

Olga Ladyzhenskaya

Olga Ladyzhenskaya était une mathématicienne connue pour ses travaux sur les EDP et la physique mathématique et pour l’obtention de résultats rigoureux de convergence pour la résolution numérique des EDP. Elle a été présélectionnée pour la médaille Fields (le prix le plus prestigieux en mathématiques) en 1958, ce qui indique que les mathématiciennes avaient des réalisations dignes d’une médaille Fields bien avant la naissance de Maryam Mirzakhani¹. Certains de ses résultats les plus connus sont des preuves de convergence pour la méthode des différences finies (MDF) appliquée aux équations de Navier-Stokes. Ceci est significatif, car de nombreuses méthodes numériques pour résoudre les EDP (bien qu’utiles dans l’industrie et l’ingénierie) manquent de preuves de convergence. Dans certains cas, les ingénieurs utilisent une méthode numérique dont on ne connaît aucun résultat de convergence ou une méthode dont on sait qu’elle a de mauvaises propriétés de convergence et “espèrent” simplement que tout converge pour donner un bon résultat².

La dynamique des fluides computationnelle est un sujet complexe en soi qui nécessite que l’utilisateur apprenne divers logiciels, les logiciels dépendant souvent du problème précis à traiter : un problème d’effondrement de bulle sphérique, par exemple, peut nécessiter un logiciel particulier qui doit être appris puis modifié et validé pour la situation physique spécifique³. D’une manière générale, presque toutes les branches de la science ont une sous-discipline numérique ou computationnelle qui est une science en soi (pensons à la relativité générale numérique, par exemple), mais la même chose peut également se produire en mathématiques pures, où l’on voit des choses comme la théorie des groupes computationnelle et la topologie computationnelle, et il est assez courant de voir des articles sur la théorie des nombres et l’algèbre où un logiciel est utilisé à un moment donné pour des calculs qui seraient autrement inextricables⁴.

Il existe plusieurs méthodes bien connues pour la résolution numérique des EDP, notamment la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis (MVF). L’idée de base de ces méthodes “finies” est de diviser une géométrie ou un problème réel compliqué en un maillage. Par exemple, en fusion nucléaire, on peut considérer le tokamak utilisé pour contenir le plasma. La géométrie d’un tokamak est particulièrement compliquée et difficile à modéliser en raison de la présence de trous et de coupures qui l’éloignent de la géométrie d’un tore. Le domaine est maintenant discret car nous ne calculons les valeurs qu’à certains nœuds du maillage. Là où les EDP définissant le problème sont rendues discrètes en les convertissant en équations algébriques, qui peuvent être résolues de manière itérative ou simultanée. Si le système résultant est linéaire, c’est utile car il existe un certain nombre de méthodes itératives pour résoudre les systèmes linéaires.

Traduction des pages 169 à 178 de l’article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Michael Barany, *The Fields medal should return to its roots*, Nature. 553 (7688), 271–273 (2018).

2. Zi-Cai Li, Yimin Wei, Yunkun Chen, Hung-Tsai Huang, *The method of fundamental solutions for the Helmholtz equation*, Applied Numerical Mathematics. Vol. 135, 510–536 (2019).

3. Max Koch, Christiane Lechner, Fabian Reuter, Karsten Köhler, Robert Mettin, Werner Lauterborn, *Numerical modelling of laser generated cavitation bubbles with the finite volume and volume of fluid method, using OpenFOAM*, Computers and Fluids. 126, 71–90 (2016).

4. Jeremy Rouse, *Explicit bounds for sums of squares*, Mathematical Research Letters. 19(2), 359–376 (2012).

Une méthode itérative bien connue est la méthode de Newton-Raphson, qui utilise l'équation :

$$x_+ = x_c - F'(x_c)^{-1}F(x_c).$$

Nous pourrions nous servir d'une telle méthode pour trouver numériquement une racine d'une équation cubique à partir d'un itéré initial proche de la racine. L'idée de faire démarrer la recherche près de la solution que nous essayons de trouver peut sembler prohibitive, mais cela peut se produire dans une situation physique où on essaye de trouver la hauteur d'un plan d'eau dans un canal et on sait que la hauteur ne va pas trop s'écarter de la hauteur du canal que l'on connaît déjà. Dans l'exemple ci-dessous, on voit qu'après 15 itérations, le processus converge déjà vers la solution avec une précision qui pourrait être acceptable dans les applications.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	3	6	2.579	11	2.521
2	2.758	7	2.561	12	2.519
3	2.688	8	2.548	13	2.518
4	2.639	9	2.534	14	2.517
5	2.604	10	2.523	15	2.517

