

Nicole Tomczak-Jaegermann

Nicole Tomczak-Jaegermann fait des recherches en analyse fonctionnelle géométrique, et travaille en particulier dans la théorie des espaces de Banach. Elle a reçu le prix CRM-Fields-PIMS pour ses recherches, précédemment attribué à Coxeter et Tutte. La définition de base d'un espace de Banach est qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé complet (où par complet, on entend complet pour la métrique induite par la norme). Une norme sur un espace vectoriel réel ou complexe X est une fonction à valeurs réelles sur X dont la valeur en un point de l'espace est notée $\|x\|$. La norme doit satisfaire les quatre propriétés suivantes :

$$\|x\| \geq 0,$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

où x et y sont deux vecteurs quelconques dans X et α est un scalaire quelconque. Une norme sur X définit une métrique d sur X donnée par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Cette métrique est appelée la métrique induite. On peut vérifier facilement que d définit bien un espace métrique, et donc les espaces normés et les espaces de Banach sont des espaces métriques.

Un exemple de norme sur $C[0, 1]$ est la norme du supremum :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

D'autres exemples courants sont les normes L^1 et L^2 .

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Différentes normes peuvent être introduites sur le même espace vectoriel, donc on aimerait une relation d'équivalence qui nous permette de comparer deux normes. On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel V sont équivalentes s'il existe des constantes positives telles que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1,$$

pour tout $x \in V$. On peut alors écrire

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2.$$

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

Deux normes quelconques sur un espace euclidien sont équivalentes. Comme exemple de deux normes qui ne sont pas équivalentes, on peut considérer la norme L^1 et la norme du supremum sur $C[0, 1]$.

Étant donnés deux espaces normés V et W , une application linéaire L de V vers W telle que

$$\|L(x)\| = \|x\|$$

est appelée une isométrie linéaire. Deux espaces normés sont isométriquement isomorphes s'il existe une isométrie linéaire inversible entre eux. Une norme peut être ramenée en arrière par une application linéaire inversible, puisque si V est un espace muni d'une norme, si W est un espace vectoriel, et si L est un isomorphisme linéaire, alors on peut définir une norme sur W comme

$$\|x\|_W \|L(x)\|_V.$$

On peut vérifier que ces conditions sont bien satisfaites par une norme, y compris l'inégalité triangulaire. Si V est un espace vectoriel de dimension finie et $n = \dim V$, alors V est linéairement isomorphe à l'espace des tuples d'éléments dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant, comme une norme peut être ramenée en arrière par une application linéaire inversible, cela implique que tout espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme et que tout espace normé de dimension n est isométriquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ avec une norme appropriée. Puisque deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on a également que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Considérons maintenant les espaces normés complets. Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans un espace normé V est de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$ non nul, il existe un N tel que

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

pour tout $m, n > N$. Une suite de nombres réels converge si et seulement si elle est de Cauchy. On peut également prouver que toute suite convergente est de Cauchy, et que toute suite de Cauchy est bornée. Pour prouver la première affirmation pour un espace métrique, il suffit de voir que si x_n converge vers x à la limite alors, pour tout $\epsilon > 0$, il doit y avoir un N ne dépendant que de ϵ tel que

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

pour $n > N$. Par l'inégalité triangulaire, on trouve que pour $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Cependant, on peut voir, d'après la définition, que cela implique que (x_n) est une suite de Cauchy. Puisqu'une suite de nombres réels converge seulement si elle est de Cauchy, on a que $\mathbb{R}$ est complet, et par extension $\mathbb{C}$. Tout espace normé de dimension finie peut être vu comme complet en considérant des vecteurs de base.

