

Maryna Viazovska

Maryna Viazovska est bien connue pour ses travaux sur l'empilement de sphères et la théorie de la conception combinatoire. Elle a résolu de manière spectaculaire le problème de l'empilement de sphères en dimensions 8 et 24. Cela a été une certaine surprise, car la solution du problème pour une dimension inférieure ou égale à 3 impliquait une preuve assistée par ordinateur et de nombreux calculs informatiques ardues, tandis que Maryna Viazovska a utilisé des types d'arguments plus traditionnels que l'on associerait à une preuve. Un débat subsiste quant à la nécessité des preuves vérifiées par ordinateur et au rôle futur que les ordinateurs et l'apprentissage automatique joueront dans le domaine de la théorie de la preuve formelle. Certes, il est possible que les ordinateurs soient utilisés systématiquement à l'avenir pour prouver des lemmes qui seraient autrement très fastidieux à démontrer : ce type de lemme est courant en algèbre commutative, par exemple. Les informaticiens utilisent des outils de vérification de preuves formelles depuis des décennies, mais en général, la communauté mathématique n'y a pas prêté beaucoup d'attention. Le fait que Maryna Viazovska ait utilisé des arguments basés sur des formes modulaires pour résoudre des cas d'un problème qui n'avait auparavant été jugé accessible que par des preuves assistées par ordinateur suggère qu'il n'y a pas nécessairement de place *essentielle* pour ce type de preuve dans l'avenir des mathématiques, et que l'adaptation de ces méthodes pourrait dépendre du fait que les mathématiciens souhaitent les utiliser ou les trouvent utiles, plutôt que d'une nécessité réelle.

Peut-être que les plus célèbres des preuves assistées par ordinateur sont celles du théorème des quatre couleurs et celle de la conjecture de Kepler. Il existe de nombreux exposés de ces deux résultats et des preuves dans la littérature mathématique populaire, mais nous allons les parcourir tout de même¹. Le théorème des 4 couleurs trouve son origine en cartographie. Peut-être avez-vous vous-même un jour imprimé une copie blanche d'une carte d'un certain pays divisé en états ou comtés, puis avez-vous calculé combien de couleurs seraient nécessaires pour colorer le tout, en supposant que les états voisins (partageant une frontière) commune aient des couleurs différentes. L'expérience suggérerait que le nombre minimal de couleurs nécessaires pour cela est 4, mais comment s'y prendrait-on pour le prouver ? Comme toujours, nous pourrions commencer par formuler le problème en langage mathématique.

Commençons par une carte $\mathcal{L}$ et appelons $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble de tous les états de la carte. On dispose de n couleurs avec lesquelles remplir ces états. Une n -coloration de la carte est une application $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Une n -coloration est dite admissible si les pays voisins (qui partagent une frontière commune) ont toujours des valeurs de fonction distinctes (ces valeurs de fonction correspondant aux couleurs).

Nous pourrions également vouloir considérer les permutations des couleurs.

Soit $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une n -coloration admissible de la carte et $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une permutation, alors on peut montrer que la composition $\pi \circ \varphi$ est également une n -coloration admissible. Deux colorations d'une carte sont considérées comme équivalentes si elles ne diffèrent

Traduction des pages 199 à 208 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Ian Stewart, *The Great Mathematical Problems : Marvels and Mysteries of Mathematics* (London : Profile Books, 2014).

