

Plus des deux tiers des zéros de zêta sont simples et sur la droite critique

Levent Alpöge, Ralph Furman

Résumé

Nous prouvons inconditionnellement qu'au moins deux tiers des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann, comptés avec multiplicité, sont simples et se trouvent sur la droite critique, et qu'au moins cinq sixièmes sont distincts ; les records inconditionnels précédents sont $\frac{5}{12}$ et 0,6603. Avec la fenêtre de Montgomery-Taylor, les constantes deviennent 0,6725 et 0,8362. L'argument rend inconditionnelle la déduction de Montgomery de 1973 : l'hypothèse de Riemann, classiquement nécessaire pour lire le côté des zéros comme une somme positive sur les ordonnées réelles, est remplacée par une inégalité rang-trace appliquée à une compression finie de la forme hermitienne de Weil, la loi d'inertie de Sylvester traitant les paires hors de la droite. Les entrées analytiques sont celles de Aryan et de Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh. Les résultats s'étendent aux fonctions L de Dirichlet primitives et sont formellement vérifiés en lean 4.

L'argument mathématique de cet article a été découvert et rédigé par claude, une ia développée par anthropic. Les auteurs listés ont vérifié la preuve et assument la responsabilité de son contenu. Jarred Sumner a posé le problème et guidé l'investigation ; la formalisation lean 4 qui l'accompagne a été orchestrée par Eric Easley. Voir les remerciements et l'annexe B pour un compte rendu de la façon dont la preuve a été trouvée.

1. Introduction

1.1. Résultats

Écrivons $\rho = \beta + i\gamma$ pour un zéro non trivial de $\zeta(s)$ et $m_\rho \geq 1$ pour sa multiplicité. Pour $0 \leq T_1 < T_2$, posons

$$\begin{aligned} N(T_1, T_2) &:= \sum_{T_1 < \gamma \leq T_2} m_\rho && \text{(zéros, comptés avec multiplicité),} \\ N_d(T_1, T_2) &:= \#\{\rho : T_1 < \gamma \leq T_2\} && \text{(zéros distincts),} \\ N_0^*(T_1, T_2) &:= \#\{\rho : T_1 < \gamma \leq T_2, \beta = \tfrac{1}{2}\} && \text{(zéros distincts sur la droite critique),} \\ N_0^s(T_1, T_2) &:= \#\{\rho : T_1 < \gamma \leq T_2, \beta = \tfrac{1}{2}, m_\rho = 1\} && \text{(zéros simples sur la droite critique);} \end{aligned}$$

écrivons également N_0 pour les zéros sur la droite comptés avec multiplicité et N^s pour les zéros simples ; ainsi $N_0^s \leq N_0^* \leq N_0 \leq N$ et $N_0^s \leq N^s \leq N_d \leq N$. Écrivons $N(T) := N(0, T)$, et rappelons $N(T, 2T) = \frac{T}{2\pi}(\log \frac{T}{2\pi} + 2\log 2) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$.

Théorème 1. *Lorsque $T \rightarrow \infty$,*

$$(i) \quad N_0^s(T, 2T) \geq \left(\frac{2}{3} - o(1)\right)N(T, 2T), \quad (ii) \quad N_d(T, 2T) \geq \left(\frac{5}{6} - o(1)\right)N(T, 2T).$$

Avec la fenêtre de Montgomery-Taylor ψ_{MT} de (8) à la place de la fenêtre indicatrice ψ_0 , les constantes s'améliorent respectivement à $2 - c_{\text{MT}}^{-1} = 0,67250\dots$ et $\frac{1}{2}(3 - c_{\text{MT}}^{-1}) = 0,83625\dots$, où

Traduction de l'article sur arxiv : <https://arxiv.org/pdf/2608.13637>.

$c_{\text{MT}}^{-1} := \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \frac{1}{\sqrt{2}}$; parmi les fenêtres ψ (équivalamment, les certificats de la forme $2 - R(\psi)$), ceci est optimal [CCLM17, Cor. 14]. Le plafond sur la classe plus large de tous les certificats de bande passante un est d'environ 0,682 ; voir §7.2.. A fortiori $N_0^*(T, 2T)$, $N_0(T, 2T)$, $N^s(T, 2T) \geq (\frac{2}{3} - o(1))N(T, 2T)$.