Un bon exemple d'espace de Banach est $\ell^p(\mathbb{R})$ muni de la norme ℓ^p habituelle. Pour établir la preuve de la complétude, prenons simplement un tuple de suites dans $\ell^p(\mathbb{R})$, on suppose qu'il est de Cauchy, et on montre que la somme que l'on obtient implique que

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}| < \epsilon,$$

puisque tous les termes de la somme sont positifs. De là, on montre que $x^{(m)}$ converge vers un tuple de constantes réelles lorsque m tend vers l'infini, ce qui établit que $\ell^p(\mathbb{R})$ est complet. L'argument fonctionne également si l'on remplace les réels par des complexes. Comme autre exemple, $C[0, 1]$ muni de la norme du supremum est complet. La preuve utilise un fait de base de l'analyse selon lequel la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est également continue. Il est possible d'avoir un espace qui est complet lorsqu'il est muni d'une certaine norme, mais qui n'est pas complet lorsqu'il est muni d'une autre norme. Par exemple, $C[0, 1]$ muni de la norme L^1 n'est pas complet. Cela peut être prouvé en prenant une suite de fonctions continues comme suit :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

On peut alors montrer que f_n ne converge pas vers une fonction continue dans la norme L^1 via un argument par contradiction : on suppose qu'une limite f existe. Un autre exemple d'espace métrique non complet est $\mathbb{Q}$ muni de la métrique usuelle. Un espace normé X peut être vu comme un sous-ensemble dense d'un espace de Banach plus grand $\mathcal{X}$ appelé un complété de X . Une question naturelle est de savoir si un espace vectoriel normé non complet peut toujours être complété de cette manière. (En fait, on a la réponse à cette question quand on sait qu'un espace normé peut toujours être complété en le munissant d'un produit scalaire et en en prenant l'adhérence)¹.

Un sous-ensemble $X \subset V$ est dense dans V si pour tout $v \in V$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in X$ tel que

$$\|x - v\|_V < \epsilon.$$

Un exemple évident est $\mathbb{Q}$, qui est dense comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Les nombres réels peuvent être obtenus à partir de ce sous-ensemble en complétant $\mathbb{Q}$ par des coupures de Dedekind². De même, l'espace des tuples d'éléments rationnels $\mathbb{Q}^n$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}^n$. Si l'on prend deux espaces normés et une application linéaire $L : V \rightarrow W$, cette application est appelée une isométrie linéaire si L est linéaire, bijective, et si

$$\|L(x)\|_W = \|x\|_V$$

pour tout $x \in V$. On dit que les deux espaces sont linéairement isométriques. Tout espace vectoriel normé X est linéairement isométrique à un sous-ensemble dense d'un espace de Banach $\mathcal{X}$ muni d'une norme $\|\cdot\|_X$. Si X est déjà de Banach, alors l'isométrie linéaire est juste l'identité. La preuve du théorème de complétude est assez longue : on cherche à construire $\mathcal{X}$ en utilisant une relation d'équivalence appropriée entre les suites de Cauchy, puis à montrer que c'est un espace vectoriel normé, puis à montrer qu'il est complet et que X est toujours isométrique à un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ dense.

1. Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, 1978.

2. G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1952.

Évidemment, à ce stade, on ne sait pas si le complété est unique, mais on peut montrer plus facilement que dans la preuve du théorème précédent que si $\mathcal{X}$ et $\widetilde{\mathcal{X}}$ sont des espaces de Banach où les isométries $i : X \rightarrow \mathcal{X}$ et $\bar{i} : X \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$ sont telles que

$$\|x\|_X = \|i(x)\|_{\mathcal{X}} = \|\bar{i}(x)\|_{\widetilde{\mathcal{X}}},$$

alors si $i(x)$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{X}$ et si $\bar{i}(x)$ est un sous-ensemble dense de $\widetilde{\mathcal{X}}$, alors $\mathcal{X}$ et $\widetilde{\mathcal{X}}$ sont linéairement isométriques, c'est-à-dire que tous les complétés d'un espace sont les mêmes modulo les isométries linéaires. Il existe également des théorèmes plus avancés concernant les applications linéaires entre espaces de Banach. Commençons par rappeler le théorème de catégorie de Baire. Celui-ci stipule que si $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une famille dénombrable de sous-ensembles ouverts denses d'un espace métrique complet, alors l'intersection

