

Sofia Kowalevskaja

Sofia Kovalevskaja était une mathématicienne russe du XIXe siècle, connue principalement pour ses réalisations en mécanique et dans la théorie des EDP. Elle a obtenu des qualifications et occupé un certain nombre de postes traditionnellement réservés aux hommes et a été parmi les premières femmes à travailler comme rédactrice d’une revue scientifique¹. Sa contribution mathématique la plus substantielle est probablement le théorème de Cauchy-Kovalevskaja, qui appartient à la théorie des EDP. Les EDP (équations aux dérivées partielles) sont des équations qui modélisent le taux de variation d’une quantité par rapport à deux ou plusieurs autres quantités qui varient également, tandis que les EDO (équations différentielles ordinaires) modélisent le taux de variation par rapport à une seule quantité (généralement une variable temporelle). Toute la science, l’ingénierie et les mathématiques appliquées dépendent des équations différentielles. Les EDP ont été initialement créées comme des outils pour décrire des phénomènes physiques tels que le mouvement des ondes et le flux de chaleur (rôle qu’elles jouent encore), mais au fil du temps, la théorie des EDP s’est également développée dans une autre direction pour devenir une branche riche de la théorie mathématique en soi (sans perdre complètement de vue l’origine physique des équations).

Un exemple célèbre et bien étudié est l’équation d’onde unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

On voit qu’il n’y a pas de dérivées mixtes dans cette expression (c’est-à-dire des dérivées par rapport à plus d’une variable), mais il faut également souligner que des dérivées mixtes peuvent en fait apparaître dans des équations qui modélisent des processus physiques : il existe des versions de l’équation de diffusion qui contiennent des termes de dérivées mixtes, par exemple. Un développement très intéressant du xxe siècle a été l’idée que l’on pourrait “affaiblir” la notion de solution pour obtenir des solutions faibles là où notre idée traditionnelle d’une solution n’existe pas : ceci est plutôt surprenant du point de vue de la théorie classique des EDP, car l’intuition physique semblerait nous dire que la notion de solution doit être concrète et ne peut pas être affaiblie de cette manière.

Essentiellement, on prend une EDP et on la réécrit sous une forme “faible” : une solution de cette équation est appelée une solution faible de l’EDP originale. Une solution forte est automatiquement une solution faible, mais il n’est malheureusement pas toujours évident qu’une solution faible doive également être forte. Soulignons que le fait de réécrire une équation n’est pas nécessairement en soi un acte profond. La notion d’avoir une équation ou une solution avec des types particuliers d’opérateurs et de la réécrire pour que ces opérateurs n’apparaissent pas est assez courante et triviale.

Comme exemple, on peut obtenir une solution fondamentale à un système particulier d’équations modélisant un écoulement de gaz dilué, où la solution représente la pression physique due à un gaz :

$$p = -\mathbf{f} \cdot \nabla \phi + \mathbf{G}(\nabla \nabla \phi) - \frac{8\gamma_2^2 \text{Kng}}{15} \mu_{\gamma_2} + \mathbf{G}(\nabla \nabla \mu_{\gamma_2}),$$

Traduction des pages 169 à 178 de l’article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Ann Koblitz, A Convergence of Lives : Sofia Kovalevskaya : Scientist, Writer, Revolutionary, Rutgers University Press, 1993).

où $\mathbf{G}$ est un 2-tenseur symétrique arbitraire sans trace, ϕ est la solution fondamentale de l'EDP connue sous le nom d'équation de Laplace (dérivée essentiellement en considérant les symétries que la solution doit avoir), μ_{γ_2} est la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz (similaire à l'équation de Laplace) et Kn est un paramètre sans dimension similaire au nombre de Reynolds². On note l'apparition répétée de l'opérateur ∇ , connu sous le nom de “nabla” ou “gradient”. En utilisant la définition de ∇ comme opérateur différentiel, c'est une opération triviale de réécrire le terme de pression pour qu'il n'inclue plus nabla :

$$p = \mathbf{f} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \right) + G_{ij}r_i r_j \left(\frac{3}{4\pi|\mathbf{r}|^5} \right) - \frac{40}{6\text{Kn}} \frac{g}{15} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} e^{-\gamma_2 r} \\ + G_{ij}r_i r_j \frac{e^{-\gamma_2 r} (5|\mathbf{r}| + 3\text{Kn}(6\text{Kn} + \sqrt{30}|\mathbf{r}|))}{24\text{Kn}^2 \pi |\mathbf{r}|^5}.$$

