

Olga Oleinik

Olga Oleinik a reçu de nombreux prix et était connue pour ses réalisations vastes et variées dans plusieurs domaines des mathématiques, y compris la théorie des EDP, la théorie des couches limites et la théorie de l'élasticité. La première équation de l'élasticité est la loi de Hooke. Celle-ci peut s'écrire sous forme tensorielle ainsi :

$$u_{ik} = \frac{\delta_{ik}\sigma_{ll}}{9K} + \frac{\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right)}{2\mu}.$$

Ceci permet d'écrire le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes, où le tenseur des contraintes est le tenseur de rang deux défini de telle sorte que la force sur un volume peut s'écrire comme

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k.$$

$\sigma_{ik} df_k$ est la i -ème composante de la force sur l'élément de surface df . La composante ik du tenseur des contraintes représente la i -ème composante de la force sur une unité de surface perpendiculaire à l'axe x_k . Dans le cas où le corps subit une compression uniforme sur tous ses côtés, le tenseur des contraintes devient

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik},$$

de sorte que ses composantes non nulles sont égales à la pression.

Le carré de la distance entre deux points après déformation peut s'écrire

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l, \\ &= dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k, \end{aligned}$$

où dl est la distance entre les deux points avant la déformation et u_i est le vecteur déplacement pour le déplacement d'un point dû à une déformation. Le tenseur symétrique de rang deux u_{ik} est connu sous le nom de tenseur des déformations et est défini comme

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

En supposant que les déformations sont petites, le module de compression K peut s'écrire

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

La quantité K^{-1} est connue sous le nom de coefficient de compression. La loi de Hooke est applicable à la plupart des déformations élastiques, car la plupart des déformations ne cessent d'être élastiques qu'à un point où la loi de Hooke donne encore une approximation étonnamment bonne. Il existe cependant quelques matériaux déformables bien connus comme le caoutchouc pour lesquels

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

ce n'est pas le cas.

Une autre propriété de base est le module d'Young. Si l'on considère une simple extension ou compression d'une tige le long de l'axe z , on peut voir en considérant l'équation qui relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes que seules les composantes diagonales de la déformation sont non nulles. Les composantes restantes sont données par

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p,$$

où μ est l'un des coefficients de Lamé dans le développement du second ordre de l'énergie libre en puissances de u_{ik} (un niveau d'approximation approprié pour décrire l'énergie libre d'un corps isotrope déformé) :

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \lambda u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2.$$

La composante longitudinale u_{zz} donne l'allongement relatif de la tige lorsqu'elle est étirée dans les deux sens. L'inverse du coefficient de p est appelé le module d'Young E , donc on peut écrire

$$u_{zz} = \frac{p}{E},$$

où

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}.$$

Les composantes u_{xx} et u_{yy} donnent les compressions de la tige dans la direction transverse. Le rapport de la compression transverse à l'extension dans la direction longitudinale (plus généralement, de la déformation transverse à la déformation longitudinale) est connu sous le nom de coefficient de Poisson :

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz},$$

où

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}(3K - 2\mu)}{3K + \mu}.$$

Ce rapport est généralement compris entre 0 et 0,5 pour les matériaux réels. Le caoutchouc a un coefficient de Poisson presque égal à 0,5, correspondant à un module d'Young petit par rapport au module de compression.

Les déformations sont souvent accompagnées d'un changement de température, il faut donc tenir compte du fait que la température d'un corps subissant une déformation n'est pas constante. On peut cependant simplifier considérablement les choses en supposant que le transfert de chaleur d'une partie du corps à l'autre par conduction est très lent. Dans ce cas, la forme générale des équations du mouvement peut être écrite en utilisant les lois de Newton, et on peut écrire les équations pour un milieu élastique isotrope :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \nabla(\text{div} \mathbf{u}).$$

Isotrope signifie que le comportement en déformation du matériau ne dépend pas de son orientation : la réponse contrainte-déformation d'un échantillon du matériau est la même lorsqu'elle est mesurée

dans n'importe quelle direction. Dans le cas de l'élasticité linéaire où les déformations sont petites, les mouvements sont des ondes élastiques. Comme exemple simple, considérons une onde plane dans un milieu isotrope infini. À partir des équations ci-dessus, on obtient des équations du mouvement qu'on peut reconnaître comme des équations d'onde unidimensionnelles