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$$

est dense dans X . Dit autrement, toute collection dénombrable de sous-ensembles ouverts denses a une intersection dense. Il est également possible de formuler ce théorème en référence à un espace de Hausdorff localement compact, et c'est l'une des principales propriétés que ces espaces partagent avec les espaces métriques complets. Un espace topologique pour lequel toute union dénombrable de sous-ensembles ouverts denses est dense est appelé un espace de Baire. La propriété de Baire est topologique, donc tout espace homéomorphe à un espace métrique complet doit être un espace de Baire. Comme corollaire, tout sous-ensemble maigre d'un espace de Baire a un complément dense, où un sous-ensemble d'un espace topologique est dit maigre s'il peut être exprimé comme une union d'un nombre dénombrable de sous-ensembles nulle part denses.

Le premier grand théorème que nous aimerions énoncer pour les applications linéaires entre espaces de Banach est le principe de la borne uniforme. Commençons par un espace de Banach X et un espace normé Y . Prenons S un sous-ensemble d'applications linéaires bornées de X vers Y tel que

$$\sup_{T \in S} \|T(x)\|_Y < \infty$$

pour tout $x \in X$. Si ces hypothèses sont vérifiées, alors

$$\sup_{T \in S} \|T\| < \infty.$$

C'est un théorème très utile dans les applications. Comme corollaire, prenons T_n dans l'espace des applications linéaires bornées et supposons que la norme $\|T_n\|$ est non bornée. Il doit exister $x \in X$ tel que $\|T_n x\|$ soit non borné. Cela peut être prouvé par contradiction : supposer que ce x n'existe pas implique que $\|T_n\|$ est borné. Comme autre corollaire, supposons que X est un espace de Banach, Y un espace normé et T_n une application linéaire bornée comme précédemment. Supposons que la limite suivante existe pour tout $x \in X$:

$$T(x) \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Si c'est le cas, alors $T \in B(X, Y)$. Cela peut être prouvé en vérifiant que T est à la fois linéaire et bornée. Le fait que T soit bornée découle du principe de la borne uniforme.

Voyons maintenant le théorème de l'application ouverte. Mettons en garde le lecteur ou la lectrice sur le fait que l'énoncé et la preuve de ce résultat dans certains manuels d'analyse fonctionnelle peuvent être difficiles à comprendre. On peut énoncer le théorème comme suit : si $T: X \rightarrow Y$ est une application linéaire surjective bornée d'un espace de Banach X vers un autre espace de Banach Y , alors T envoie les ensembles ouverts de X vers des ensembles ouverts de Y . La preuve utilise le théorème de catégorie de Baire. Comme corollaire, on obtient le théorème de l'application inverse. Celui-ci dit que si $T: X \rightarrow Y$ est une application linéaire bijective bornée d'un espace de Banach X vers un espace de Banach Y , alors l'inverse T^{-1} est borné. On sait déjà que T a un inverse. Cet inverse est linéaire car

$$T(\alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2)) = \alpha y_1 + \beta y_2 = T(T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)),$$

ce qui implique que

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2).$$

L'inverse est également unique, et le résultat découle alors du théorème de l'application ouverte. D'après la théorie spectrale standard, on sait qu'en dimension infinie, le spectre d'une auto-application linéaire bornée T est l'ensemble de tous les λ tels que l'opérateur $T - \lambda I$ n'a pas d'inverse borné. Le théorème de l'application inverse nous dit alors que si T est une auto-application linéaire bornée et si $T - \lambda I$ est une bijection, alors l'inverse $(T - \lambda I)^{-1}$ est borné. Cela implique que λ n'appartient pas au spectre de l'opérateur. Un corollaire du théorème de l'application inverse stipule que si X est un espace de Banach complet pour différentes normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

alors les deux normes sont équivalentes.