La même assertion vaut pour $(0, T)$ à la place de $(T, 2T)$, avec un taux $O(\log \log T / \log T)$ (Remarque 6.). Les records inconditionnels précédents sont $\frac{5}{12}$ pour N_0^s/N [PRZZ20] et 0,6603 pour N_d/N [Wu15]. Les constantes $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 0,6725 sont celles de Montgomery [Mon73], Conrey-Ghosh-Gonek [CGG98, (1.2)], et Montgomery-Taylor [Mon75] sous l'hypothèse de Riemann. Sous l'hypothèse de Riemann, 0,6792 pour N^s/N est connu via la programmation semi-définie utilisant la positivité du facteur de forme en dehors de $[-1, 1]$ [CGdL20], un régime dans lequel la présente méthode n'entre pas.

Théorème 2. *Le Théorème 1 est valable textuellement pour $L(s, \chi)$ à la place de $\zeta(s)$, pour tout caractère de Dirichlet primitif fixé χ .*

Les entrées arithmétiques sont la formule explicite de Weil, la formule de Riemann-von Mangoldt et la borne $N(t, t+1) \ll \log t$, l'estimation de Stirling pour Γ'/Γ , les estimations de Chebyshev-Mertens pour $\sum_{n \leq X} \Lambda(n)^2$ et $\sum_{n \leq X} \Lambda(n)^2/n$, et l'inégalité de Montgomery-Vaughan pour les fréquences $\{\log n : n \leq X\}$, $X \leq T$. Aucun multiplicateur, estimation de densité de zéros, ou région sans zéro n'est utilisé.

1.2. L'idée de la preuve

La formule explicite de Weil définit une forme hermitienne $W(f, g) = \sum_{\rho} m_{\rho} \hat{f}(\gamma_{\rho}) \overline{\hat{g}(\gamma_{\rho})}$ sur des fonctions tests à support compact, $\gamma_{\rho} = (\rho - \frac{1}{2})/i$; sa positivité sur $C_c^2(\mathbb{R})$ tout entier est équivalente à l'hypothèse de Riemann [Wei52, Bom00]. Nous restreignons W à une famille de $d \sim N(T, 2T)$ copies modulées d'une fenêtre fixée ψ , équidistribuées dans $[T, 2T]$, et notons $\tilde{G}$ la matrice symétrique réelle $d \times d$ résultante, normalisée de sorte qu'un zéro isolé simple sur la droite contribue 1 à $\text{tr } \tilde{G}$ (§2.).

- (Z) À un terme de queue de norme trace $o(1)$ près, $\tilde{G} = P + Q$: chaque zéro distinct sur la droite contribue une forme positive de rang un à P , chaque paire hors de la droite $\{\rho, 1 - \bar{\rho}\}$ un bloc de signature $(1, 1)$ à Q . En écrivant s_1, s_2, p pour les nombres de zéros simples sur la droite, de points multiples sur la droite, et de paires hors de la droite dans la fenêtre, on a $\text{tr } P \leq N_0$, $n_+(Q) \leq p$, $N \geq s_1 + 2s_2 + 2p$, et $\text{tr } \tilde{G} = (1 + o(1))N$ (propositions 8-10).
- (P) $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 = (R(\psi) + o(1))N$, où $R(\psi)$ ne dépend que de la fenêtre (Lemme 17) : $R(\psi_0) = \frac{4}{3}$ pour l'indicatrice, $R(\psi_{\text{MT}}) = c_{\text{MT}}^{-1}$ pour Montgomery-Taylor. C'est le second moment inconditionnel du côté des nombres premiers de Montgomery [Mon73, Ary22, BGSTB24] (Théorème 18).
- (L) Pour $P_1 \succeq 0$ hermitienne et Q' avec $n_+(Q') \leq b$ (Lemme 6),

$$\text{rank } P_1 \geq 2 \text{tr } P_1 + 4 \text{tr } Q' - 4b - \|P_1 + Q'\|_{\text{HS}}^2. \quad (1)$$