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0,$$

où

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}.$$

sont les vitesses de propagation. On peut en déduire qu'une onde élastique (une onde sonore, par exemple) est fondamentalement deux ondes qui se propagent indépendamment. L'onde dont le déplacement est dans la direction de propagation avec une vitesse c_l est l'onde longitudinale, et l'onde dont le déplacement est dans un plan perpendiculaire au vecteur déplacement est l'onde transverse avec une vitesse c_t . La vitesse de l'onde longitudinale est toujours supérieure à celle de l'onde transverse, puisqu'on peut voir que

$$c_l > \sqrt{\frac{4}{3}} c_t.$$

Il est également possible de considérer la propagation des ondes élastiques dans des milieux anisotropes, par opposition aux milieux isotropes. Dans ce cas, la réponse contrainte-déformation dépend de l'orientation de l'échantillon. Un exemple de milieu anisotrope serait un cristal. Les équations du mouvement deviennent maintenant

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l},$$

où λ_{iklm} est un tenseur symétrique désignant les modules d'élasticité adiabatiques. Si l'on considère une onde élastique monochromatique dans un milieu anisotrope, on cherche une solution des équations du mouvement de la forme

$$u_i = u_{0i} e^{i(kr - \omega t)}.$$

En substituant une solution de cette forme dans les équations du mouvement, on obtient

$$(\rho \omega^2 \delta_{im} - \lambda_{iklm} k_k k_l) u_m = 0.$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes pour les composantes inconnues des déplacements. Ces équations n'ont de solutions non triviales que lorsque le déterminant des coefficients s'annule, donc on doit avoir une équation pour la relation entre la fréquence de l'onde et le vecteur d'onde :

$$|\rho \omega^2 \delta_{im} - \lambda_{iklm} k_k k_l| = 0.$$

Cette relation est connue sous le nom de relation de dispersion. Si l'on trouve les racines de l'équation et qu'on les replace dans les équations du mouvement, on peut résoudre ces équations pour trouver les directions du vecteur déplacement dans les ondes en question. Ces directions sont appelées les directions de polarisation. On voit que les directions de polarisation des ondes d'onde sont

perpendiculaires à un même vecteur¹.

Jusqu'à présent, on a considéré des milieux élastiques homogènes. Cependant, il est également possible d'avoir des milieux inhomogènes (Olga Oleinik a en fait étudié des milieux fortement inhomogènes). Dans le cas non homogène, il y a une variation spatiale des propriétés élastiques. Les milieux élastiques dans un cadre géophysique sont généralement inhomogènes, car les propriétés élastiques du matériau dépendent de la profondeur. Rappelons que la loi de Hooke stipule que chaque composante du tenseur des contraintes est linéairement reliée à chaque composante du tenseur des déformations. Cela peut s'écrire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

où C_{ijkl} est un tenseur d'élasticité. Dans le cas inhomogène, ce tenseur dépend évidemment des coordonnées, donc on a plutôt

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_m)e_{kl}.$$

Cela complique considérablement les équations du mouvement, donc on formule généralement des problèmes qui peuvent être résolus analytiquement en supposant que la variation spatiale des propriétés élastiques prend une forme simple. On peut, par exemple, supposer que l'inhomogénéité peut être capturée par une variation linéaire des modules d'élasticité :

$$C_{ij}(x) = C_{ij}^0(1 + ax).$$

Quelques exemples de problèmes d'élasticité inhomogène qui peuvent être résolus sont la traction uniaxiale d'une feuille inhomogène ou la torsion d'un cylindre inhomogène².

Olga Oleinik s'intéressait aux problèmes mathématiques qui se posent dans la théorie de l'élasticité, tels que le comportement asymptotique des fonctions propres et des valeurs propres des problèmes aux limites qui décrivent des corps élastiques inhomogènes. En particulier, elle a souvent considéré des techniques issues d'un ensemble de théories connu sous le nom d'homogénéisation. Par exemple, elle a trouvé des formules pour l'homogénéisation de problèmes aux limites pour un système d'élasticité linéaire avec des coefficients périodiques qui oscillent rapidement (y compris l'homogénéisation de problèmes aux limites dans des domaines perforés) et elle a prouvé des estimations pour la différence entre le vecteur déplacement, le tenseur des contraintes et l'intégrale d'énergie d'un corps élastique fortement inhomogène, ainsi que les caractéristiques du corps décrit par le système homogénéisé³. Le problème le plus simple à considérer est peut-être celui de l'homogénéisation d'opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients périodiques. Commençons par une matrice périodique $\mathbf{A}(x)$, où x est un tupled'éléments réels. Les éléments doivent également être bornés et satisfaire une condition d'ellipticité