Le dernier théorème qui va être rappelé ici est le théorème du graphe fermé. Ce théorème stipule que si $T: X \rightarrow Y$ est une application linéaire entre espaces de Banach et si le graphe de T

$$G\{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

est un sous-ensemble fermé du produit $X \times Y$ avec une norme définie de manière appropriée, alors T est un opérateur borné. Le graphe G est un sous-espace linéaire fermé de $X \times Y$, donc ce doit être un espace de Banach muni de la norme produit qui vient d'être mentionnée. Considérons l'application de projection qui envoie le graphe vers l'une des moitiés du produit, définie comme

$$\pi_X(x, y) = x.$$

Cette application est une bijection linéaire bornée. Par le théorème de l'application inverse, on sait que l'inverse est également borné, donc

$$\|\pi_X^{-1}(x)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|.$$

Cela implique que

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|,$$

ce qui achève la preuve. Le théorème peut être utilisé pour prouver un résultat important, connu sous le nom de théorème de Hellinger-Toeplitz, qui stipule que si H est un espace de Hilbert et si $T: H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire qui satisfait

$$(T(x), y) = (x, T(y)),$$

alors T est borné. Dit autrement, un opérateur symétrique défini partout sur un espace de Hilbert est borné. Cela a des conséquences importantes, car cela dit qu'un opérateur linéaire non borné qui satisfait ce qui précède ne peut pas être défini partout sur l'espace de Hilbert. Cependant, les opérateurs non bornés apparaissent naturellement en mécanique quantique (comme l'opérateur correspondant à l'observable d'énergie, par exemple), mais nous n'irons pas plus loin dans la théorie non bornée ici.

Il existe également un ensemble de théories plus avancées concernant les espaces de Banach. Le point de départ de cette théorie est de commencer à penser aux bases dans les espaces de Banach. Comme on le fait en algèbre linéaire, supposons qu'un espace de Banach ait une base dénombrable $\{e_n\}$ telle que tout élément de l'espace puisse être écrit de manière unique comme une décomposition :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j,$$

où la somme converge dans l'espace de Banach. Si on considère les expansions finies suivantes jusqu'à n termes

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

une question que l'on peut se poser est de savoir s'il existe une constante telle que

$$\|P_n(x)\| \leq C\|x\|,$$

pour tout n ?

Pour prouver cela, nous devons montrer que $P_n \in B(X, X)$ pour tout n . Pour cela, on a besoin d'arguments assez complexes qui montrent que si (e_n) est une suite dénombrable dans un espace de Banach telle que $\|e_n\| = 1$ et si l'adhérence de l'espace linéaire engendré est l'espace entier X , alors

$$\|x\| = \sup_n \left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_X$$

définit une norme sur l'espace de Banach telle que l'espace est complet pour cette norme. Un corollaire de ce résultat est que si une suite (e_n) satisfait les conditions précédentes, alors il existe une constante C telle que

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\| \leq C\|x\|,$$

pour $n \in \mathbb{N}$ ³.

Il n'est bien sûr pas clair que les espaces de Banach de dimension infinie puissent avoir une base, puisque le concept de base provient de l'algèbre linéaire en dimension finie. Si un espace normé contient une suite de vecteurs (e_n) avec la propriété qu'il existe toujours une suite unique de scalaires (α_n) telle que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

3. Bryan Rynne et Martin Youngson, *Linear Functional Analysis* (London : Springer, 2008)

alors (e_n) est appelée une base de Schauder pour l'espace de Banach. On a alors comme précédemment le développement de x par rapport à (e_n) :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

En particulier, cela signifie que la suite suivante

$$\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \right)_{N=1}^{\infty}$$

doit converger vers x dans la topologie de la norme de X . Dans le cas de l'espace des suites ℓ^p , une base de Schauder est donnée par la suite de tuples dont le n -ième terme est 1 et tous les autres termes sont nuls :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots),$$

et ainsi de suite. On peut montrer qu'un espace normé avec une base de Schauder est séparable. Banach a demandé si la réciproque était vraie, c'est-à-dire qu'il a posé la question de savoir si tout espace de Banach séparable doit avoir une base de Schauder. Enflo a prouvé que la réponse est négative en construisant un contre-exemple⁴.