que par une permutation des couleurs. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème des quatre couleurs comme suit : toute carte possède une 4-coloration admissible. Sans entrer dans les détails, l’approche fondamentale pour prouver ce théorème consiste à étudier un type de contre-exemple souvent appelé “contre-exemple minimal”. L’idée du contre-exemple minimal est que s’il existe une carte qui ne peut pas être colorée avec quatre couleurs, alors il doit exister une carte de ce type contenant le plus petit nombre m de pays. Une carte à quatre pays peut être trivialement colorée avec quatre couleurs (ou bien les pays peuvent se voir attribuer à chacun un nombre d’un ensemble de quatre nombres, si vous préférez), de sorte que le nombre minimal de pays doit être supérieur à quatre. Une carte ayant moins de m pays admet une 4-coloration. Une carte à m pays qui n’admet pas de 4-coloration est appelée un contre-exemple minimal dans la littérature. Le but est de montrer qu’un tel contre-exemple minimal ne peut pas exister. Le problème peut également être formulé comme un problème combinatoire sans référence à la géométrie². Un problème similaire en combinatoire connu sous le nom de problème de Hadwiger-Nelson demande le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer le plan de telle sorte que deux points à une distance unitaire l’un de l’autre n’aient pas la même couleur. Des progrès récents sur cette question ont été réalisés par de Grey, qui a montré que le nombre minimal est d’au moins 5 en présentant un nombre de graphes finis à distance unitaire dans le plan qui ne sont pas 4-colorables. Le plus petit d’entre eux possède 1581 sommets. Cette preuve a également été assistée par ordinateur³.

La conjecture de Kepler énonce que l’empilement le plus dense possible de $\mathbb{R}^3$ par des sphères isométriques est ce que l’on appelle aujourd’hui l’empilement CCF (cubique à faces centrées), qui remplit l’espace avec une densité de $\pi/\sqrt{18} \approx 74\%$. La conjecture a émergé à l’origine dans le cadre appliqué de l’empilement efficace de boulets de canon et fait partie du dix-huitième problème de Hilbert. Nous n’entrerons pas dans la preuve ici, car elle est extrêmement compliquée et nécessiterait des centaines de pages, même pour un résumé. Là encore, la preuve donnée par Hales et Ferguson est assistée par ordinateur. C’était peut-être la première preuve de ce genre à l’époque et elle a provoqué une énorme controverse et un examen de conscience sur ce que signifie réellement dire que quelque chose a été prouvé, les rapporteurs (arbitres) de l’article n’étant pas en mesure d’affirmer avec certitude l’exactitude des nombreux calculs qui avaient été effectués à l’aide d’un ordinateur⁴.

Le réseau CCF est l’un des nombreux types de réseaux utilisés pour décrire les structures cristallines trouvées dans la nature. Un cristal est une structure solide dans laquelle un groupe d’atomes est disposé selon un motif répétitif sur une grille tridimensionnelle régulière appelée réseau. En fait, Gauss avait déjà prouvé la conjecture de Kepler sur un réseau régulier avant les preuves modernes. Le réseau CCF est un réseau cubique simple, mais avec un point de réseau supplémentaire au centre de chaque face de chaque cube. Un vecteur de déplacement qui relie deux points de réseau est appelé vecteur de réseau. Si l’on suppose que la structure peut être modélisée comme un cristal infini, alors tout déplacement par un vecteur de réseau ne produira aucun changement dans le cristal, c’est-à-dire qu’il y a une symétrie de translation. Cela implique que la fonction d’énergie potentielle pour un électron dans un cristal obéit à une condition de périodicité pour tout vecteur

2. Rudolf Fritsch et Gerda Fritsch, *The Four-Color Theorem : History, Topological Foundations, and Idea of Proof* (New York : Springer-Verlag, 1998).

3. Aubrey de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, arXiv :1804.02385v3 (2018).

4. Thomas Hales et Samuel Ferguson, *The Kepler Conjecture : The Hales-Ferguson Proof* (New York : Springer, 2010).

de réseau. Cela implique le théorème de Bloch : dans une structure cristalline infinie, les fonctions propres d'énergie des électrons peuvent s'écrire sous la forme

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde et $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ est une fonction ayant la périodicité du réseau

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad \text{pour tout vecteur de réseau } \mathbf{R}.$$

Le théorème nous apprend que la fonction propre d'énergie d'un électron dans un cristal infini est le produit de l'onde plane associée à un électron libre multipliée par une fonction périodique. Cela explique un vieux mystère sur la façon dont les électrons semblent se déplacer librement à travers les fils, même s'il doit y avoir des atomes obstruant leur passage (chose que la théorie classique ne peut expliquer). Dans un cristal parfait, la fonction propre de l'électron s'étend sans s'arrêter comme une onde plane (seulement modulée par la fonction périodique), de sorte que l'onde électronique n'est pas obstruée par les atomes tassés les uns contre les autres qui l'entourent.