TABLEAU 1 : Convergence vers une racine d'une équation cubique en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

Une autre façon d'obtenir une solution itérative est de réécrire le système linéaire $Ax = b$ comme une itération à point fixe linéaire. Par exemple, on écrit $Ax = b$ comme

$$x = (I - A)x + b.$$

On définit ensuite l'itération de Richardson comme

$$x_{k+1} = (I - A)x_k + b.$$

En général, on peut également écrire

$$x_{k+1} = Mx_k + c.$$

Une autre façon de convertir le système en une itération à point fixe linéaire est d'effectuer une décomposition de A de la forme $A = A_1 + A_2$, où A_1 est une matrice non singulière. Des exemples de ce type de méthode sont les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Les deux méthodes impliquent de décomposer A et d'appliquer un schéma. Dans la méthode de Gauss-Seidel, A est décomposée de telle sorte que

$$A = D - L - U,$$

où D est la diagonale de A et $-L$ et $-U$ sont les parties triangulaires inférieure et supérieure. Même avec des préconditionneurs et des améliorations, on peut montrer qu'il existe une méthode plus efficace connue sous le nom de méthode du gradient conjugué. Contrairement à la méthode de Gauss-Seidel, ce n'est pas une méthode itérative stationnaire, car la transition entre les itérés dépend de l'historique de l'itération. La méthode du gradient conjugué est idéale pour les systèmes définis positifs grands et creux et elle peut être définie par

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i p_i,$$

où

$$\alpha_i = -\frac{(p_i, p_i)}{(p_i, Ap_i)}.$$

Dans la méthode des volumes finis, le domaine est discrétisé en éléments non superposés appelés volumes finis. Les EDP sont intégrées sur chaque volume pour obtenir des équations algébriques. La particularité de cette méthode est que certains termes de l'équation de conservation sont des intégrales de volume avec un terme de divergence : ceux-ci sont convertis en intégrales de surface en utilisant le théorème de la divergence

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

et évalués comme des flux aux faces des volumes. Comme le flux qui entre dans un volume est le même que le flux qui quitte le volume voisin, la méthode est évidemment conservative. La MVF peut également être formulée pour des maillages polygonaux ayant une structure inhérente et il est assez facile d'implémenter différents types de conditions aux limites, car les variables inconnues ne sont pas évaluées aux faces limites. Tous ces attributs rendent la MVF adaptée à la dynamique des fluides computationnelle ⁵.

La méthode VOF (volume of fluid) est une méthode particulière à la dynamique des fluides computationnelle. Cette méthode a été historiquement utilisée pour modéliser et suivre la surface libre de l'écoulement d'un fluide, bien qu'il soit maintenant courant de l'appliquer à l'interface d'un écoulement à deux fluides (souvent un gaz et un liquide dans un même écoulement). Le premier objectif de la méthode est de reconstruire une approximation de la forme de la surface libre ou de l'interface en utilisant la connaissance de la fraction volumique dans chaque cellule (la fraction volumique étant la fraction d'une cellule de calcul remplie par le fluide supposé être la phase de référence). Vous pouvez également voir la terminologie "fonction de couleur" ou "fonction de marqueur", où le mot "marqueur" se réfère au fait que nous avons une fonction qui peut prendre différentes valeurs dans les différents fluides du système et la fraction volumique est la version discrète de la fonction de marqueur. Selon la méthode de reconstruction, il peut être nécessaire de trouver le vecteur normal $\mathbf{m} = -\nabla C$ pointant à l'opposé de la phase de référence, où C est une fonction de couleur qui varie de la valeur 1 dans une cellule pleine, 0 dans une cellule vide et une valeur intermédiaire dans une cellule de transition mixte. Dans la deuxième étape, on effectue une advection de l'interface dans un champ de vitesse : cela équivaut à échanger des volumes à travers les frontières des cellules voisines.