Le concept de base dans un espace de Banach de dimension infinie est distinct du concept de base de Hamel, qui est une base d'espace vectoriel, étant définie simplement comme un sous-ensemble linéairement indépendant de l'espace qui engendre V . Plus concrètement, une base de Hamel pour un espace vectoriel est une collection de vecteurs linéairement indépendants telle que tout élément de l'espace peut être représenté de manière unique comme une combinaison linéaire finie des éléments de la base. On peut prouver avec l'axiome du choix ou le lemme de Zorn que tout espace vectoriel a une base de Hamel. De plus, si un espace vectoriel a une base de Hamel finie, alors toute base de Hamel pour l'espace a le même nombre d'éléments. C'est essentiellement un argument d'algèbre linéaire. Le théorème de catégorie de Baire peut être utilisé pour déduire que si (e_i) est une base de Hamel pour un espace de Banach de dimension infinie, alors elle doit être indénombrable. Le théorème du graphe fermé peut être utilisé pour montrer qu'une suite dans un espace de Banach séparable est une base de Schauder seulement si elle est équivalente au type de base que nous connaissons déjà. La preuve est élégante, mais le résultat n'est pas aussi utile qu'il n'y paraît, car il est rare que l'on sache que quelque chose est une base sans déjà savoir que c'est une base de Schauder.

Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ est une base pour un espace de Banach, alors le nombre

$$K_b = \sup_n \|S_n\|$$

est la constante de base, où les S_n forment une suite de projections associées aux éléments de la base de Schauder. On a également la notion correspondante de suite basique. Une suite $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ dans un espace de Banach est appelée une suite basique si elle est une base pour l'adhérence de

4. Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications* (USA : John Wiley Sons, 1978).

l'espace linéaire engendré par $(e_k)_{k=1}^\infty$. Il existe également une théorie très intéressante sur la géométrie non linéaire des espaces de Banach. Puisqu'un espace de Banach est aussi un espace métrique par définition, la question de la géométrie non linéaire est de savoir dans quelle mesure la structure métrique d'un espace de Banach détermine sa structure linéaire. Toute la théorie dont nous avons discuté jusqu'à présent concerne les opérateurs linéaires entre espaces de Banach, mais il existe de nombreuses applications naturelles entre ces espaces qui sont non linéaires (bien qu'elles puissent encore avoir de bonnes propriétés de régularité). L'étude de ces applications est un domaine de recherche relativement nouveau en analyse fonctionnelle.

Si l'on a très peu d'informations sur la structure métrique d'un espace de Banach, on peut se demander ce que l'on peut savoir de l'espace X si on ne connaît que la classe homéomorphe de X comme espace topologique. En effet, on aimerait savoir quand deux espaces de Banach séparables sont homéomorphes comme espaces topologiques. Ce problème a été résolu quelques décennies après avoir été posé par Fréchet : tous les espaces de Banach séparables de dimension infinie sont homéomorphes. Dans le cas opposé, on suppose que l'application entre les espaces de Banach est une isométrie, ce qui signifie que l'application transporte essentiellement toutes les informations que l'on peut souhaiter connaître sur la structure métrique de X . Dans cette situation, il a été montré que l'on peut obtenir des informations complètes sur la structure linéaire réelle. Spécifiquement, si X et Y sont des espaces normés réels et si Φ est une isométrie qui envoie X vers Y et 0 vers 0, alors Φ est un opérateur linéaire borné. Si deux espaces de Banach réels sont isométriques comme espaces de Banach, alors ils sont aussi linéairement isométriques.