En prenant P_1 comme la partie simple-sur-la-droite de P et $Q' := \tilde{G} - P_1$, le Théorème 1 est alors la chaîne unique

$$N_0^s + o(N) \geq \text{rank } P_1 \geq 4 \text{tr } \tilde{G} - 2N - \|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 = (2 - R(\psi) - o(1))N : \quad (2)$$

la première inégalité est la proposition 8 ; la seconde combine (L) avec $\text{tr } P_1 + 2n_+(Q') \leq N$ de (Z) ; l'égalité est (Z) et (P). Pour $\psi = \psi_0$, c'est le Théorème 1(i), et pour $\psi = \psi_{\text{MT}}$, la première constante de la deuxième phrase. Pour (ii), en réarrangeant la deuxième étape, on obtient $3s_1 + 4(s_2 + p) \geq (4 - R(\psi))N$; en soustrayant $s_1 + 2s_2 + 2p \leq N$, on obtient $2(s_1 + s_2 + p) \geq (3 - R(\psi))N$, d'où $N_d \geq s_1 + s_2 + p \geq \frac{1}{2}(3 - R(\psi) - o(1))N$. L'inégalité (1) est la forme matricielle de $m^2 \geq 2m - 1$; avec les zéros simples du côté du rang et les zéros multiples du côté de la charge plate 4, elle redonne $m^2 \geq 3m - 2$.

1.3. Contexte

Le fait qu'une proportion positive des zéros se trouve sur la droite critique est dû à Selberg [Sel42] ; la méthode du multiplicateur de Levinson [Lev74] a donné $\frac{1}{3}$ (simple, d'après [HB79]), Conrey [Con89] $> \frac{2}{5}$, et [BCY11, Fen12, PRZZ20] le record actuel $\frac{5}{12}$. Sous l'hypothèse de Riemann, Montgomery [Mon73] a déduit $\frac{2}{3}$ simples à partir du second moment de la corrélation de paires ; [Mon75, CG93, BHB13, CGdL20] ont encore amélioré.

L'évaluation du côté des nombres premiers de Montgomery est une valeur moyenne d'un polynôme de Dirichlet de longueur T et est inconditionnelle ; l'hypothèse de Riemann n'intervenait que pour lire le côté des zéros terme à terme comme une somme positive sur les ordonnées réelles. Aryan [Ary22] a rendu ceci explicite pour le second moment du noyau de Fejér, et Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh [BGSTB24] ont ensuite montré que le facteur de forme de Montgomery lui-même est valable pour la somme sur tous les zéros complexes. Goldston et Suriajaya [GS25, GS26] (également [BGSTB25, GLSS25]) ont ensuite montré que $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ découlent sous l'hypothèse que tous les zéros se trouvent à $o(1/\log T)$ de la droite, ont isolé l'obstacle restant comme la positivité terme à terme qui échoue hors de la droite, et ont demandé ce qui découlerait si elle pouvait être supprimée. Le Théorème 1 la supprime : la borne d'inertie (Z)+(L) remplace la positivité. La Section 7.1. donne la comparaison en détail.

Le même argument appliqué à ξ' montre inconditionnellement qu'au moins 85,8% des zéros de ξ' sont simples et sur la droite critique (Remarque 7.3.), la proportion que Farmer, Gonek et Lee [FGL14] obtiennent sous l'hypothèse de Riemann ; la valeur inconditionnelle précédente était 79,874% [Con89].

La moyenne sur les caractères de Dirichlet primitifs avec des poids de module lisses élève la proportion à 0,811 simples et sur la droite et à 0,905 distincts (Remarque 7.3.).

L'observation que l'indice *néгатif* des troncatures de W compte les paires hors de la droite est due à Bombieri [Bom00] ; nous ne connaissons pas d'utilisation antérieure du rang et de l'indice positif conjointement avec une évaluation du second moment.

1.4. Ce que les résultats ne sont pas

Les théorèmes ne sont que des bornes inférieures : le tiers restant des zéros n'est pas montré comme étant hors de la droite, seulement non atteint par le certificat. Les entrées sont insensibles aux $o(N)$ zéros hors de la droite et sont valables pour les fonctions zêta de Davenport-Heilbronn et d'Epstein, pour lesquelles l'analogie de l'hypothèse de Riemann est faux. Étant donnés seulement $\text{tr } \tilde{G}$, $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2$

et la structure en blocs, l'inégalité (1) est optimale (§7.2.) ; améliorer $\frac{2}{3}$ par cette voie nécessiterait une information de corrélation de paires au-delà du support de Fourier 1.