La conservation de la masse plutôt que du flux est spécifique à la VOF. Par exemple, commençons par l'équation d'advection pour la fonction de marqueur H dans un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}H) = 0.$$

En intégrant cette équation sur une cellule carrée de côté h et en utilisant la définition de C , on obtient

$$h^2 \frac{\partial C_{i,j}(t)}{\partial t} + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} H(\mathbf{x}, t) dl = 0,$$

5. Fadl Moukalled, Luca Mangani, Marwan Darwish, The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics : An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab (Switzerland : Springer, 2015).

où Γ est la ligne de frontière de la cellule. Si on intègre cela sur des pas de temps discrets et si on additionne le résultat sur toutes les cellules du maillage avec les conditions aux limites correctes, on obtient une équation pour la conservation de l'aire totale.

$$\sum_{i,j} C_{i,j}^{n+1} = \sum_{i,j} C_{i,j}^n.$$

Dans une méthode de reconstruction d'interface où on utilise le vecteur normal, la normale dans une cellule est d'abord déterminée en utilisant la fonction de couleur de cette cellule et des cellules voisines, et on obtient ensuite une équation géométrique pour le segment de l'interface en question

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}\mathbf{b} = \alpha,$$

où α est un paramètre à ajuster jusqu'à ce que l'aire sous l'interface soit égale au carré de la longueur multiplié par la fonction de couleur de la cellule⁶.

La méthode particulière à laquelle Olga Ladyzhenskaya a contribué était la MDF. Illustrons le principe de la MDF à l'aide d'un exemple unidimensionnel. On commence par un domaine Ω qui, pour les besoins des applications, peut être pris comme un cube unité d -dimensionnel. On définit une grille de calcul G , qui est définie comme

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = x_j = jh, j = 0, 1, \dots, n, h = \frac{1}{n} \right\}.$$

On définit les opérateurs de différence avant et arrière respectivement comme

$$\Delta \phi_j = \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{h},$$

$$\nabla \phi_j = \frac{(\phi_j - \phi_{j-1})}{h}.$$

Sous certaines hypothèses, une EDP elliptique générale du second ordre peut être réduite à

$$-a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = q.$$

Cette EDP est utilisée pour étudier les écoulements en milieux poreux. Si l'on prend le cas unidimensionnel :

$$-a \frac{d^2 \phi}{dx_1^2} = q,$$

on obtient une approximation par différences finies en remplaçant les opérateurs différentiels par les opérateurs de différence pertinents. La formule la plus élégante possible serait

$$-\frac{1}{2} \left(\nabla(a\Delta) + \Delta(a\nabla) \right) \phi_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Elle peut être écrite en entier et certains termes peuvent être éliminés ou modifiés en fonction de la nature et de la forme de chacune des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 1$.

6. Grétar Tryggvason, Ruben Scardovelli, Stéphane Zaleski, Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multi-phase Flows, Cambridge University Press, 2011.

En deux dimensions, la grille de calcul devient une grille centrée sur les sommets, et l'approximation de l'EDP elliptique du second ordre dans ce cas nous donne une discrétisation centrée sur ces sommets. Les opérateurs de différence sont maintenant définis de manière analogue :

$$\Delta_\alpha \phi_j = \frac{(\phi_{j+e_\alpha} - \phi_j)}{h_\alpha},$$

$$\nabla_\alpha \phi_j = \frac{(\phi_j - \phi_{j-e_\alpha})}{h_\alpha},$$

où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Comme précédemment, l'approximation par différences finies est obtenue en remplaçant les opérateurs différentiels pertinents (les dérivées partielles cette fois) par une combinaison linéaire des opérateurs de différence. Encore une fois, il existe une formule élégante analogue pour l'approximation :

$$-\frac{1}{2} \left(\nabla_\beta (a_{\alpha\beta} \Delta_\alpha) + \Delta_\beta (a_{\alpha\beta} \nabla_\alpha) \right) \phi + \frac{1}{2} (\nabla_\alpha + \Delta_\alpha) (b_\alpha \phi) + c\phi = q.$$

Ce schéma aux différences finies relie ϕ_j à ϕ aux points de grille voisins, l'ensemble des points voisins ainsi que les points de grille $\mathbf{x}_j$ étant connu sous le nom de stencil aux différences finies pour l'approximation. Le stencil dans ce cas n'est pas symétrique mais il est possible d'avoir des stencils symétriques, ce qui signifie que l'approximation discrète hérite de toutes les symétries de la solution ⁷.