Nous pouvons appliquer le théorème de Bloch pour montrer de manière triviale que la densité de probabilité associée à une onde de Bloch possède également la périodicité associée au réseau. La densité de probabilité de l'électron est donnée par

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{r})|^2 &= \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \\ &= \left(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})\right) \left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\right), \\ &= |u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit alors. Les valeurs du vecteur d'onde sont restreintes à un ensemble discret utilisant des conditions aux limites périodiques appropriées⁵. Lorsque l'on considère la maille élémentaire du réseau CCF, il y a huit points de réseau aux sommets de la maille et un point de réseau au centre de chacune des six faces, de sorte que la maille élémentaire contient quatre points de réseau. Si nous remplissons l'espace euclidien avec des mailles élémentaires CCF, on s'aperçoit que les points de réseau d'un réseau CCF étendu sont décrits comme des points dont les coordonnées usuelles sont de la forme $a\mathbb{Z}$, pour la constante de réseau a , ou deux des trois coordonnées sont des entiers demi-impairs multipliés par a , avec la coordonnée restante $a\mathbb{Z}$ comme auparavant. La cellule de Wigner-Seitz pour le réseau CCF prend la forme d'un dodécaèdre rhombique, où chaque face est le plan bissecteur entre le point central et l'un de ses voisins. On utilise les bissectrices pour construire cette cellule de Wigner-Seitz d'un point d'un réseau et la cellule en question est définie comme l'ensemble de tous les points qui sont plus proches de ce point que de tout autre point de réseau. Un réseau plus simple est le réseau cubique simple, mais la plupart des éléments chimiques ne peuvent pas former un réseau cubique simple sous forme atomique, bien qu'il y en ait un qui le fasse (le polonium)⁶.

Nous avons mentionné que la conjecture de Kepler avait été prouvée avec un argument extrêmement compliqué qui utilisait délibérément des résultats de calculs informatiques. L'annonce par Maryna

5. John Bolton et Stuart Freake (éd.), *Quantum Mechanics of Matter* (Milton Keynes : The Open University, 2009).

6. Simon, *The Oxford Solid State Basics* (Oxford : Oxford University Press, 2013).

Viazovska de preuves courtes de la conjecture correspondante en dimensions 8 et 24 était donc plutôt inattendue. La preuve en dimension 8 a été réalisée en utilisant uniquement des formes modulaires et l'analyse de Fourier et elle utilise parfois des arguments qui sont relativement simples, et qui proviennent de l'analyse complexe standard et de la théorie des transformations, la preuve utilise également des résultats comme la transformée de Fourier de la gaussienne. Pour un entier k , une fonction est dite modulaire de poids $-2k$ si f est méromorphe sur le demi-plan $\mathbb{H}$ et si elle satisfait la relation suivante :

$$f(z) = (cz + d)^{-2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

pour toutes les matrices de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Vous reconnaîtrez probablement la fonction rationnelle de z comme une transformation de Möbius du plan complexe. De plus, si f est méromorphe sur le demi-plan, f est une fonction faiblement modulaire de poids $2k$ si et seulement si elle satisfait deux relations :

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z), \\ f\left(-\frac{1}{z}\right) &= z^{2k} f(z). \end{aligned}$$

Une fonction faiblement modulaire est dite modulaire si elle est méromorphe à l'infini, et une fonction modulaire qui est holomorphe partout est appelée forme modulaire. Si une telle fonction est nulle à l'infini, la forme modulaire est appelée forme cuspidale. De l'analyse complexe, nous savons qu'une forme modulaire de poids $2k$ est donnée par une série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

qui a un rayon de convergence unitaire. Cette forme modulaire sera une forme cuspidale si $a_0 = 0$.