1.5. Vérification formelle

L'auteur de cet article est un grand modèle de langage développé par anthropic ; l'argument a été trouvé au cours de deux sessions interactives et vérifié par un examen contradictoire répété par des instances de modèles indépendants (Annexe B). Une formalisation en lean 4 des Théorèmes 1 et 2 accompagne l'article (Annexe A).

1.6. Plan

La Section 2. fixe la formule explicite, la famille de tests et $\tilde{G}$. La Section 3. prouve (1). La Section 4. effectue (Z) ; la Section 5. effectue (P). La Section 6. effectue la chaîne (2). La Section 7. enregistre la relation avec [BGSTB24, GS25, GS26], l'optimalité de la méthode et les extensions. L'Annexe A enregistre la formalisation ; l'Annexe B décrit comment l'argument a été trouvé.

1.7. Notation

$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iu\xi} du$. Pour une matrice hermitienne R , $n_+(R)$ est le nombre de valeurs propres strictement positives et $\|R\|_{\text{HS}}^2 = \text{tr } R^2$. Nous écrivons $l := \log(T/2\pi)$ et $D_0 := T^{1/2}$.

2. La formule explicite et la famille de tests

2.1. La formule explicite

Pour $\tau \in \mathbb{R}$, posons

$$\mu(\tau) := \frac{1}{2\pi} \text{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{i\tau}{2} \right) - \frac{\log \pi}{2\pi}, \quad \Pi_X(\tau) := \frac{1}{\pi} \text{Re} \frac{X^{\frac{1}{2} + i\tau}}{\frac{1}{2} + i\tau}, \quad P_X(\tau) := -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cos(\tau \log n),$$

et $\nu_X := \mu + \Pi_X + P_X$. La formule explicite de Weil (par exemple [IK04, §5.5] ; notre normalisation est conforme à [BGSTB24]) s'écrit, pour $F \in C_c^2(\mathbb{R})$ paire,

$$\sum_{\rho} m_{\rho} \hat{F}(\gamma_{\rho}) = \hat{F}\left(\frac{i}{2}\right) + \hat{F}\left(-\frac{i}{2}\right) + \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\tau) \mu(\tau) d\tau - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} F(\log n); \quad (3)$$

si de plus $\text{supp } F \subset [-\log X, \log X]$, alors les termes de pôle $\hat{F}(\pm \frac{i}{2})$ sont absorbés dans $\int \hat{F} \cdot \Pi_X$ et

$$\sum_{\rho} m_{\rho} \hat{F}(\gamma_{\rho}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\tau) \nu_X(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Avec $\ell_1 := l + 2 \log 2 - 1$, les composantes de ν_X dans (4) satisfont (voir par exemple [IK04, §5.5])

$$\begin{aligned} \mu &\text{ est paire, lisse, croissante en } |\tau|, \quad \mu \geq \mu(0) > -1, \\ \mu(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{|\tau|}{2\pi} + O(\tau^{-2}), \quad \mu'(\tau) \ll |\tau|^{-1} \quad (|\tau| \geq 1); \end{aligned} \quad (5)$$

$$|\Pi_X(\tau)| \leq \frac{3\sqrt{X}}{1+|\tau|}; \quad |P_X(\tau)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \ll \sqrt{X}; \quad (6)$$

$$\int_T^{2T} \mu(\tau) d\tau = \frac{T\ell_1}{2\pi} + O\left(\frac{1}{T}\right) = N(T, 2T) + O(l), \quad \int_T^{2T} \mu(\tau)^2 d\tau = \frac{T\ell_1^2}{4\pi^2} \left(1 + O(l^{-2})\right). \quad (7)$$

2.2. La fenêtre et la famille de tests

Cette sous-section fixe la fenêtre ψ , la fonction test ϕ , et la grille d'échantillonnage $\{\alpha_k\}$; la matrice $\tilde{G}$ est définie en §2.3..