Les travaux de Olga Ladyzhenskaya sur les schémas aux différences finies ont commencé assez tôt lorsqu'elle a proposé des analogues à base de différences pour les séries de Fourier et les a ensuite utilisés pour étudier les schémas aux différences finies et prouver des résultats rigoureux sur leur stabilité. Afin d'analyser un schéma aux différences avec l'analogue de la méthode de Fourier, on doit supposer que le schéma correspond à un problème dont la solution peut être représentée à l'aide de séries de Fourier classiques. Les résultats habituels tels que le théorème de Parseval et l'existence de bornes pour les polynômes trigonométriques avec des coefficients de Fourier ont des analogues dans la méthode de Fourier aux différences. D'autres théorèmes montrent alors que la stabilité d'un schéma dépend en fait de la convergence. Comme exemple d'un résultat de convergence de base dans les schémas aux différences, commençons par u dans $L^2(\Omega)$ et laissons les quotients de différence $u_{x_i}(x)$ converger faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $u_i(x)$ lorsque h_i tend vers 0 pour tout $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Les quotients de différence pour le produit de deux fonctions de grille uv peuvent s'écrire comme suit (où $u_{x_i}(x)$ et $u_{\bar{x}_i}(x)$ correspondent aux opérateurs de différence avant et arrière et $\mathbf{e}_i$ est un vecteur unitaire le long de l'axe x_i) :

$$(uv)_{x_i}(x) = u_{x_i}(x)v(x) + u(x + h_i \mathbf{e}_i)v_{x_i}(x),$$

$$(uv)_{\bar{x}_i}(x) = u_{\bar{x}_i}(x)v(x) + u(x - h_i \mathbf{e}_i)v_{\bar{x}_i}(x).$$

Si la convergence ci-dessus se produit, la fonction $u_i(x)$ est juste la dérivée généralisée $\partial u / \partial x_i$ de $u(x)$ dans le domaine Ω . Il s'ensuit que nous pouvons utiliser n'importe quel quotient de différence qui approxime les dérivées.

7. Pieter Wesseling, Principles of Computational Fluid Dynamics (Berlin : Springer, 2001).

Comme autre exemple, commençons par l'inégalité suivante :

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h} u_h^2 \leq c, \quad \Delta_h = h_1 \dots h_n,$$

où les h_n sont des nombres parcourant des suites qui ont pour limite zéro. Si cette inégalité est vérifiée, on peut prouver que le fait que l'une des suites $\{\tilde{u}_h\}$, $\{u'_h\}$ ou $\{u_{(m)}\}$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $u(x)$ lorsque $h_1, \dots, h_n$ tendent vers zéro implique qu'elles convergent toutes vers $u(x)$ de la même manière. $\tilde{u}_h(x)$, $u'_h(x)$ et $u_{(m)}(x)$ correspondent à des types élémentaires d'interpolation d'une fonction arbitraire u_h pour une grille. La plus simple de celles-ci est l'interpolation constante par morceaux :

$$\tilde{u}_h(x) = u_h(kh), x \in \omega_{(kh)}$$

où kh est un sommet tel que $kh = (k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$ et $\omega_{(kh)} = \{x : k_i h_i < x_i < (k_i + 1)h_i\}$. Il y a beaucoup d'autres lemmes et théorèmes de convergence, plus les résultats analogues sur la compacité, la pré-compacité et le fait d'être borné auxquels on pourrait s'attendre ou que l'on pourrait espérer.

Toute cette théorie peut être rassemblée et utilisée pour résoudre quelques EDP illustratives : par exemple, le problème de Dirichlet pour une EDP elliptique du second ordre

$$Lu = f(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i},$$

où u est restreinte à une certaine frontière S et où le domaine est borné. On écrit la forme générale d'une solution de l'EDP dans l'espace de Sobolev approprié et on construit une approximation en remplaçant les intégrales sur le domaine par des intégrales sur les cellules. Les dérivées sont remplacées par des interpolations approximant des quotients de différences. Après avoir considéré les identités nécessaires, on aboutit à un système d'équations aux différences à satisfaire aux points de la grille Ω_h :

$$\mathcal{L}_h u_h = (a_{ijh} u_{xj} + a_{ih} u_h)_{\tilde{x}_i} + b_{ih} u_{xi} + a_h u_h = f_{ih\tilde{x}_i} + f_h.$$

Cette condition est ensuite couplée à la condition aux limites appropriée pour former un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs de u_h . On peut prouver la stabilité de ce schéma dans la norme de grille, plus un résultat de convergence selon lequel la suite d'interpolations $\{u'_h(x)\}$ formée à partir de la suite des solutions du système aux différences converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers la solution généralisée du problème de Dirichlet original et que les dérivées $\left\{ \frac{\partial u'_h}{\partial x_i} \right\}$ convergent faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ⁸.

