{x}| = \sum_j a_j x_j$, $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = x_1 \dots x_m \, dx_1 \dots dx_m$ et $R(\gamma)$ désigne une surface hyperbolique R découpée le long de la multi-courbe γ . La preuve de ce théorème utilise une suite exacte courte des groupes de classes d'application.

Ce théorème peut être combiné avec l'identité de longueur de McShane-Mirzakhani pour dériver la formule de récurrence pour le volume d'un espace de modules, puisque l'identité de longueur a la forme d'une somme par le MCG. Une fois que l'on a la récurrence de volume mise au point par Maryam Mirzakhani, la prochaine chose à faire est de comprendre les intégrales impliquées dans la formule. Les intégrales de la formule de récurrence s'avèrent être des polynômes dont les coefficients

sont dans $\pi\mathbb{Q}^+$. Maryam Mirzakhani a montré que le volume WP $V_g(L)$ est un polynôme de degré $6g - 6 + 2n$ en les longueurs de frontière qui peut s'écrire comme suit ⁷ :

$$V_g(L) = \sum_{|\mathbf{j}| \leq 3g-3+n} v_{\mathbf{j}} L^{2\mathbf{j}},$$

où L est le tuple des longueurs de frontière, $\mathbf{j}$ est un multi-indice, $|\mathbf{j}|$ est une sommation, et le coefficient est dans $\pi^{6g-6+2n-|\mathbf{j}|}\mathbb{Q}$. Les coefficients polynomiaux sont ici des nombres d'intersection pour les classes tautologiques sur l'espace de modules compactifié. Des arguments de réduction symplectique montrent qu'il y a un développement pour le volume WP en termes de nombres d'intersection tautologiques. Le volume WP relatif à la forme symplectique $2\omega_L$ est un polynôme de degré $3g - 3 + n$ en les carrés des longueurs de frontière $L_1^2, \dots, L_n^2$.

$$\begin{aligned} \frac{V_g(2\pi L)}{(2\pi^2)^d} &= \frac{1}{d!} \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \left(\kappa_1 + \sum_{j=1}^n L_j^2 \psi_j \right)^d \\ &= \sum_{d_1+\dots+d_n=d} \prod_{j=1}^n \frac{1}{d_j!} \langle \kappa_1^{d_0} \prod_{j=1}^n \tau_{d_j} \rangle_{g,n} \prod_{j=1}^n L_j^{2d_j}, \end{aligned}$$

où $\tau_{d_j} = \psi_j^{d_j}$ et où les crochets angulaires désignent l'intégration d'une 2-forme dans la compactification de Deligne-Mumford de l'espace de modules ⁸.

On peut considérer la relation d'appariement d'intersection suivante :

$$\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle_g = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} \text{ pour } d_1 + \dots + d_n = d.$$

La fonction génératrice pour les nombres d'intersection $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle_g$ (qui a émergé à l'origine comme une fonction de partition, lorsque Witten étudiait des théories de jauge bidimensionnelles dans un contexte physique) est définie comme :

$$\mathbf{F} = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{2g-2} F_g,$$

où

$$F_g(t_0, t_1, \dots) = \sum_{\{d_j\}} \left\langle \prod_{j=1}^n \tau_{d_j} \right\rangle_g \prod_{r=1}^{\infty} \frac{t_r^{n_r}}{n_r!}.$$

La sommation porte sur toutes les suites d'entiers non négatifs avec un nombre fini de termes non nuls. Vous remarquerez que la fonction génératrice n'encode que les nombres d'intersection des classes tautologiques ψ_j . La conjecture de Witten énonce que la fonction génératrice satisfait des ensembles d'EDP connus sous le nom d'équations de contrainte de Virasoro et la hiérarchie de Korteweg-de Vries. La conjecture a été prouvée par Kontsevich. Maryam Mirzakhani a adopté

7. Maryam Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, Invent. Math., 167(1), 179–222 (2007).

8. Maryam Mirzakhani, *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*, J. Amer. Math. Soc., 20(1), 1–23 (2007).

une approche différente de la conjecture, en appliquant sa formule de récurrence de volume et en calculant les intégrales pour l'intégration sur une et deux longueurs de frontière :

$$\int_0^\infty x^{2j+1} H(x, t) dx, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2j+1} y^{2k+1} H(x + y, t) dx dy$$

pour dériver un résultat qui est équivalent à la formule de Witten-Kontsevich⁹.