Fixons une fenêtre paire $\psi \in C^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ avec $\psi > 0$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Les deux choix que nous utilisons sont

$$\psi_0 := \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}, \quad \psi_{\text{MT}}(s) := \cos(\sqrt{2}s) \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}(s). \quad (8)$$

Fixons $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ croissante, $\chi|_{(-\infty, 0]} = 0$, $\chi|_{[1, \infty)} = 1$. Avec $L := l = \log(T/2\pi)$ et $X := e^L = T/(2\pi)$, posons

$$\phi(u) := \chi\left(\frac{L}{2} + u\right) \chi\left(\frac{L}{2} - u\right) \cdot \psi(u/L)^{1/2}. \quad (9)$$

Alors $\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$ est paire, $0 \leq \phi \leq 1$, $\text{supp } \phi = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, et $\phi^2(u) = \psi(u/L)$ en dehors de deux intervalles de transition de longueur $O_\chi(1)$; $\text{supp}(\phi * \phi) \subset [-L, L] = [-\log X, \log X]$, donc (4) s'applique à F = tout produit de copies modulées de ϕ . Par Paley-Wiener et par intégrations par parties pour $j = 0, 1, 2$,

$$|\hat{\phi}(z)| \ll_\chi e^{\frac{L}{2}|\text{Im } z|} \cdot \min(L, |z|^{-1}, |z|^{-2}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

puisque $\|\phi\|_1 \leq L$, $\|\phi'\|_1 \ll_\chi 1$, $\|\phi''\|_1 \ll_\chi 1$ (la contribution de $(\sqrt{\psi})^{(j)}(u/L) \cdot L^{-j}$ étant $\ll L^{1-j}$ sur la partie principale).

Ici et ci-dessous, $C_\chi := \|(\phi^2)''\|_1 \ll_\chi 1$.

Posons $\alpha_k := T + 2\pi k/L$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $d := \lfloor LT/(2\pi) \rfloor$, de sorte que $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in [T, 2T)$ et $d = N(T, 2T) + O(L)$. Pour un zéro ρ , posons

$$v_\rho := \left(\hat{\phi}(\gamma_\rho - \alpha_k)\right)_{0 \leq k < d} \in \mathbb{C}^d. \quad (11)$$

2.3. La matrice $\tilde{G}$

Soit $I := [T, 2T)$, $I' := [T - \sqrt{T}, 2T + \sqrt{T})$, et partitionnons les zéros avec $\text{Re } \gamma_\rho \in I'$ en on $:= \{\rho : \beta = \frac{1}{2}\}$, off $:= \{\rho : \beta \neq \frac{1}{2}\}$ (ensembles). Posons $a := \|\phi\|_2^2/L = \int_{-1/2}^{1/2} \psi + O_\chi(L^{-1})$ et définissons les matrices symétriques réelles $d \times d$

$$\tilde{G} := \frac{1}{aL^2} \sum_{\text{Re } \gamma_\rho \in I'} m_\rho v_\rho v_\rho^\top, \quad P := \frac{1}{aL^2} \sum_{\rho \in \text{on}} m_\rho v_\rho v_\rho^\top, \quad Q := \tilde{G} - P, \quad (12)$$

et $\tilde{E} := (aL^2)^{-1} \sum_{\text{Re } \gamma_\rho \notin I'} m_\rho v_\rho v_\rho^\top$. Le rang et l'inertie sont indépendants de la base, donc aucune orthonormalisation n'est nécessaire. L'équation fonctionnelle appaie off comme $\{\rho, 1 - \bar{\rho}\}$ avec $v_{1-\bar{\rho}} = \overline{v_\rho}$, donc $\tilde{G}, \tilde{E}$ sont symétriques réelles. D'après (4),

$$(\tilde{G} + \tilde{E})_{kk'} = \frac{1}{aL^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\tau - \alpha_k) \hat{\phi}(\tau - \alpha_{k'}) \nu_X(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Lemme 3 (Identité de Poisson-Gabor). *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(z - \alpha_k) \hat{\phi}(z' - \alpha_k) = L \widehat{\phi^2}(z - z'), \quad \text{en particulier} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(z - \alpha_k)^2 = L \|\phi\|_2^2 = aL^2.$$

Pour $z = z'$ réel, tronquer à $0 \leq k < d$ donne $\|v_\rho\|_2^2 \leq aL^2$ pour $\rho \in \text{on}$.