Si f_1 et f_2 sont deux formes modulaires de poids $2k_1$ et $2k_2$ respectivement, alors le produit $f_1 f_2$ est une autre forme modulaire de poids $2k_1 + 2k_2$. Si nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des paires (ω_1, ω_2) d'éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$, deux éléments de $\mathcal{M}$ définissent le même réseau (non relié aux réseaux dont nous parlions auparavant) si et seulement s'ils sont congruents modulo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Cela implique que l'ensemble des réseaux $\mathcal{R}$ de $\mathbb{C}$ peut être identifié au quotient de $\mathcal{M}$ par l'action de groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Nous avons également que l'application donnée par

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1/\omega_2$$

nous fournit une bijection de $\mathcal{R}/\mathbb{C}^*$ sur le quotient H/G après passage au quotient. Cela implique qu'un élément de H/G peut être identifié à un réseau de $\mathbb{C}$ modulo les homothéties. Le quotient $\mathcal{R}/\mathbb{C}^*$ peut également être vu comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques. Pour un exemple relativement simple de fonction modulaire, prenons un entier $k > 1$. Si Γ est un réseau de $\mathbb{C}$, définissons la série suivante :

$$G_k(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} ' \frac{1}{\gamma^{2k}}.$$

On peut montrer qu'il s'agit d'une série absolument convergente de poids $2k$, connue sous le nom de série d'Eisenstein d'indice $2k$. Comme cette série est une fonction définie sur l'espace $\mathcal{M}$, nous

avons

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m,n}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}},$$

où la sommation porte sur toutes les paires d'entiers qui sont distinctes de la paire $(0,0)$. En évaluant pour un certain z , on a

$$G_k(z) = \sum_{m,n}' \frac{1}{(mz + n)^{2k}}.$$

On peut montrer que la série d'Eisenstein $G_k(z)$ est une forme modulaire de poids $2k$, et qu'évaluée à l'infini, on a

$$G_k(\infty) = 2\zeta(2k),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann. Pour prouver cela, il faut montrer que la série d'Eisenstein est holomorphe partout (y compris à l'infini). Il existe un lien intéressant entre la série d'Eisenstein et la fonction p de Weierstrass. Commençons par un réseau sur $\mathbb{C}$ et prenons la fonction p de Weierstrass correspondante :

$$\wp_\Gamma(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma}' \left(\frac{1}{(u - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

Effectuons le développement de Laurent.

$$\wp_\Gamma(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)G_k(\Gamma)u^{2k-2}.$$

En posant $x = \wp_\Gamma(u)$ et $y = \wp'_\Gamma(u)$, on aboutit à une courbe cubique

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

où g_2 et g_3 sont des multiples des séries d'Eisenstein de poids les plus bas. Il s'agit d'une courbe cubique non singulière, et l'on peut montrer que dans le plan projectif, cette courbe est isomorphe à la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Gamma$ ⁷.

En des termes plus formels, Maryna Viazovska a prouvé qu'aucun empilement de boules unitaires dans $\mathbb{R}^8$ ne peut avoir une densité supérieure à celle de l'empilement du réseau E_8 . La démonstration utilise une quantité appelée constante d'empilement de sphères qui mesure la quantité d'espace euclidien de dimension n qui peut être couverte par des boules unitaires qui peuvent se toucher sans se chevaucher. On s'intéresse à une boule ouverte standard dans l'espace euclidien notée $B_d(x, r)$, dont x est le centre et r est le rayon. Si $X \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble discret de points tel que $\|x - y\| \geq 2$, alors l'union de toutes les boules unitaires

$$\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} B_d(x, 1)$$

est techniquement ce qu'on entend par empilement de sphères. Si X est un réseau, alors on dit que $\mathcal{P}$ est un empilement de sphères sur réseau (c'est le genre d'empilement de sphères que Gauss