Cela semble un peu plus en désordre, mais l'opérateur différentiel n'apparaît plus et il pourrait donc être plus rapide de traiter la solution avec un ordinateur. Cependant, dans ce cas, il y a quelque chose de plus puissant en jeu, car la reformulation que nous proposons nous permet de conserver une notion de solution de l'équation, même si elle ne peut pas être dérivée un nombre suffisant de fois pour être comptée comme une solution classique !

En quelque sorte, une technique variationnelle est utilisée pour trouver l'existence de solutions. Comme exemple le plus simple possible de ce qu'on appelle la théorie “elliptique”, on prend une EDP elliptique standard du second ordre telle que l'équation de Poisson définie pour un problème de valeur limite sur une boule tridimensionnelle B et on la réécrit comme :

$$\int_B -\Delta u \cdot \phi dx = \int_B f \cdot \phi dx,$$

où ϕ appartient à $C^\infty(B)$ et u résout l'EDP originale. Le fait que cette reformulation soit équivalente à l'EDP que nous avons auparavant est dû à ce qu'on appelle le lemme fondamental du calcul des variations. L'étape suivante est d'intégrer par parties pour obtenir

$$\int_B -\Delta u \cdot \phi = \int_B Du \cdot D\phi(u, \phi)_{H_0^1},$$

où D est le vecteur gradient des dérivées et nous avons défini un nouveau produit scalaire à l'étape finale. De même, dans un argument variationnel différent, on peut trouver une fonction $\bar{u}$ qui minimise une fonctionnelle d'énergie similaire à l'énergie de Dirichlet sur l'espace des fonctions admissibles :

$$\epsilon[u] \int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

et ensuite déduire du résultat suivant (la forme faible de l'équation de Laplace) d'une part $\int_\Omega \nabla \bar{u} \cdot \nabla v d\mathbf{x} = 0$ et d'autre part, déduire également le lemme fondamental du calcul des variations qui dit que $\bar{u}$ satisfait l'équation de Laplace³. L'intérêt de cette reformulation est qu'elle a un sens même si u n'est pas dans C^2 et ne peut pas être dérivée deux fois, alors que la théorie classique dit que

2. Rory Claydon, Abhay Shrestha, Anirudh Rana, James Sprittles and Duncan Lockerby, *Fundamental solutions to the regularised 13-moment equations : efficient computation of three-dimensional kinetic effects*. Journal of Fluid Mechanics, 833, R4 (2017).

3. Michael Renardy and Robert Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 2004.

nous devons pouvoir dériver la solution deux fois par définition. On définit alors une fonctionnelle linéaire L qui envoie $C_0^\infty(B)$ vers $\mathbb{R}$ comme suit :

$$L(\phi) = \int_B f \cdot \phi dx.$$

On peut voir qu'il s'agit d'une fonctionnelle linéaire bornée en utilisant une inégalité standard (l'inégalité de Friedrichs-Poincaré). Un opérateur linéaire T entre deux espaces normés X et Y est dit borné si la norme de $T(x)$ est inférieure ou égale à une constante non négative multipliée par la norme de x .

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Dans notre reformulation faible, nous avons maintenant changé le problème de la résolution de l'équation de Poisson en le problème de la résolution de

$$L(\phi) = (u, \phi)_{H_0^1}.$$

On aimerait appliquer le théorème de représentation de Riesz aux fonctionnelles linéaires bornées, mais ce sont des opérateurs bornés sur l'espace $(C_0^\infty(B), (\cdot)_H^1)$, qui n'est pas complet (c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de Cauchy de fonctions dans $C_0^\infty(B)$ qui converge vers une fonction qui n'est pas dans $C_0^\infty(B)$).