Peut-être êtes-vous familier avec le théorème des nombres premiers en théorie analytique des nombres. Il a été observé il y a de nombreuses années que la densité des nombres premiers $p \leq x$ semble être $(\log x)^{-1}$. Le théorème des nombres premiers énonce que si $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers d'une grandeur d'au plus x , alors lorsque $x \rightarrow \infty$ nous avons une relation asymptotique :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Gauss a observé qu'une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par une intégrale singulière avec un développement asymptotique pour $x > 1$:

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dy}{\log y} = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{\log y} + \log \log x + \gamma.$$

Dans ses tentatives pour prouver le théorème, Tchebychev a réalisé qu'il était plus facile de travailler avec une fonction :

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Ce qui est encore mieux, c'est la fonction de Tchebychev $\psi(x)$ obtenue en prenant la moyenne :

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt définie par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^k \text{ pour un premier } p \text{ et un entier } k \geq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si nous utilisons cette fonction, le théorème des nombres premiers devient l'énoncé asymptotique :

$$\psi(x) \sim x.$$

Les premières preuves du théorème par Hadamard et de la Vallée Poussin étaient analytiques, ayant été épurées et rationalisées en une "preuve standard via l'analyse complexe". La preuve de Hadamard est complexe dans son argumentation, mais tout à fait agréable, car elle utilise tous les outils de base tels que les intégrales de contour et le théorème des résidus de Cauchy, un théorème d'analyse complexe élémentaire. Il y a aussi une preuve élémentaire par Selberg et Erdős, mais elle est plus difficile à suivre que la preuve analytique et seulement élémentaire au sens où elle ne

9. Scott Wolpert, *Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry* (American Mathematical Society, 2009).

nécessite pas d'analyse complexe. Les deux preuves par Selberg et Erdős reposent sur la formule de Selberg¹⁰ :

$$\sum_{p \leq x} (\log p)^2 + \sum_{pq \leq x} (\log p)(\log q) = 2x \log x + O(x).$$

On peut compter les géodésiques fermées sur les surfaces de Riemann compactes, y a-t-il donc une version analogue du théorème des nombres premiers sur ce type de surface ? Le théorème des nombres premiers géodésiques pour une surface hyperbolique compacte énonce que le nombre de géodésiques fermées $\mathbf{c}(L)$ et le nombre de géodésiques primitives fermées $\mathbf{c}_{\text{primitive}}(L)$ avec une longueur d'au plus L satisfont la relation asymptotique suivante lorsque $L \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{c}(L) \sim \mathbf{c}_{\text{primitive}}(L) \sim \frac{e^L}{L}.$$

Dans le cas général de n -variétés compactes à courbure négative, on peut montrer que ce nombre satisfait la relation asymptotique suivante lorsque $L \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{c}(L) \sim \frac{e^{hL}}{hL},$$

où h est l'entropie topologique du flot géodésique. Pour une multi-courbe sur une surface hyperbolique R , on peut définir le nombre de multi-courbes de longueur d'au plus L dans l'orbite du groupe de classes d'application de la courbe particulière γ :

$$s_R(L, \gamma) = \#\{\alpha \in \text{MCG} \text{ tel que } l_\alpha(R) \leq L\},$$

où $l_\alpha = \sum_{j=1}^m a_j l_{\alpha_j}$ pour $\alpha = \sum_{j=1}^m a_j \alpha_j$. Le nombre de toutes les géodésiques fermées simples est défini par la sommation suivante¹¹ :

$$s_R(L) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}/\text{MCG}} s_R(L, \gamma).$$

Maryam Mirzakhani a utilisé les intégrales de sa formule de récurrence de volume et les propriétés des laminations géodésiques mesurées pour obtenir le beau théorème des géodésiques simples. Celui-ci énonce que pour une multi-courbe rationnelle γ , il existe une constante $c(\gamma)$ ne dépendant que de γ telle que :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{s_R(L, \gamma)}{L^{6g-6+2n}} = \frac{c(\gamma) \mathbf{B}(R)}{\mathbf{b}(R)},$$

où

$$\mathbf{B}(R) = \mu_{\text{Thurston}}(\mathbf{B}_R), \quad \mathbf{b}(R) = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{B}(R) dV.$$