7. Jean-Pierre Serre, A Course in Arithmetic (New York : Springer, 1973).

a étudié il y a de nombreuses années). La densité finie d'un empilement $\mathcal{P}$ est définie comme le rapport de volumes suivant :

$$\Delta_{\mathcal{P}}(r) := \frac{\text{Vol}(\mathcal{P} \cap B_d(0, r))}{\text{Vol}(B_d(0, r))}.$$

La densité de l'empilement est définie comme la limite supérieure :

$$\Delta_{\mathcal{P}} := \limsup_{r \rightarrow \infty} \Delta_{\mathcal{P}}(r).$$

On cherche le supremum de cette quantité particulière sur l'ensemble de toutes les densités d'empilement possibles :

$$\Delta_d := \sup_{\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d} \Delta_{\mathcal{P}}.$$

Cette constante est appelée la constante d'empilement de sphères. Dans le cas de la dimension 1, trivialement

$$\Delta_1 = 1,$$

donc pas de prix pour celui-là. Dans le plan euclidien, comme on pourrait intuitivement s'y attendre, l'empilement le plus efficace est un réseau hexagonal, où un disque touche six autres disques. La densité de l'empilement du réseau hexagonal est donnée par

$$\Delta_2 = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 91\%.$$

Ce chiffre est beaucoup plus élevé que le chiffre correspondant trouvé pour $\mathbb{R}^3$ qui a été prouvé par Hales et Ferguson :

$$\Delta_3 = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74\%.$$

Il est intéressant de spéculer sur ce que serait cette constante d'empilement pour le cas de $\mathbb{R}^8$. Maryna Viazovska a prouvé qu'elle est égale à

$$\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 25\%.$$

Cela correspond à la densité de l'empilement de sphères du réseau E_8 . Le réseau E_8 , noté Λ_8 , est donné par

$$\Lambda_8 = \left\{ (x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right)^8 \text{ tel que } \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^8$. Ce réseau est le réseau de rang 8 unique, défini positif, pair et uni-modulaire (unique modulo les isométries). Si vous avez été familiarisé aux systèmes de racines, le nom est dû au fait qu'il s'agit du réseau de racines du système de racines E_8 . La distance minimale entre deux points dans Λ_8 est $\sqrt{2}$ et l'empilement de sphères du réseau E_8 est l'empilement de boules unitaires dont les centres sont situés à $\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_8$.

La preuve de Maryna Viazovska selon laquelle aucun empilement de boules unitaires dans $\mathbb{R}^8$ n'a une densité supérieure à la densité de l'empilement du réseau E_8 fait intervenir la technique des bornes de programmation linéaire. Cette technique permet d'obtenir des bornes supérieures dans de nombreux problèmes d'optimisation discrète, bien que ces bornes ne soient pas toujours

particulièrement nettes. On pouvait espérer qu'il y aurait des bornes de programmation linéaire qui pourraient être appliquées spécifiquement aux empilements de sphères, et c'est ce qui s'avère être le cas. Maryna Viazovska a utilisé ces techniques (connues sous le nom de bornes de programmation linéaire de Cohn-Elkies), y compris un résultat qui vaut la peine d'être cité. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admissible non nulle. Si la fonction satisfait ce qui suit :

$$f(x) \leq 0 \quad \text{pour } \|x\| \geq 1$$

et

$$\widehat{f}(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d,$$

alors la densité des empilements de sphères de dimension d est bornée supérieurement par

$$\frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^d \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} = \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \text{Vol } B_d\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Combiné avec l'analyse de Fourier et une certaine théorie des formes modulaires, cela donne une preuve relativement courte pour le cas de l'espace euclidien de dimension 8⁸.