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_1|\xi|^2, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Si on inclut un paramètre ϵ , alors la matrice

$$\mathbf{A}^\epsilon(x) = \mathbf{A}(\epsilon^{-1}x)$$

1. Lev Landau et Evgeny Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Butterworth-Heinemann, 1999.

2. Martin Sadd, *Elasticity : Theory, Applications, and Numerics*, Academic Press, 2009.

3. Olga Oleinik, A. S. Shamaev et G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North Holland, 1991.

caractérise un milieu qui, en termes physiques, a une microstructure inhomogène. Trouver les paramètres implique de résoudre quelques équations différentielles, mais les coefficients de ces équations sont donnés par des fonctions qui oscillent rapidement. En termes physiques, on cherche à réduire le milieu à quelque chose qui est effectivement homogène : en termes formels, cela revient à homogénéiser la matrice et les équations différentielles.

Une matrice définie positive constante $\mathbf{A}^0$ est la matrice homogénéisée pour $\mathbf{A}$ si pour un domaine borné $Q \subset \mathbb{R}^m$ et pour tout $f \in H^{-1}(Q)$, les solutions u^ϵ du problème de Dirichlet

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}^\epsilon \nabla u^\epsilon) = f, \quad u^\epsilon \in H_0^1(Q),$$

convergent comme suit :

$$u^\epsilon \rightarrow u^0, \quad \mathbf{A}^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightarrow \mathbf{A}^0 \nabla u^0,$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. La convergence est dans la norme H_0^1 pour la première et dans la norme L^2 pour la seconde. u^0 est la solution du problème de Dirichlet associé :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}^0 \nabla u^0) = f, \quad u^0 \in H_0^1(Q).$$

Cette équation est appelée l'équation homogénéisée, et $\operatorname{div}(\mathbf{A}^\epsilon \nabla)$ est un opérateur homogénéisé. Les champs vectoriels sont

$$\mathbf{A}^\epsilon \nabla u^\epsilon = \mathbf{p}^\epsilon, \quad \mathbf{A}^0 \nabla u^0 = \mathbf{p}^0.$$

L'exemple le plus simple qu'on peut considérer consiste à prendre pour Q l'intervalle unité. Dans ce cas, on a

$$\frac{d}{dx} \left(a(\epsilon^{-1}x) \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = f, \quad u^\epsilon \in H_0^1([0, 1]).$$

Après quelques calculs, on peut montrer que u^0 résout un problème de Dirichlet

$$\frac{d}{dx} \left(\langle a^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^0}{dx} \right) = f, \quad u^0 \in H_0^1([0, 1]).$$

Donc le coefficient homogénéisé peut être calculé comme étant égal à

$$a^0 = \langle a^{-1} \rangle^{-1}.$$

On a donné un exemple d'homogénéisation en termes du problème de Dirichlet, mais il pourrait évidemment être remplacé par un problème de Neumann (ou tout autre type de problème aux limites) avec une description appropriée de l'homogénéisation. Pour d'autres types de problèmes aux limites, on obtient un résultat pour la convergence des flux qui implique une règle d'homogénéisation. La règle dit que si $\mathbf{v} \in L_{\text{pot}}^2(\cdot)$ et si $\mathbf{A}\mathbf{v} \in L_{\text{pot}}^2(\cdot)$, alors

$$\mathbf{A}^0(\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{v}).$$

Cette règle simplifie le calcul de la matrice homogénéisée ⁴.

4. S. M. Kozlov, Olga Oleinik et Vasilii Jikov, Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, 1994.

Olga Oleinik a également travaillé sur la théorie des couches limites. Prandtl a observé que lorsqu'on considère un écoulement autour d'une région avec une frontière solide, il faut penser à la fine couche limite qui existe entre la surface et le reste du fluide dans l'écoulement : on peut la considérer comme la couche où la surface influence l'écoulement. Par exemple, si l'on a un écoulement non visqueux autour d'un objet gouverné par les équations d'Euler, les contraintes de cisaillement dues à la viscosité deviendront clairement non négligeables lorsqu'on s'approche de la frontière, donc l'écoulement deviendra visqueux dans cette région. Nous ne définirons pas le nombre de Reynolds ici, mais on pourrait le considérer comme une quantité qui est plus élevée lorsque la viscosité est plus faible. La majeure partie de la région de l'écoulement où la viscosité peut être négligée est appelée l'écoulement externe non visqueux et la région très mince près de la paroi où la viscosité est incluse est connue sous le nom de couche limite.