En général, on se situe entre ces deux extrêmes, et l'objectif est de trouver combien d'informations sur les structures du premier espace de Banach sont transférées au second espace par une application f . Par exemple, il peut être prouvé que si f est un homéomorphisme uniforme entre deux espaces normés, alors f est un plongement lipschitzien grossier surjectif. Une question de base dans ce domaine est de savoir si le fait qu'il existe une application lipschitzienne entre espaces de Banach qui a comme propriété d'être une isométrie linéaire suffit à établir l'existence d'une application linéaire correspondante qui a également cette même propriété⁵. On ne peut, dans cette courte biographie de Nicole Tomczak-Jaegermann, aller plus loin dans la théorie des espaces de Banach, mais ces éléments peuvent constituer une bonne motivation pour poursuivre l'étude. On peut également mentionner que les travaux de Nicole Tomczak-Jaegermann ont été utilisés de manière essentielle par Gowers dans sa solution au problème de l'espace homogène de Banach. Un espace de Banach est dit homogène s'il est isomorphe à tous ses sous-espaces de Banach de dimension infinie. Le problème de l'espace homogène demande si tout espace de Banach homogène est isomorphe à un espace de Hilbert séparable. Le résultat spécifique de Nicole Tomczak-Jaegermann était le fait qu'un espace de Banach X de cotype q pour un certain q fini a soit un sous-espace sans base inconditionnelle, soit il a un sous-espace isomorphe à ℓ_2 . De plus, si X est un espace de Banach homogène, alors soit il est isomorphe à ℓ_2 , soit il n'a pas de base inconditionnelle⁶.

Nicole Tomczak-Jaegermann s'est intéressée également à la théorie des probabilités, en particulier à la théorie des matrices aléatoires et des graphes aléatoires. Les matrices aléatoires sont souvent

5. Fernando Albiac et Nigel Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2016.

6. R. A. Komorowski et Nicole Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces without local unconditional structure*, Israel J. Math. 89, 205–226 (1995).

plus utiles que les matrices régulières car dans la limite des grandes dimensions, les corrélations statistiques pour les spectres d'un ensemble de matrices aléatoires ne dépendent pas de la distribution de probabilité qui définit l'ensemble, elles ne dépendent que des propriétés invariantes de la distribution. C'est ce qu'on appelle la propriété d'universalité des matrices aléatoires. Les techniques de la théorie des matrices aléatoires permettent également des calculs analytiques qui sont souvent impossibles autrement. Ce concept d'universalité signifie qu'une matrice n'a pas besoin d'avoir des variables aléatoires gaussiennes indépendantes comme entrées de la matrice. On pourrait théoriquement créer une matrice aléatoire en remplissant chaque case avec 1 ou -1 avec une probabilité de 50/50 pour chacune. Selon la symétrie globale de la matrice, on peut aboutir aux statistiques de valeurs propres communes des ensembles de matrices aléatoires gaussiennes même avec des règles différentes pour créer les éléments de la matrice.

Cependant, il faut être un peu prudent avec des affirmations comme celles-ci, car ce sont seulement les statistiques locales des valeurs propres (celles qui opèrent sur quelques espacements moyens, par exemple) qui sont universelles, et il y a d'autres propriétés globales qui peuvent dépendre de la distribution à partir de laquelle les éléments sont tirés. Si on calcule la densité des phases propres sur le cercle unité, la densité ne sera uniforme que pour les éléments gaussiens, et augmenter la taille de la matrice ne changera pas cela, alors que les propriétés locales (statistiques des plus proches voisins) deviendront universelles à la limite, pour une grande matrice. Remplir une matrice avec des éléments aléatoires ne donnera pas d'universalité pour ces propriétés globales à moins que le générateur de nombres aléatoires n'échantillonne à partir d'une distribution gaussienne. Comme on s'intéresse aux valeurs propres, on considère des matrices unitaires aléatoires. Le concept de matrice unitaire aléatoire se réfère généralement à la mesure de Haar sur le groupe des matrices unitaires. On prend le groupe de Lie des matrices $U(n)$ et on en fait un espace de probabilité en lui assignant la mesure de Haar, qui est la mesure unique invariante sous la multiplication dans le groupe de Lie. Il existe des méthodes numériques pour générer des matrices unitaires aléatoires qui échantillonnent à partir de l'un des groupes de Lie classiques $U(n)$ ou $O(n)$, où l'échantillonnage est uniforme car il se fait par rapport à la mesure de Haar uniforme⁷.