Démonstration. Fixons z, z' et soit $\Upsilon(s) := \hat{\phi}(z - s) \hat{\phi}(z' - s)$. Avec $\phi_z(u) := \phi(u) e^{izu}$ et $H := \phi_z * \phi_{z'} \in C_c(\mathbb{R})$, on a $\Upsilon(s) = \widehat{H}(-s)$; donc Υ est lisse avec $\Upsilon(s) = O_\chi(|s|^{-4})$ par (10), et par inversion de Fourier $\widehat{\Upsilon}(\xi) = 2\pi H(\xi)$, qui est continue et s'annule pour $|\xi| \geq L$. La sommation de Poisson $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Upsilon(T + kh) = h^{-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\Upsilon}(-2\pi m/h) e^{2\pi i m T/h}$ est valable; puisque $h = 2\pi/L$, le réseau dual est $L\mathbb{Z}$, donc seul $m = 0$ contribue, donnant $h^{-1} \widehat{\Upsilon}(0) = \frac{L}{2\pi} \cdot 2\pi \int \phi(u)^2 e^{i(z-z')u} du = L \widehat{\phi^2}(z - z')$. $\square$

Ainsi, le système de Gabor à la densité critique $h = 2\pi/L$ a un noyau de trame invariant par translation sans erreur de repliement, pour toute fenêtre supportée dans un intervalle de longueur L .

Lemme 4 (Montgomery-Vaughan, forme bilinéaire). *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_R \in \mathbb{R}$ distincts, $\delta_r := \min_{s \neq r} |\lambda_r - \lambda_s|$, et $x_r, z_r \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\left| \sum_{r \neq s} \frac{x_r \overline{z_s}}{\lambda_r - \lambda_s} \right| \leq \frac{3\pi}{2} \left(\sum_r \frac{|x_r|^2}{\delta_r} \right)^{1/2} \left(\sum_r \frac{|z_r|^2}{\delta_r} \right)^{1/2}.$$

Démonstration. Pour $z = x$, c'est l'inégalité de Hilbert pondérée de [MV74, Theorem 2]; voir aussi [Mon94, Ch. 7]. En général, avec $H_{rs} := i/(\lambda_r - \lambda_s)$ ($r \neq s$), $H_{rr} = 0$, et $\Delta := \text{diag}(\delta_r^{1/2})$, le cas $z = x$ dit $\|\Delta H \Delta\| \leq \frac{3\pi}{2}$ (norme d'opérateur, $\Delta H \Delta$ hermitien); alors $|x^* H z| \leq \frac{3\pi}{2} \|\Delta^{-1} x\| \|\Delta^{-1} z\|$. $\square$

Nous appliquons le Lemme 4 avec $\{\lambda_r\} = \{\log n : n \leq X \text{ puissance de premier}\}$; les puissances de premiers consécutives satisfont $\log \frac{n'}{n} \geq \frac{1}{2n}$, donc

$$\delta_n^{-1} \leq 2n, \quad \sum_n \delta_n^{-1} |x_n|^2 \leq 2 \sum_n n |x_n|^2. \quad (14)$$

3. Algèbre linéaire

Lemme 5 (Inertie sous pull-back). *Soit Q_0 une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^m$ et $A: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^m$ linéaire. Alors $n_+(A^* Q_0 A) \leq n_+(Q_0)$.*

Démonstration. Si $Q_0 \circ A$ est définie positive sur un sous-espace $U \subset \mathbb{C}^d$, alors $A|_U$ est injective et Q_0 est définie positive sur $A(U)$; donc $\dim U = \dim A(U) \leq n_+(Q_0)$. $\square$

Lemme 6 (Inégalité rang-trace). Soient P, Q des matrices hermitiennes $d \times d$ avec $P \succeq 0$, $\text{rank } P \leq r$, et $n_+(Q) \leq b$. Alors

$$r \geq 2 \text{tr } P + 4 \text{tr } Q - 4b - \|P + Q\|_{\text{HS}}^2. \quad (15)$$

L'égalité est atteinte si $P = \Pi_1$, $Q = 2\Pi_2$ pour des projections orthogonales $\Pi_1 \perp \Pi_2$ de rangs r, b .