Le théorème de Riesz pour la représentation des fonctionnelles sur les espaces de Hilbert stipule que toute fonctionnelle linéaire bornée f sur un espace de Hilbert H peut être représentée de manière simple via le produit scalaire :

$$f(x) = \langle x, z \rangle,$$

où z dépend de f et est déterminé uniquement par f et qu'il a la norme

$$\|f\| = \|z\|.$$

C'est un théorème fondamental d'analyse fonctionnelle⁴. Une manière plus utile de le formuler est que pour un espace de Hilbert H et une fonctionnelle linéaire dans l'espace dual H^* , il existe un élément unique u dans H tel que

$$L(\phi) = (u, \phi)$$

pour tout ϕ dans H . L est alors un isomorphisme isométrique linéaire de l'espace dual vers l'espace de Hilbert original.

Un exemple d'application du théorème serait les flots de gradient. On commence avec une fonctionnelle linéaire f qui envoie un espace X vers $\mathbb{R}$. Si on complète cet espace en un nouvel espace $\widehat{X}$ en le munissant d'un produit scalaire et en prenant l'adhérence, alors f vit dans l'espace dual $(\widehat{X})^*$. Rappelons que les espaces de Hilbert sont complets par définition. La représentation de Riesz nous dit que

$$f(x) = \langle \nabla f, x \rangle,$$

pour tout x dans $\widehat{X}$ et tout ∇f dans $(\widehat{X})^*$. Évidemment, ce produit scalaire pourrait être le produit scalaire L^2 , selon l'espace de Hilbert. f peut toujours s'écrire comme $\langle \nabla f, x \rangle$ et le fait que f ait

4. Erwin Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, 1978).

un gradient signifie simplement que $\nabla f \in X$. Un flot de gradient L^2 est alors un flot associé au champ de vecteurs gradient L^2 d'une fonctionnelle (précisons que le flot de gradient dépend de la fonctionnelle). Pour un exemple issu de la géométrie différentielle, on peut prendre une application continue surjective π d'un espace topologique E vers une variété orientable compacte M . Ce type d'application est appelé une application de fibré et on munit la variété d'une métrique de fibré associée $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Dans ce cas, le produit scalaire L^2 doit envoyer M vers $\text{Sym}^2(T^*M)$, donc il prend la forme

$$\langle s, t \rangle_{L^2} = \int_M \langle s(x), t(x) \rangle_E dv(x),$$

où s et t vivent dans l'espace des sections de E . On peut alors définir des flots de gradient de manière analogue.

On a vu qu'on peut toujours compléter un espace, donc la solution est de prendre le complété de $(C_0^\infty(B), (\cdot, \cdot)_{H_0^1})$ et de le voir comme un sous-espace de l'espace bien connu L^2 . Ce complété est noté H_0^1 et puisque l'espace est complet, on peut appliquer le théorème de Riesz pour trouver une solution faible u dans $H_0^1(B)$ en utilisant le fait qu'il existe toujours un u tel que

$$(u, \phi) = L(\phi),$$

où le produit scalaire peut être défini en termes de dérivées faibles et en supposant qu'on peut prouver que la solution faible u est également lisse (ce qui est possible).

Notons également que la définition exacte d'une solution faible peut varier selon le type d'équation et la manière dont on formule le problème. Par exemple, en dynamique des fluides rigoureuse, un champ de vecteurs ν dans $L^2(T^2)$ est défini comme une solution faible des équations d'Euler incompressibles dans $T^3 \times [0, T]$

$$\partial_t \nu + \text{div}(\nu \otimes \nu) + \nabla \phi = 0,$$

$$\text{div} \nu = 0,$$

si pour tout ϕ et tout ψ dans $C_c^\infty([0, T] \times T^2)$ tels que $\text{div} \psi = 0$, on a

$$\int \nu \partial_t \psi + (\nu \otimes \nu) \nabla \psi = 0,$$

$$\int \nu \cdot \nabla \phi = 0,$$

où T^2 est le 2-tore et l'indice c pour C^∞ se réfère au fait que les fonctions ont un support compact⁵. $C_c^\infty(U)$ est un espace fonctionnel particulièrement agréable car toutes les dérivées des fonctions vivant dans cet espace doivent s'annuler au voisinage de la frontière de l'ensemble U et elles doivent également s'annuler dans un certain sens lorsqu'on se rapproche de l'infini. Ces solutions faibles qu'on a définies sont assez différentes des solutions classiques correspondantes qui sont valables ponctuellement dans $C^1(T^3 \times [0, T])$.