Maryna Viazovska et ses collègues sont revenus plus tard sur cette question, mais cette fois pour $\mathbb{R}^{24}$. En se basant sur la preuve en dimension huit, ils ont étudié un réseau appelé le réseau de Leech et ont prouvé que le réseau de Leech atteint la densité optimale d'empilement de sphères dans $\mathbb{R}^{24}$, et que c'est le seul empilement périodique dans $\mathbb{R}^{24}$ avec cette densité, modulo mise à l'échelle et isométries. Il s'ensuit que la densité optimale d'empilement de sphères dans $\mathbb{R}^{24}$ est égale à celle du réseau de Leech. Alors, quel pourrait être ce nombre ? Il doit être proche de zéro, n'est-ce pas ? En fait, il est égal à⁹

$$\Delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.19\%.$$

Si l'on revient à la topologie symplectique, existe aussi un problème d'empilement symplectique. Étant donné $k \geq 1$, on aimerait trouver le maximum de tous les rayons r (notés r_k) pour lesquels il existe un plongement symplectique de k boules disjointes de rayon r dans la variété symplectique (M, ω) . (M, ω) peut être remplie complètement par k boules si le rayon maximal r_k est tel que le volume de k boules de rayon r_k est égal au volume de M par rapport à la forme de volume symplectique $\omega^n/n!$. De manière informelle, le problème demande quelle quantité du volume d'une variété symplectique peut être remplie par des boules symplectiques ouvertes disjointes enchâssées. Des progrès significatifs ont été réalisés sur ce problème, mais rien n'est connu au-delà de la dimension six, en raison du fait que de nombreuses techniques pertinentes ne sont applicables qu'en dimension quatre¹⁰.

Un cas particulier du problème d'empilement symplectique qui a été étudié est le cas équivalent au tore, où la variété symplectique et la boule ouverte symplectique standard sont munies d'une

8. Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, Annals of Mathematics, 185(3), 991-1015 (2017).

9. Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen Miller, Danylo Radchenko and Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Annals of Mathematics, 185(3), 1017-1033 (2017).

10. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology* (New York : Oxford University Press, 1998).

action hamiltonienne d'un n -tore et où les plongements symplectiques de la boule dans la variété sont équivariants par rapport à ces actions. Un résultat qui a été trouvé dans ce cas est que si M est une variété de Delzant $2n$ -dimensionnelle M , alors M admet un empilement symplectique équivariant parfait si et seulement s'il existe un certain $\lambda > 0$ tel que M est équivariamment symplectomorphe soit au plan projectif complexe, soit au produit de deux droites projectives complexes (où la forme symplectique est multipliée par λ dans les deux cas) lorsque $n = 2$, ou de telle sorte que M est équivariamment symplectomorphe au plan projectif complexe n -dimensionnel lorsque $n \neq 2$. Une autre façon de l'énoncer est que $(\mathbb{CP}^n, \lambda\omega_{\text{FS}})$ et $(\mathbb{CP}^1 \oplus \mathbb{CP}^1, \lambda\omega_{\text{FS}} \oplus \lambda\omega_{\text{FS}})$ sont les seules variétés de Delzant qui admettent un empilement symplectique équivariant parfait ¹¹.

Maryna Viazovska a travaillé sur la théorie des designs sphériques. Ceux-ci pourraient sembler être des résultats seulement intéressants pour eux-mêmes, mais ils ont été repris et appliqués en théorie de l'approximation et en mécanique quantique. Commenant par la sphère unitaire S^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec la mesure de Lebesgue μ_n normalisée à l'unité de telle sorte que

$$\mu_n(S^n) = 1.$$

Un ensemble de points $x_1, \dots, x_N$ dans S^n est appelé un t -design sphérique si

$$\int_{S^n} P(x) d\mu_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i),$$

pour tous les polynômes en $n + 1$ variables sur un certain corps algébrique, de degré total au plus t . Notons par $N(n, t)$ le nombre minimal de points dans un t -design sphérique sur la n -sphère. Il était déjà connu depuis les années 1970 qu'il existe une borne inférieure pour cette quantité :

$$N(n, t) \geq \begin{cases} \binom{n+k}{n} + \binom{n+k-2}{n}, & t = 2k, \\ 2\binom{n+k}{n}, & t = 2k + 1. \end{cases}$$