Démonstration. Écrivons $Q = Q_+ - Q_-$ avec $Q_{\pm} \succeq 0$, $Q_+ Q_- = 0$, $\text{rank } Q_+ \leq b$. Alors $\|P + Q\|_{\text{HS}}^2 = \|P\|_{\text{HS}}^2 + \|Q_+\|_{\text{HS}}^2 + \|Q_-\|_{\text{HS}}^2 + 2 \text{tr}(PQ_+) - 2 \text{tr}(PQ_-) - 2 \text{tr}(Q_+ Q_-)$ et $\text{tr}(PQ_+) \geq 0$, $\text{tr}(Q_+ Q_-) = 0$. Soient $p_1 \geq \dots \geq p_d \geq 0$ et $n_1 \geq \dots \geq n_d \geq 0$ les valeurs propres de P et Q_- . Par l'inégalité de trace de von Neumann, $\text{tr}(PQ_-) \leq \sum_i p_i n_i$, donc

$$\|P\|_{\text{HS}}^2 - 2 \text{tr}(PQ_-) + \|Q_-\|_{\text{HS}}^2 \geq \sum_i (p_i - n_i)^2 \geq \sum_{i \leq r} (2(p_i - n_i) - 1) + \sum_{i > r} n_i^2 \geq 2 \text{tr } P - r - 4 \text{tr } Q_-,$$

en utilisant $x^2 \geq 2x - 1$, puis $-2n_i \geq -4n_i$ pour $i \leq r$ et $n_i^2 \geq 0 \geq -4n_i$ pour $i > r$. Et $\|Q_+\|_{\text{HS}}^2 = \sum_j q_j^2 \geq \sum_j (4q_j - 4) \geq 4 \text{tr } Q_+ - 4b$ sur les $\leq b$ valeurs propres positives. En ajoutant, et $\text{tr } Q = \text{tr } Q_+ - \text{tr } Q_-$, on obtient (15). $\square$

Remarque : Alternativement : l'application $U \mapsto \|P + UQU^*\|_{\text{HS}}^2$ sur le groupe unitaire est continue sur un compact, et à un minimum la condition de premier ordre $\text{tr}([P, UQU^*]H) = 0$ pour tout H hermitien force $[P, UQU^*] = 0$; la diagonalisation simultanée réduit alors (15) aux inégalités scalaires $(x - 1)^2 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $(x - 2)^2 \geq 0$ dans les trois cas de signes de (p_i, b_i) . En posant $Q = 0$ et en optimisant le coefficient 2, on retrouve $\text{rank } P \geq (\text{tr } P)^2 / \|P\|_{\text{HS}}^2$.

Lemme 7 (Weyl). Si A, E sont hermitiennes avec $\|E\| \leq \theta$, alors $n_+(A) \geq \#\{i : \lambda_i(A + E) > \theta\}$.

Démonstration. $\lambda_i(A + E) \leq \lambda_i(A) + \|E\|$ (Courant-Fischer). $\square$

4. Le côté des zéros

Dans les § 4.-6., les constantes implicites ne dépendent que de χ et ψ , et nous prenons T grand.

Proposition 8 (Structure en blocs). $P \succeq 0$ avec $\text{rank } P \leq N_0^*(I')$ et $\text{tr } P \leq N_0(I')$; et $n_+(Q) \leq \frac{1}{2} \# \text{off}$.

Démonstration. Pour $\rho \in \text{on}$, $\gamma_\rho \in \mathbb{R}$, donc $v_\rho \in \mathbb{R}^d$ et $m_\rho v_\rho v_\rho^\top \succeq 0$ est de rang ≤ 1 ; en sommant, $P \succeq 0$ avec $\text{rank } P \leq \# \text{on} = N_0^*(I')$. Par le Lemme 3 pour $z = z' = \gamma_\rho$ et la non-négativité des termes de la somme, $\|v_\rho\|^2 = \sum_{0 \leq k < d} \hat{\phi}(\gamma_\rho - \alpha_k)^2 \leq L \|\phi\|_2^2$; en sommant $m_\rho \|v_\rho\|^2$ et en divisant par $L \|\phi\|_2^2$, on obtient $\text{tr } P \leq \sum_{\rho \in \text{on}} m_\rho = N_0(I')$.

Pour la borne hors de la droite : on appaire off comme $\{\rho, 1 - \bar{\rho}\}$ et on écrit $v_\rho = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}^d$. Alors $m_\rho(v_\rho v_\rho^\top + \bar{v}_\rho \bar{v}_\rho^\top) = 2m_\rho(aa^\top - bb^\top)$ est le pull-back de $m_\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sous $x \mapsto (a^\top x, b^\top x)$. En sommant, Q est le pull-back de $\bigoplus_{\text{paires}} m_\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dont l'indice positif est le nombre de paires; appliquer le Lemme 5. $\square$

Proposition 9 (Trace). $\text{tr } \tilde{G} = N(I') + O_\chi(T^{1/2}L^2)$.