Le cas le plus simple par lequel on peut commencer consiste à considérer les couches limites lorsque l'écoulement est laminaire (c'est-à-dire régulier et non turbulent). Pour simplifier, prenons un fluide stationnaire bidimensionnel et incompressible dans le plan xy sans forces de volume dues à la gravité ou similaires, tel que le fluide s'écoule sur une plaque plane fixe avec une incidence nulle. L'image visuelle à avoir dans ce cas est celle d'une distribution de vitesse constante perpendiculaire à la plaque plane où l'écoulement frappe le bord d'attaque, avec une couche de particules ralentie par frottement. Cette couche s'agrandit à mesure que l'on s'éloigne du bord au point de contact. D'après cette image, il semble que le profil de la couche limite pourrait être donné comme une fonction monotone croissante de x . Il faut souligner que la transition de l'écoulement externe non visqueux à l'écoulement de la couche limite est continue, de sorte qu'il n'y a pas en réalité de frontière identifiable, et lorsqu'on parle de l'épaisseur de la couche, on parle d'une couche définie arbitrairement. Une façon raisonnable de définir la frontière serait de placer son emplacement au point où la vitesse interne atteint un certain pourcentage de la vitesse de l'écoulement externe loin de la plaque : 99%, par exemple⁵.

L'équation de continuité est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Les équations de Navier-Stokes deviennent

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

La première chose qu'on aimerait faire est de rendre ces équations sans dimension. Cela peut être fait en effectuant quelques substitutions.

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{\delta}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{vL}{U\delta}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2},$$

où L est la longueur de la plaque, où δ est une petite distance utilisée pour quantifier l'épaisseur de la couche limite et où U est l'amplitude de l'écoulement uniforme dans le courant libre. En utilisant

5. Hermann Schlichting et Klaus Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Springer-Verlag, 2017.

ces substitutions, on obtient

$$\frac{\delta^2}{L^2} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho LU} \left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right),$$

$$\frac{\delta^2}{L^2} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu}{\rho LU} \left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right).$$

Si on définit l'épaisseur de la couche limite en fonction d'un pourcentage de la vitesse externe, on peut utiliser ce nombre comme indice pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, donc dans le cas de 99%, on peut écrire δ_{99} . Puisqu'on suppose que l'épaisseur de la couche limite est extrêmement petite par rapport à la longueur de la plaque, on doit avoir

$$\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}.$$

Les autres termes auront un ordre de grandeur similaire tant que le nombre de Reynolds est grand, ce qui signifie que

$$\frac{\delta}{L} = O\left(\text{Re}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Si on substitue ceci dans la deuxième équation et si on néglige les termes d'ordre supérieur dans les nombres de Reynolds, on obtient

$$-\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0.$$

Après avoir rendu les dimensions, on retrouve

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Ceci s'intègre en

$$p = C(x),$$

puisque la dérivée du membre de gauche n'est calculée que par rapport à y , donc la constante qu'on obtient peut encore dépendre de l'autre coordonnée spatiale. Par conséquent, si on reste dans la couche limite, les équations de Navier-Stokes se réduisent à une équation

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

On a également l'équation de continuité comme précédemment :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

En considérant les équations de Navier-Stokes originales et en prenant la limite lorsque y devient grand, on obtient

$$\rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx}.$$

En substituant ceci, on obtient l'équation du mouvement pour le fluide dans la couche limite (plus l'équation de continuité)⁶.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

On a déjà écrit une estimation approximative de l'épaisseur de la couche limite laminaire de la plaque. Qualitativement, notre équation pourrait également suggérer que la couche limite deviendra plus étroite lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. Une meilleure estimation peut être obtenue en partant du fait que les forces d'inertie et de frottement sont en équilibre dans la couche limite. Pour une plaque de longueur x , on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} \propto \frac{U_\infty}{x},$$

où U_∞ est la vitesse de l'écoulement externe. Cela signifie que la force d'inertie a un ordre de grandeur $\rho U_\infty^2 / x$. La force de frottement par unité de volume est égale à $\partial \tau / \partial y$, où τ est la contrainte de cisaillement. Pour un écoulement laminaire, ceci est égal à $\mu \partial^2 u / \partial y^2$. Cependant, $\partial u / \partial y$ est juste le gradient de vitesse perpendiculaire à la plaque et il est de l'ordre de U_∞ / δ , donc pour la force de frottement, on doit avoir la relation

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} \sim \frac{\mu U_\infty}{\delta^2}.$$

Les forces d'inertie et de frottement sont en équilibre, donc on a

$$\frac{\mu U_\infty}{\delta^2} \sim \frac{\rho U_\infty^2}{x}.$$

En réarrangeant pour l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}},$$

en utilisant la définition de la viscosité cinématique.