Un t -design sphérique qui atteint cette borne inférieure est dit serré. Pour un exemple simple, considérons les sommets d'un $(t + 1)$ -gone régulier : ceux-ci forment un t -design sphérique serré dans le cercle. On connaît huit designs sphériques serrés pour $n \geq 2$ et $t \geq 4$, mais en général, les designs sphériques serrés sont rares et il a été montré qu'ils n'existent que pour certaines valeurs de t lorsque $n \geq 2$.

Maryna Viazovska et ses collègues ont étudié les bornes asymptotiques sur $N(n, t)$ pour $n \geq 2$ et t tendant vers l'infini. Ils ont utilisé un théorème lié au théorème du point fixe de Brouwer, un théorème familier de la topologie algébrique élémentaire : le théorème dit que si f est une auto-application continue pour l'espace euclidien et si Ω un sous-ensemble borné ouvert de frontière $\partial\Omega$ tel que $0 \in \Omega$, alors si $\langle x, f(x) \rangle > 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$. Ce théorème est utilisé pour prouver que pour chaque $N \geq C_n t^n$, il existe un t -design sphérique dans S^n consistant en N points. De même que le théorème précédent, la preuve fait également appel au concept de partition régulière du point de vue de l'aire. Soit $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ une collection finie de sous-ensembles fermés de la n -sphère telle que

$$\bigcup_{i=1}^N R_i = S^n$$

11. Álvaro Pelayo, *Toric symplectic ball packing*, Topology and its Applications, 153, 3633–3644 (2006).

et

$$\mu_n(R_i \cap R_j) = 0,$$

pour tout $1 \leq i < j \leq N$. La partition $\mathcal{R}$ est dite régulière du point de vue de l'aire si $\mu_n(R_i) = 1/N$. On a également une norme de partition définie par

$$\|\mathcal{R}\| := \max_{R \in \mathcal{R}} \text{diam } R,$$

où $\text{diam } R$ est la distance géodésique maximale entre deux points de R . On peut montrer que pour chaque N , il existe une partition régulière du point de vue de l'aire telle que

$$\|\mathcal{R}\| \leq B_n N^{-\frac{1}{n}},$$

pour B_n suffisamment grand¹².

Dans un article connexe, Maryna Viazovska a poussé cette approche plus loin en prouvant qu'il existe certaines configurations dans la n -sphère qui sont des t -designs sphériques avec un nombre de points qui est asymptotiquement minimal au sens que nous venons de décrire, de plus elles ont la meilleure propriété de séparation en termes asymptotiques. Une séquence de configurations à N points $X_N = \{x_{1N}, \dots, x_{NN}\}$ dans S^n est dite bien séparée si

$$\min_{1 \leq i < j \leq N} |x_{iN} - x_{jN}| \geq \lambda_n N^{-\frac{1}{n}},$$

pour une constante λ_n et $n \geq 2$. De plus, il existe une autre constante L_n telle que

$$\min_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j| \geq L_n N^{-\frac{1}{n}}.$$

Maryna Viazovska et ses collègues ont prouvé que pour chaque $n \geq 2$, il existe des constantes C_n et λ_n dépendant uniquement de n telles que pour chaque $N > C_n t^n$, il existe un t -design sphérique dans S^n consistant en N points avec l'inégalité

$$|x_i - x_j| \geq \lambda_n N^{-\frac{1}{n}}.$$

Il s'agit d'une généralisation directe du théorème précédent que nous avons mentionné. (Avec la preuve de ce résultat, la preuve utilise la théorie du degré et les partitions régulières du point de vue de l'aire)¹³.