5. Alexander Shnirelman, *On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 50, Issue 12, 1261-1286 (1997).

Bien que moins célèbres que leurs cousines, les équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement des fluides visqueux, il y a encore de nombreuses questions mathématiques profondes et intéressantes concernant les équations d'Euler. L'une d'entre elles (prouvée récemment) est la conjecture d'Onsager. C'est une conjecture technique qui stipule que si ν est une solution faible C^β des équations d'Euler telle que $\beta \in (0, 1)$, alors, lorsque $\beta > 1/3$, on doit avoir $E(t) = c$ pour tout $t \in [0, T]$, où E désigne les équations d'Euler et c est une constante. Si, au contraire, $\beta < 1/3$, alors il doit exister ν tel que E soit non croissante et non constante. Donc, dans un certain sens, la valeur numérique $1/3$ dans l'exposant offre une sorte de basculement. En termes plus physiques, les solutions höldériennes continues des équations d'Euler incompressibles avec un exposant supérieur à $1/3$ doivent conserver l'énergie cinétique totale, tandis que les solutions höldériennes continues avec un exposant inférieur à $1/3$ doivent dissiper l'énergie cinétique totale.

Précisons : en analyse il existe diverses notions de continuité, certaines plus fortes que d'autres. Si U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $\beta \in (0, 1)$, alors une fonction f envoyant U vers $\mathbb{R}$ est uniformément höldérienne continue d'exposant β s'il existe une constante c telle que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\beta$ pour tout x et y dans U . On peut également définir une fonction höldérienne continue d'exposant β comme une fonction qui retourne une valeur finie lorsqu'on lui applique la semi-norme définie pour l'espace de Hölder $C^{0,\beta}$.

$$\|f\|_{C^{0,\beta}(U)} \|f\|_\infty + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta}$$

Dans le cas particulier où $\beta = 1$, la fonction est lipschitzienne⁶. Une fonction f est localement höldérienne continue si elle est uniformément höldérienne continue sur tout sous-ensemble compact de U .

La conjecture est basée sur la théorie de la turbulence de Kolmogorov, donc une preuve de la conjecture donne une forte preuve indirecte en faveur de cette théorie. C'est probablement la théorie la plus célèbre de la turbulence isotrope et les détails devraient se trouver dans un bon livre sur la turbulence. En mots, un écoulement turbulent est formé de tourbillons : le flux d'énergie cascade des grands tourbillons vers les plus petits, où il est dissipé par viscosité⁷. Comme pour de nombreuses conjectures difficiles, la preuve de la conjecture d'Onsager s'étend sur plusieurs décennies et de nombreux articles et lemmes intermédiaires. Des progrès ont été réalisés en utilisant des estimations de mollification et de commutateur, et il a été constaté que l'intégration convexe pouvait être utilisée pour produire un nombre infini de solutions faibles dissipatives bornées d'énergie non constante. L'intégration convexe était une technique utilisée à l'origine par John Nash pour son célèbre théorème de plongement, qui stipule que tout plongement strictement court d'une variété riemannienne dans un espace euclidien peut être approché uniformément par des plongements isométriques C^1 . Une preuve finale a été achevée récemment en utilisant à nouveau l'intégration convexe et en s'appuyant sur les travaux de nombreux autres mathématiciens qui avaient contribué au problème⁸. La stratégie globale consiste à commencer par ce qui est en gros une "sous-solution" du problème, c'est-à-dire une solution d'une version relaxée du problème qui est plus agréable et plus facile à manipuler. On ajoute ensuite itérativement des perturbations à la sous-solution pour obtenir à chaque étape une autre sous-solution plus proche d'une solution réelle. Des estimations