Après avoir généré ces matrices, on trouve que pour chaque matrice $n \times n$, il y a une liste de valeurs propres

$$e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}.$$

Ces valeurs propres se situent dans l'intervalle

$$0 < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n \leq 2\pi.$$

et elles ont une densité de $n/2\pi$, de sorte qu'il y a n angles propres pour chaque intervalle de longueur 2π . Lorsqu'on considère les statistiques des angles propres, il est courant de les mettre à l'échelle de sorte que l'espacement moyen entre les angles propres consécutifs ait une taille unitaire :

$$\phi_1 = \theta_1 \frac{N}{2\pi}, \quad \dots, \quad \phi_n = \theta_n \frac{n}{2\pi}.$$

Si l'on calcule une liste de différences entre les angles propres mis à l'échelle voisins et que l'on fait un histogramme de cette liste (normalisée à l'unité), l'histogramme approximera la densité de

7. Francesco Mezzadri, *How to generate random matrices from the classical compact groups*, Notices of the American Mathematical Society, 54, 592–604 (2007).

probabilité des espacements des angles propres. Intégrer la distribution des espacements de 0 à α donne la probabilité que deux angles propres consécutifs aient une distance de séparation comprise entre 0 et α (comme pour toute distribution de probabilité telle que la distribution de Maxwell). Si l'on moyenne cette distribution d'espacement sur de nombreuses matrices aléatoires, on trouve qu'à la limite la distribution approchera la courbe théorique pour l'ensemble pertinent : dans le cas de $U(n)$, il s'agit de l'ensemble unitaire circulaire.

Nicole Tomczak-Jaegermann a montré que pour A une matrice aléatoire $n \times n$ avec des entrées indépendantes identiquement distribuées de moyenne nulle, de variance unitaire et d'un moment sous-gaussien borné, le nombre de conditionnement $s_{\max}(A)/s_{\min}(A)$ satisfait une estimation de probabilité de petite boule :

$$\mathbb{P}\left\{\frac{s_{\max}(A)}{s_{\min}(A)} \leq \frac{n}{t}\right\} \leq 2 \exp(-ct^2), \quad t \geq 1,$$

où $c > 0$ pourrait ne dépendre que du moment sous-gaussien. Une variable aléatoire ξ a un moment sous-gaussien borné par $K > 0$ si

$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq t\} \leq \exp\left(1 - \frac{t^2}{2K^2}\right), \quad t \geq 0.$$

Les valeurs $s_i(A)$ sont les valeurs singulières de la matrice que nous avons définie et le nombre de conditionnement est défini comme

$$\kappa(A) = \frac{s_{\max}(A)}{s_{\min}(A)},$$

où $s_{\max}$ peut être vu comme s_1 et $s_{\min}$ peut être vu comme s_n lorsque les valeurs singulières sont classées dans l'ordre non croissant⁸.

Dans un autre travail, Nicole Tomczak-Jaegermann montre que pour un grand entier d , si $n \geq 2d$ et A_n est la matrice d'adjacence d'un graphe d -régulier orienté aléatoire sur n sommets avec la distribution uniforme, alors le rang de la matrice d'adjacence est au moins $n - 1$ avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini⁹. Elle a également montré que si d satisfait une inégalité

$$d \leq \log^c n$$

pour tout grand entier n , alors la distribution spectrale empirique d'une matrice d'adjacence remise à l'échelle de manière appropriée converge faiblement en probabilité vers la loi circulaire. Ce résultat donne une solution complète au problème de la convergence faible de la distribution empirique dans le cadre des graphes d -réguliers orientés, en développant pendant le processus une technique pour borner les valeurs singulières intermédiaires de la matrice d'adjacence¹⁰.

8. Alexander Litvak, Konstantin Tikhomirov et Nicole Tomczak-Jaegermann, *Small ball probability for the condition number of random matrices*, arXiv :190-08655v5 (2019).

9. Alexander Litvak, Anna Lytova, Konstantin Tikhomirov, Nicole Tomczak-Jaegermann et Pierre Youssef, *The rank of random regular digraphs of constant degree*, Journal of Complexity, 48, 103–110 (2018).

10. Alexander Litvak, Anna Lytova, Konstantin Tikhomirov, Nicole Tomczak-Jaegermann et Pierre Youssef, *Circular law for sparse random regular digraphs*, arXiv :1801-05576v2 (2018).