La constante est calculée en utilisant les poids pour la multi-courbe et les coefficients du volume de l'espace de modules. Comme d'habitude, ceci s'applique à une surface hyperbolique $R(\gamma)$ qui est découpée sur la courbe γ . Pour une seule courbe, la constante peut s'écrire comme :

$$c(\gamma) = (|\text{Sym}(\gamma)|(6g - 6 + 2n))^{-1} \prod_{R(\gamma) \text{ composantes}} V(R'; L)_{\text{dominant}}.$$

10. Henryk Iwaniec et Emmanuel Kowalski, *Analytic Number Theory* (American Mathematical Society, 2004).

11. Scott Wolpert, *Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry* (American Mathematical Society, 2009).

Maryam Mirzakhani a fourni des exemples explicites du calcul de $c(\gamma)$ dans le cas du genre 0 et aussi pour la séparation des courbes de surfaces compactes. Dans le cas du genre 0, la surface peut être découpée par une courbe géodésique fermée simple non triviale γ_j en une paire de surfaces de genre 0, l'une avec j pointes et une frontière et l'autre avec $n - j$ pointes et une frontière (en supposant que la surface d'origine avait plus de 3 pointes). On peut montrer que l'on obtient :

$$c(\gamma_j) = \frac{1}{2^{n-4}(j-2)!(n-j-2)!(2n-6)2^{\delta_{j,n-j}}},$$

Dans le cas d'une courbe fermée de séparation, une surface compacte de genre g est divisée en une surface de genre j avec une frontière et une autre surface de genre $g - j$ avec une frontière. La constante résultante est alors assez similaire :

$$c(\gamma_j) = \frac{1}{2^{3g-4}4^g j!(g-j)!(3j-2)!(3(g-j)-2)!(6g-6)2^{\delta_{j,g-j}}}.$$

Les choses deviennent plus compliquées lors du comptage de multi-courbes. Maryam Mirzakhani a montré que pour une multi-courbe γ , l'intégrale WP de $s_R(L, \gamma)$ est un polynôme :

$$P(L, \gamma) = (|\text{Sym}(\gamma)|)^{-1} \int_{\{0 \leq \sum_{j=1}^m a_j x_j \leq L, x_j \geq 0\}} V(R(\gamma); \mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x},$$

où $V(R(\gamma); \mathbf{x})$ est le volume de l'espace de modules pour les surfaces découpées comme d'habitude et $\mathbf{x}$ est un tuple de longueurs de frontière. Dans le cas d'une multi-courbe rationnelle, Maryam Mirzakhani a prouvé que les mesures d'orbite mises à l'échelle convergent de manière *-faible comme suit :

$$\mu_{T, \gamma} \rightarrow \frac{c(\gamma)}{\mathbf{b}(R)} \mu_{\text{Thurston}},$$

où la constante est le coefficient dominant dans le polynôme que nous venons d'écrire. Nous mentionnerons un dernier résultat remarquable de Maryam Mirzakhani. Pour une multi-courbe $\gamma = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$, la constante est donnée par une formule :

$$c(\gamma) = \sum_{\vec{j}, |\vec{j}| \leq 3g-3+n-m(\gamma)} \frac{v_{\vec{j}}(\gamma)}{|\text{Sym}(\gamma)|(6g-6+2n)!} \prod_{i=1}^{m(\gamma)} \frac{(2j_i+1)!}{a_i^{2j_i+2}}.$$

L'intégrale de l'espace de modules sur le volume de Thurston est :

$$\mathbf{b}(R) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}\mathcal{L}_{\text{unit}/\text{MCG}}} \sum_{\vec{j}, |\vec{j}| \leq 3g-3+n-m(\gamma)} \frac{v_{\vec{j}}(\gamma)}{|\text{Sym}(\gamma)|(6g-6+2n)!} \prod_{i=1}^{m(\gamma)} (2j_i+1)! \zeta(2j_i+1),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann ¹².

12. Maryam Mirzakhani, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Ann. of Math. (2), 168(1), 97–125 (2008).