6. Filip Rindler, *Calculus of Variations*, Springer, 2018.

7. Marcel Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

8. Philip Isett, *A proof of Onsager's conjecture*, *Annals of Mathematics*, Vol. 188, Issue 3, 871–963 (2018).

minutieuses sont nécessaires, ce qui implique une convergence vers une solution dans la topologie requise. Les parties d'intégration convexe de la preuve reposent sur des "écoulements Mikado" (ainsi appelés parce que les composantes de l'écoulement ressemblent à des pailles et rappellent donc les biscuits japonais "pocky" vendus sous le nom de Mikado en Europe). La preuve utilise également une technique de "collage d'approximation" à certains moments : par exemple, pour approximer les contraintes de Reynolds avec des pas de temps disjoints lors de la mollification avec le noyau d'intégration.

Dans le domaine de la théorie des EDP, le théorème de Cauchy-Kovalevskaja concerne un type particulier de problème appelé problème de Cauchy. Le problème de Cauchy part de données initiales le long d'une courbe lisse dans $\mathbb{R}^2$ et cherche une solution d'une EDP qui prend les données initiales que nous avons spécifiées sur cette courbe. Si l'EDP est d'ordre n , alors les données de Cauchy sont les valeurs que la variable dépendante peut prendre ainsi que toutes ses dérivées partielles possibles jusqu'à $n - 1$ sur la courbe. Si l'EDP, la courbe lisse et les données de Cauchy peuvent être écrites en termes de fonctions qui peuvent toutes être représentées localement par des séries de puissances convergentes, alors le théorème de Cauchy-Kovalevskaja garantit l'existence d'une solution unique au problème de Cauchy au voisinage d'un point de la courbe lisse, et cette solution peut également être représentée localement par des séries de puissances convergentes (c'est-à-dire qu'elle est analytique). En analyse complexe, le mot "analytique" est généralement remplacé par "holomorphe" lorsqu'on travaille sur les nombres complexes. Ce théorème est une version rigoureuse de l'intuition qu'il devrait y avoir une solution unique à une EDP qui atteint les valeurs spécifiées par les données initiales le long de la courbe lisse et Sofia Kovalevskaja a démontré ce théorème sous sa forme générale. On peut imaginer une série de puissances convergente comme une série de Taylor, mais en la généralisant et en se rappelant qu'une série de Taylor n'a pas besoin de converger. Les éléments ci-dessus concernent une courbe, mais dans le cadre général des EDP à plus de 2 variables, cette courbe serait remplacée par une hypersurface de dimension appropriée⁹.

La méthode de preuve du théorème de Cauchy-Kovalevskaja démontre que le travail de Sofia Kovalevskaja est un résultat d'analyse, car la méthode de Sofia Kovalevskaja repose sur la méthode des séries de puissances convergentes. Dans le domaine des EDO, on est familier avec l'idée d'obtenir des solutions d'équations différentielles en termes de séries de puissances. De la même manière, on peut trouver les fonctions impliquées dans la solution générale d'une EDP en développant la solution comme une série de puissances et en faisant des substitutions pour trouver les coefficients impliqués. Une telle méthode est limitée aux EDP analytiques et aux solutions analytiques qui ont des représentations en séries de puissances convergentes. La stratégie que l'on adopte pour un tel problème "analytique" avec des conditions initiales analytiques est familière en analyse. On calcule toutes les dérivées partielles possibles de la solution de l'EDP à l'origine et on utilise ces dérivées pour trouver le développement en série de Taylor. Le fait que cette série soit ou non une solution raisonnable dépend de sa convergence.

À ce stade, il est utile de prendre l'EDP (qui peut être du second ordre ou plus) et de la convertir en un système canonique du premier ordre. En omettant les détails, on écrit l'EDP comme une fonction de variables particulières, et on considère ensuite ces variables dans l'argument comme de nouvelles fonctions inconnues de deux nouvelles variables indépendantes. Après des manipulations

9. Peter Olver, Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 2016.

avec des intégrales et des dérivées, on aboutit à un système canonique d'EDP quasi-linéaires du premier ordre pour les nouvelles inconnues u_k .

$$\frac{\partial u_j}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^m a_{jk}(u_1, \dots, u_m) \frac{\partial u_k}{\partial \eta}, \quad j = 1, \dots, m$$

Une équation différentielle linéaire est une équation qui est linéaire (c'est-à-dire de degré 1) par rapport à la variable dépendante et à ses dérivées, tandis que “quasi-linéaire” signifie simplement que les dérivées partielles apparaissent linéairement. Elle est dite “canonique” parce que nous avons trouvé $\partial u_k / \partial \xi$ en fonction de u_k et $\partial u_k / \partial \eta$. Les coefficients de ce système ont des représentations en séries de puissances convergentes au voisinage de l'origine ¹⁰.