Il existe également d'autres résultats plus abstraits dans le vaste corpus d'œuvres de Olga Ladyzhenskaya sur les EDP. Par exemple, elle a apporté des contributions importantes à l'étude des équations de Navier-Stokes en montrant l'existence et l'unicité de solutions dans certains cas⁹. Ces

8. Olga Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (New York : Springer Science and Business, 1985).

9. 7 Mark McCartney, *Fluids, fluorescence and a hat full of beetles*. Mathematics Today. Vol. 55 No. 4, 142–144 (2019).

équations sont la base de la mécanique des fluides¹⁰ et ont la forme

$$\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p,$$

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Si le fluide est confiné dans un domaine Ω (un ouvert de $\mathbb{R}^n$, où n est soit 2 soit 3), les équations doivent être couplées à des conditions aux limites. On peut utiliser le principe de la méthode de Galerkin pour prouver l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans le cas tridimensionnel. Une idée-clé ici est l'inégalité de Olga Ladyzhenskaya¹¹, qui est un cas particulier de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg¹². Dans le cas $n = 2$, elle s'écrit

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient la forme classique de l'inégalité de Olga Ladyzhenskaya pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Ceci est équivalent à

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

L'inégalité peut être utilisée pour établir l'existence et l'unicité de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes en deux dimensions pour un domaine borné lisse Ω et des conditions initiales suffisamment régulières¹³. Si l'on utilise un domaine général Ω (éventuellement non borné), alors u doit appartenir à l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Le fait que l'inégalité soit vraie pour un domaine général $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dépendra du domaine en question et des conditions qu'on a imposées.

La preuve d'existence est une preuve qui ne fonctionnerait jamais en trois dimensions, car elle repose sur le fait qu'il y a des exposants "agréables" dans le théorème de plongement de Sobolev qui nous permettent d'obtenir un résultat de régularité pour la dérivée temporelle de u :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V^*),$$

pour un certain temps long T . Cette régularité permet d'utiliser des solutions faibles des équations de Navier-Stokes comme fonctions test dont l'unicité est relativement facile à prouver. La première étape de la preuve est de dire qu'une fonction u est une solution faible des équations de Navier-Stokes si elle satisfait

$$\int_0^s -(u, \partial_t \phi) + \int_0^s (\nabla u, \nabla \phi) + \int_0^s ((u \cdot \nabla)u, \phi) = \langle u_0, \phi(0) \rangle - (u(s), \phi(s)),$$

où u_0 est une condition initiale et ϕ est une fonction test dans un espace approprié. On pose alors w comme la différence entre deux solutions avec la même condition initiale et on la substitue comme

10. Lev Landau, Evgeny Lifschitz, Fluid Mechanics, Pergamon, 2013.

11. Constantine Pozrikidis, Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow, Cambridge University Press, 1992.

12. Olga Ladyzhenskaya, *Solution "in the large" of the nonstationary boundary value problem for the NavierStokes system in two space variables*. Comm. Pure Appl. Math. 12, 427–433 (1959).

13. Jacques-Louis Lions, Giovanni Prodi, *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de NavierStokes en dimension 2*. C. R. Acad. Sci. Paris 248, 3519–3521 (1959).

fonction test¹⁴. Le théorème de plongement de Sobolev est un résultat de base dans la théorie des espaces de Sobolev. Commençons par un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ (c'est-à-dire l'espace de toutes les fonctions u dans $L^p(\Omega)$ dont les premières dérivées faibles existent et sont également dans $L^p(\Omega)$). Le théorème peut être énoncé en plusieurs parties selon que $p < d$, $p = d$ ou $p > d$. Si $p < d$, u est dans l'espace $L^{p^*}(\Omega)$ où

$$p^* = \frac{dp}{d-p},$$

et il existe une constante positive dépendant de p et du domaine telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Si $p = d$, alors u est dans $L^q(\Omega)$ pour q entre 1 et ∞ et