Maryna Viazovska a également apporté des contributions à la physique pure de l'état solide et des semi-conducteurs, bien que cela ne soit peut-être pas trop surprenant étant donné les connexions entre les empilements, les réseaux et les structures cristallines que nous avons évoquées. Par exemple, avec des collègues, elle a calculé la profondeur de London dépendante de la température dans le cristal $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$ basée sur la structure de bande électronique et l'écart supraconducteur dépendant de l'impulsion dérivé de la spectroscopie par photoémission résolue en angle et des

12. Andriy Bondarenko, Danylo Radchenko and Maryna Viazovska, *Optimal asymptotic bounds for spherical designs*, Annals of Mathematics, 178(2), 443–452 (2013).

13. Andriy Bondarenko, Danylo Radchenko and Maryna Viazovska, *Well-separated spherical designs*, Constructive Approximation, 41(1), 93–112 (2015).

données de rotation des spins des muons. La profondeur de pénétration de London est définie par la formule suivante :

$$\frac{1}{\lambda^2(T)} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 \hbar L_c} \int_{\text{FS}} v_F(\mathbf{k}) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\partial f_T(\omega)}{\partial \omega} \right) \text{Re} \frac{\omega + i\Sigma''}{\sqrt{(\omega + i\Sigma'')^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2(T)}} d\omega \right) dk,$$

où v_F est la vitesse de Fermi, $\Delta_{\mathbf{k}}(T)$ est l'écart supraconducteur dépendant de l'impulsion, Σ'' est le taux de diffusion, dk est l'élément de longueur pour la surface de Fermi, T est la température, $f_T(\omega)$ est la fonction de Fermi, et les autres constantes physiques fondamentales sont définies comme d'habitude¹⁴.

Références

- [1] Ian Stewart, *The Great Mathematical Problems : Marvels and Mysteries of Mathematics* (London : Profile Books, 2014).
- [2] Rudolf Fritsch et Gerda Fritsch, *The Four-Color Theorem : History, Topological Foundations, and Idea of Proof* (New York : Springer-Verlag, 1998).
- [3] Aubrey de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, arXiv :1804.02385v3 (2018).
- [4] Thomas Hales et Samuel Ferguson, *The Kepler Conjecture : The Hales-Ferguson Proof* (New York : Springer, 2010).
- [5] John Bolton et Stuart Freake (éd.), *Quantum Mechanics of Matter* (Milton Keynes : The Open University, 2009).
- [6] Steven Simon, *The Oxford Solid State Basics* (Oxford : Oxford University Press, 2013).
- [7] Jean-Pierre Serre, *A Course in Arithmetic* (New York : Springer, 1973).
- [8] Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, Annals of Mathematics, 185(3), 991–1015 (2017).
- [9] Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen Miller, Danylo Radchenko et Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Annals of Mathematics, 185(3), 1017–1033 (2017).
- [10] Dusa McDuff et Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology* (New York : Oxford University Press, 1998).
- [11] Álvaro Pelayo, *Toric symplectic ball packing*, Topology and its Applications, 153, 3633–3644 (2006).
- [12] Andriy Bondarenko, Danylo Radchenko et Maryna Viazovska, *Optimal asymptotic bounds for spherical designs*, Annals of Mathematics, 178(2), 443–452 (2013).
- [13] Andriy Bondarenko, Danylo Radchenko et Maryna Viazovska, *Well-separated spherical designs*, Constructive Approximation, 41(1), 93–112 (2015).
- [14] D. V. Evtushinsky et al., *Momentum-resolved superconducting gap in the bulk of Ba_{1-x}K_xFe₂As₂ from combined ARPES and μ SV*, New Journal of Physics, 11(5), 55069 (2009).

14. D. V. Evtushinsky et al., *Momentum-resolved superconducting gap in the bulk of Ba_{1-x}K_xFe₂As₂ from combined ARPES and μ SV*, New Journal of Physics, 11(5), 55069 (2009).