En fait, on peut prouver le théorème de Cauchy-Kovalevskaja sans passer à un système canonique, mais si l'on suppose que le système canonique est suffisant pour résoudre le problème, on doit alors trouver des développements en série de Taylor autour de l'origine pour les fonctions inconnues u_k . Les coefficients d'une telle série sont trouvés en calculant mécaniquement les dérivées partielles de u_k à l'origine. Pour ce faire, il faut trouver des formules de récurrence pour les dérivées partielles par rapport à la variable ξ (en utilisant les formules de récurrence habituelles par exemple). Les EDP elles-mêmes sont déjà des formules de récurrence de ce type et on peut trouver les dérivées des u_k par rapport à η en différenciant les conditions initiales. Après quelques manipulations supplémentaires, on trouve toutes les dérivées partielles des fonctions u_k et on réalise qu'elles sont toujours positives. Cela permet finalement de prouver la convergence du développement en série

$$u_k(\xi, \eta) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu! \nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} u_k(0, 0)}{\partial \xi^{\mu} \partial \eta^{\nu}} \xi^{\mu} \eta^{\nu}$$

pour les inconnues u_k . On fait cela essentiellement en créant une majorante pour la série ci-dessus en résolvant le problème de valeur initiale canonique qu'on a déjà défini. La majorante est une série convergente de termes positifs, dont chacun est au moins aussi grand en valeur absolue que le terme correspondant dans la solution en série de Taylor ci-dessus. Puisque cette solution résout le problème de valeur initiale par construction, alors le développement ci-dessus doit toujours converger pour ξ et η suffisamment petits.

Cela prouve que le problème canonique a une solution analytique unique au voisinage de l'origine et nous conduit au théorème de Cauchy-Kovalevskaja, qui peut être énoncé comme suit : au voisinage d'un point où les coefficients a_{jk} et les fonctions h_j ont des représentations en séries de puissances, on peut trouver un vecteur unique de composantes u_k qui résout le problème de valeur initiale suivant ¹¹ :

$$u_{\xi} = A(u)u_{\eta}, \quad u(0, \eta) = h(\eta).$$

Les fonctions h_j sont des données analytiques définies comme

$$h_j^{(n)}(0) = \frac{n! M}{\rho^n},$$

10. Paul Garabedian, Partial Differential Equations, Chelsea Publishing Company, 1986.

11. Ibid.

où M est la borne supérieure de la valeur absolue de chaque terme de la série de Taylor et ρ est un nombre positif suffisamment petit. Ce théorème est plus limité qu’il n’y paraît (même si l’on suppose qu’on travaille avec des problèmes où toutes les fonctions sont analytiques), mais il montre bien que si l’on est prêt à se concentrer sur les fonctions analytiques, le nombre de fonctions nécessaires pour une solution générale de l’EDP est toujours le même que l’ordre de l’EDP et que l’EDP a une variable de plus par rapport au nombre de variables dans les arguments des fonctions arbitraires.