On doit encore déterminer la valeur numérique exacte qui multiplie le membre de droite, mais cela peut être fait en considérant la solution de Blasius pour le profil de vitesse de la couche limite. En supposant le chiffre de 99% pour la vitesse comme précédemment, on obtient

$$\delta_{99}(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}.$$

Le rapport de l'épaisseur à la longueur de la plaque est alors

$$\frac{\delta_{99}(x)}{l} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Comme précédemment, on peut voir que l'estimation prédit une épaisseur de couche limite décroissante lorsque le nombre de Reynolds augmente. Cependant, on peut maintenant voir quantitativement que l'épaisseur de la couche limite croît proportionnellement à $\sqrt{x}$, et la fonction racine carrée

6. The Open University, Mathematical Methods and Fluid Mechanics IV, Milton Keynes : The Open University, 2009.

est une fonction monotone croissante comme on l'avait prédit. Il est raisonnablement évident de montrer que la racine carrée est monotone croissante, puisque si $\Delta x = x' - x > 0$, alors

$$\Delta f(x) = \sqrt{x'} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x'} - \sqrt{x})(\sqrt{x'} + \sqrt{x})}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} = \frac{x' - x}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}}.$$

Mais nous venons de dire que $x' - x$ est strictement positif, donc ceci doit également être strictement positif⁷. En fait, le nombre de Reynolds croît également comme $\sqrt{x}$.

On a introduit l'épaisseur de couche limite δ de manière arbitraire, mais il existe également une manière plus formelle de quantifier l'épaisseur, donnée par ce qu'on appelle l'épaisseur de déplacement.

$$\delta_1(x) = \frac{1}{U} \int_0^\infty (U - u) dy.$$

C'est la distance dans la direction y dont la frontière de la plaque doit être déplacée pour obtenir le même débit moyen que celui de l'écoulement non visqueux : elle quantifie la distance dont les lignes de courant associées à l'écoulement externe non visqueux sont déplacées par la couche limite. δ_1 peut être obtenue à partir de l'équation intégrale de quantité de mouvement (une version intégrale des équations de la couche limite) :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2},$$

où τ_0 est la contrainte de cisaillement à la surface

$$\tau_0 = \nu \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

δ_2 est connue sous le nom d'épaisseur de quantité de mouvement. Celle-ci est définie comme l'épaisseur d'une couche de l'écoulement externe qui a un débit de quantité de mouvement égal à la réduction du débit de quantité de mouvement causée par la présence de la couche limite.

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} (U - u) dy.$$

Dans le cas d'un écoulement laminaire sur une plaque plane, l'équation intégrale de quantité de mouvement se réduit à⁸

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}.$$

Pour un écoulement sur une plaque, le rapport de δ_1 à la longueur l devient

$$\frac{\delta_1(x)}{l} = \frac{1.721}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Olga Oleinik a également fait des travaux fondamentaux sur les solutions faibles des EDP non linéaires. Par exemple, elle a montré que la méthode de la viscosité évanescence pouvait être utilisée

7. Hermann Schlichting et Klaus Gersten, Boundary-Layer Theory, Springer-Verlag, 2017.

8. The Open University, Mathematical Methods and Fluid Mechanics IV, Milton Keynes : The Open University, 2009.

pour construire une solution faible d’une EDP non linéaire⁹. Une solution de viscosité évanescence est un type de solution de viscosité. Olga Oleinik a prouvé l’existence, l’unicité et la stabilité globale des solutions de viscosité évanescence pour une dimension spatiale et une loi de conservation scalaire¹⁰. Ces travaux sur les solutions faibles étaient étroitement liés à son intérêt pour l’élasticité et les EDP qui se posent dans le cadre de la mécanique¹¹. Dans le contexte de la théorie des couches limites, Olga Oleinik a prouvé l’existence globale de solutions classiques pour l’équation de Prandtl stationnaire bidimensionnelle modélisant les écoulements de couche limite pour une classe de données positives et a suggéré comme problème ouvert qu’il serait intéressant d’étudier la structure locale de la solution du problème de Prandtl près du point de séparation, où la couche limite se sépare¹².

9. Olga Oleinik, *Construction of a generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation of first order by the introduction of “vanishing viscosity”*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 14 (2(86)), 159–164 (1959).

10. Olga Oleinik, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. 26, 95–172 (1963).

11. Olga Oleinik, *On the uniqueness of the generalized solution of the Cauchy problem for a nonlinear system of equations occurring in mechanics*, Usp. Mat. Nauk. 12, 169–176 (1957).

12. Olga Oleinik et V. N. Samokin, *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*, Chapman et Hall, 1999