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Si $p > d$, alors u est dans $C(\Omega)$ et

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Ceci est équivalent à l'énoncé que pour $1 \leq p < n$ et p^* défini comme ci-dessus, il y a un plongement continu

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega).$$

Il existe également des résultats similaires pour les plongements d'espaces de Sobolev connus sous le nom de théorème de Morrey et de théorème de Rellich-Kondrachov¹⁵. Dans l'étude des schémas aux différences finies, il existe des théorèmes de plongement pour les fonctions de grille qui sont les analogues des théorèmes que nous avons énoncés ci-dessus.

Olga Ladyzhenskaya a été une figure clé dans l'introduction de la rigueur mathématique dans l'étude de la dynamique des fluides et a été en partie responsable de l'élévation de la dynamique des fluides mathématique à son statut actuel de branche des mathématiques, plutôt que de la physique ou de l'ingénierie. L'expérience nous dit qu'un écoulement stationnaire incompressible est stable tant que le nombre de Reynolds est assez faible, et que l'écoulement devient turbulent une fois que le nombre de Reynolds dépasse un certain seuil. On peut montrer avec plus de rigueur que, étant donné une solution stationnaire v_S des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sur un domaine borné, une autre solution v avec des données initiales régulières approchera la solution stationnaire avec une vitesse exponentielle

$$v - v_S = O(e^{-\alpha t}),$$

si ce que nous définissons comme le nombre de Reynolds généralisé est inférieur à 1 :

$$\text{Re}^* = \frac{2v_s}{v\sqrt{\lambda_1(\Omega)}},$$

où v est la viscosité, λ_1 est la première valeur propre du laplacien de Dirichlet sur le domaine, et v_* est la vitesse caractéristique. Étonnamment, le paramètre α qui fixe le taux de convergence

14. James Robinson, José Rodrigo, Witold Sadowski, The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations, Cambridge University Press, 2016.

15. Filip Rindler, Calculus of Variations (Cham, Switzerland : Springer, 2018).

vers la solution stationnaire peut être exprimé en fonction des quantités ci-dessus, dont l’une est une quantité traditionnelle en physique et l’autre est inhabituelle dans la dynamique des fluides classique plus expérimentale¹⁶ :

$$\alpha = v\lambda_1(\Omega)(1 - \text{Re}^*).$$

Ce nombre de Reynolds est à distinguer des autres quantités “étoilées” dans la littérature, qui se réfèrent généralement à une quantité sans dimension qui a été mise à l’échelle d’une certaine manière : par exemple, on pourrait multiplier le nombre de Reynolds par $\sin \beta$ pour un problème lié à un film liquide tombant sur une pente, où β est l’angle d’inclinaison¹⁷ :

$$\text{Re}^* = \text{Re} \sin \beta.$$

Une dernière idée qui mérite d’être mentionnée est la modélisation de l’écoulement turbulent via une EDP stochastique connue sous le nom de modèle de Olga Ladyzhenskaya : bien sûr, l’idée que l’on pourrait modéliser la turbulence ou les fluctuations thermiques dans un écoulement en utilisant une EDP avec des termes stochastiques est maintenant devenue courante en physique mathématique. Le modèle de Olga Ladyzhenskaya s’écrit

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \eta(t, x),$$

$$\text{div } u = 0,$$

où $\eta(t, x)$ est un bruit additif¹⁸. Ce modèle a été étudié par de nombreux auteurs, et il a été prouvé que des solutions existent et sont uniques pour le cas tridimensionnel¹⁹.

16. Olga Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, 1969.

17. Fabian Denner, Marc Pradas, Alexandros Charogiannis, Christos Markides, Berend van Wachem, Serafim Kalliadasis, *Self-similarity of solitary waves on inertia-dominated falling liquid films*. Phys. Rev. E 93, 033121 (2016).

18. Olga Ladyzhenskaya, *New equations for the description of the viscous incompressible fluids and solvability in the large of the boundary value problems for them*, in Boundary value problems of mathematical physics V, (Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1970).

19. Olga Ladyzhenskaya, *On finding the minimum global attractors for the Navier-Stokes equations and other PDE*. Uspechi Math. Nauk. 42, n. 6, 25–60 (1987).