Le problème de Cauchy pour le champ gravitationnel joue un rôle clé en relativité générale. On commence avec une hypersurface de type espace M^3 munie d’une métrique g_{ij} et d’un 2-tenseur symétrique k_{ij} appelé la courbure extrinsèque. Le mot “extrinsèque” se réfère au fait qu’on étudie comment une immersion d’un espace dans un espace plus petit courbe et déforme l’espace plus grand à l’intérieur du plus petit. La géométrie intrinsèque étudie les opérations sur une variété qui ne dépendent pas de la manière dont on l’immergeo dans une autre variété¹². Comme exemple, le *Theorema Egregium* de Gauss stipule que la courbure de Gauss d’une sous-variété 2-dimensionnelle (M, g) de $\mathbb{R}^3$ (où g est la métrique “induite” ou héritée de l’espace ambiant dans lequel la variété est plongée) est un invariant d’isométrie locale de (M, g) . En d’autres termes, une surface dans $\mathbb{R}^3$ a un type de courbure appelé courbure gaussienne qui est défini par le fait que la surface est plongée dans $\mathbb{R}^3$, mais cette définition coïncide avec la définition donnée par le tenseur de Riemann, qui ne dépend que de la métrique dont la surface est munie, et la métrique ne se préoccupe pas de l’espace ambiant dans lequel la surface est plongée et ne mesure que la courbure intrinsèque. Par conséquent, la courbure gaussienne ne dépend pas réellement du plongement de la surface dans $\mathbb{R}^3$, et c’est un invariant intrinsèque. C’est un résultat assez beau et remarquable de la géométrie intrinsèque classique¹³.

En relativité générale, la 3-variété avec la métrique et le 2-tenseur est appelée une “donnée initiale” pour les équations d’Einstein (similaire à l’idée de données initiales de la théorie élémentaire des EDP, où il faudrait connaître la distribution de température initiale du corps avant de pouvoir déduire sa température finale à partir de l’équation de la chaleur). Pour le problème de Cauchy, on commence avec une 3-variété N avec des données initiales plus compliquées, et on doit ensuite trouver une 4-variété M , plus un plongement E qui envoie N vers M et une métrique sur M qui satisfait les équations d’Einstein. La métrique doit également coïncider avec les valeurs initiales de $E(N)$ et $E(N)$ doit être une surface de Cauchy pour M , où une surface de Cauchy est une hypersurface de type espace telle que toute courbe dans la surface qui n’est pas de type espace l’intersecte une seule fois. La variété finale est appelée un développement de la variété initiale avec ses données initiales et il existe toujours des développements de la 3-variété initiale tant que les données initiales satisfont des équations de contrainte bien définies¹⁴.

Un autre domaine où Sofia Kovalevskaja a apporté une contribution-clé est celui de la mécanique classique. On peut consulter l’ouvrage de mécanique classique¹⁵ pour en apprendre les rudiments. Essentiellement, Sofia Kovalevskaja a décrit un cas d’une toupie rigide en rotation, dont le mouvement de précession libre sous l’effet de la gravité est suffisamment simple pour être résolu analyti-

12. Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer, 2006.

13. Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* (Heidelberg : Springer, 2008).

14. Stephen Hawking and George Ellis, *The Large Scale Structure of the Universe*, Cambridge University Press, 2006.

15. Isaac Williams, *Worlds of Motion : Why and How Things Move* (London : Austin Macauley Publishers, 2018).

quement. Ce n'est pas possible en général en raison de la complexité de la précession. Pour avoir un aperçu de la toupie de Sofia Kovalevskaja, il peut être utile de considérer le cas d'une toupie symétrique avec un point fixe dans l'espace. La toupie est alors soumise à un champ gravitationnel uniforme, c'est-à-dire que le centre de masse de la toupie est soumis à une force verticale constante. Le point fixe est un point sur l'axe de symétrie de l'objet (rappelons que nous supposons que la toupie est un corps rigide symétrique). Cet axe peut être choisi comme l'axe z du repère solide du corps et qui tourne avec lui. Comme il y a un point de base qui est fixe, on peut spécifier le mouvement de la toupie avec les angles d'Euler.

Les taux de variation des angles d'Euler nous donnent trois mouvements qui ont de belles interprétations physiques. ψ est la rotation ordinaire de la toupie ou du gyroscope autour de l'axe z à l'intérieur de la toupie, ϕ est la rotation de cet axe autour de l'axe z "régulier" qui existe à l'extérieur de la toupie (appelée "précession") et θ est le balancement de l'axe solide par rapport à l'axe vertical régulier (pensez à un flotteur qui monte et descend, mais c'est l'axe lui-même qui effectue le mouvement dans ce cas). Ce mouvement de balancement est connu sous le nom de nutation. Dans de nombreux cas, l'amplitude du taux de variation de la précession est beaucoup plus grande que le taux de variation du mouvement de balancement, et le taux de variation de la rotation ordinaire est beaucoup plus grand que l'un ou l'autre. Dans ce cas, et étant donné qu'on étudie une toupie symétrique où deux des moments d'inertie sont égaux par définition, les équations d'Euler se simplifient en ¹⁶

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= N_3. \end{aligned}$$

On peut observer les types de mouvement dont il a été question ci-dessus dans les photos d'un gyroscope :



FIGURE 1 : Mouvement d'un gyroscope.

Les équations d'Euler semblent intéressantes, mais elles ne sont pas particulièrement utiles pour résoudre le problème tel qu'il se pose dans cette situation particulière, il est donc plus facile d'utiliser

16. Herbert Goldstein, Charles Poole and John Safko, Classical Mechanics, Addison Wesley, 2002.

la formulation lagrangienne. On trouve parfois une formulation hamiltonienne pour modéliser le mouvement des toupies. L'énergie cinétique de la toupie est

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2.$$

Le lagrangien d'un système physique est

$$L = T - V,$$

où V est l'énergie potentielle. Dans ce cas, on travaille avec un champ gravitationnel uniforme et constant qui agit sur le centre de masse de la toupie, donc l'énergie potentielle est assez facile à écrire en fonction des angles d'Euler. L'énergie cinétique peut également être réécrite en fonction de ces angles, donc on aboutit à

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta.$$

Pour ce système, les composantes du moment cinétique le long de l'axe vertical spatial et le long de l'axe z solidaire de la toupie sont constantes, on a donc deux constantes du mouvement de la toupie.

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta),$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta.$$

Le système ne perd pas d'énergie au cours du temps, donc l'énergie cinétique ajoutée à l'énergie potentielle doit permettre d'obtenir une troisième constante du mouvement :

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta.$$

Quelques manipulations avec ces intégrales premières du mouvement donnent des équations différentielles pour les taux de variation des trois angles d'Euler, ce qui fournit tout ce que l'on doit savoir sur le mouvement après quelques travaux supplémentaires. Par exemple, on peut obtenir la fréquence de la nutation et la vitesse angulaire de la précession. La fréquence de précession moyenne de la toupie est par exemple

$$\bar{\phi} = \frac{Mgl}{I_3} \omega_3.$$

Ainsi, le taux de précession diminue lorsqu'on augmente la vitesse de rotation initiale de la toupie¹⁷.

Un autre exemple connexe à celui-ci est la toupie de Sofia Kovalevskaja¹⁸. Cette toupie est également symétrique, mais on suppose maintenant qu'il y a un rapport entre les moments d'inertie principaux tel que deux des moments sont égaux et sont doubles du moment restant.

$$I_1 = I_2 = 2I_3$$

17. Ibid.

18. Sofia Kovalevskaya, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Mathematica, 12 : 177–232 (1899).

Dans notre exemple précédent, le centre de gravité était situé sur l'axe de symétrie, mais pour la toupie de Sofia Kovalevskaja, il est situé sur un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie. On peut écrire l'hamiltonien pour cette toupie et trouver que comme précédemment, les intégrales premières du mouvement incluent l'énergie (l'énergie sera toujours une constante du mouvement tant que le système est conservatif) et la composante du moment cinétique dans la direction de l'axe z solide, mais on peut aussi trouver qu'il y a aussi une nouvelle quantité conservée qui est appelée l'invariant de Sofia Kovalevskaja. Il est assez surprenant qu'une mathématicienne du XIXe siècle ait pu trouver une autre toupie classique dont la description est suffisamment simple pour permettre une solution analytique du mouvement de la précession. On aurait pu penser naïvement qu'Euler et Lagrange avaient déjà traité tous les cas suffisamment simples pour que la recherche de leur précession soit un problème intégrable. En fait, un autre exemple de toupie soluble a été trouvé au XXe siècle, mais il est très difficile à intégrer et une longue période s'est écoulée entre son introduction et son intégration finale.