Démonstration. Par le Lemme 3 pour $z = z' = \gamma_\rho$, pour chaque zéro avec $\operatorname{Re} \gamma_\rho \in I'$,

$$\operatorname{tr}(v_\rho v_\rho^\top) = aL^2 - \sum_{k \notin [0, d)} \hat{\phi}(\gamma_\rho - \alpha_k)^2.$$

Pour $k \notin [0, d)$, on a $\alpha_k \notin [T, 2T)$, donc $|\operatorname{Re} \gamma_\rho - \alpha_k| \geq D_\rho := \operatorname{dist}(\operatorname{Re} \gamma_\rho, \{T, 2T\})$. Par (10) avec $|\operatorname{Im} \gamma_\rho| < \frac{1}{2}$, $|\hat{\phi}(\gamma_\rho - \alpha_k)|^2 \leq e^{L/2} C_\chi^2 |\operatorname{Re} \gamma_\rho - \alpha_k|^{-4}$, et la somme en k est bornée par comparaison intégrale (pas $h = 2\pi/L$) :

$$\sum_{k \notin [0, d)} |\operatorname{Re} \gamma_\rho - \alpha_k|^{-4} \leq 2 \left(D_\rho^{-4} + h^{-1} \int_{D_\rho}^\infty s^{-4} ds \right) \ll L \min(L^3, D_\rho^{-3}).$$

En divisant par $aL^2 \asymp L^2$ et en sommant sur les zéros dans I' (densité $\ll L$; $O(L)$ zéros ont $D_\rho < 1$, contribuant $\ll_\chi X^{1/2} L^2$; le reste satisfait $\sum_\rho D_\rho^{-3} \ll L$, contribuant $\ll X^{1/2} \cdot L^{-1} \cdot L = X^{1/2}$),

$$|\operatorname{tr} \tilde{G} - N(I')| \ll_\chi X^{1/2} L^2 \ll T^{1/2} L^2 = o(N(I')). \quad \square$$

Proposition 10 (Queue). $\|\tilde{E}\|_1 \ll_\chi T^{-1/2}$; en particulier $\|\tilde{E}\|, \|\tilde{E}\|_{\text{HS}} \leq \|\tilde{E}\|_1 = o(1)$.

Démonstration. Puisque $\|v_\rho v_\rho^\top\|_1 = \|v_\rho\|_2^2$, $\|\tilde{E}\|_1 \leq (aL^2)^{-1} \sum_{\operatorname{Re} \gamma_\rho \notin I'} m_\rho \|v_\rho\|_2^2$. Pour un tel ρ , $D := \operatorname{dist}(\operatorname{Re} \gamma_\rho, I) \geq D_0 = \sqrt{T}$, et comme ci-dessus $\|v_\rho\|_2^2 \leq e^{L/2} C_\chi^2 \cdot h^{-1} D^{-3} \ll X^{1/2} L D^{-3}$. D'après $N(t, t+1) \ll \log(|t|+3)$ [Tit86, Thm 9.2],

$$\sum_{\operatorname{Re} \gamma_\rho \notin I'} m_\rho D^{-3} \ll L \int_{\sqrt{T}}^T D^{-3} dD + \sum_{|\gamma| > 3T} \frac{\log |\gamma|}{|\gamma|^3} \ll LT^{-1}.$$

Donc $\|\tilde{E}\|_1 \ll (aL^2)^{-1} \cdot X^{1/2} L \cdot LT^{-1} \ll X^{1/2} T^{-1} \ll T^{-1/2}$. $\square$

Remarque : Le lissage C^2 est nécessaire : pour la coupure brutale $\phi = \mathbf{1}_{[-L/2, L/2]}$, on a seulement $|\hat{\phi}(r - iy)| \asymp X^{|y|/2}/|r|$, et le membre de droite du premier affichage dans la preuve de la proposition 10 est alors $\gg X^{1/2} L \log(T/D_0)$, qui n'est pas $o(N)$ pour un $D_0 = T^{1-\varepsilon}$.

Corollaire 11. $\operatorname{tr} P + 2n_+(Q) \leq N(I) + O(\sqrt{T} \log T)$, et $N_0^*(I) \geq \operatorname{rank} P - O(\sqrt{T} \log T)$.

Démonstration. $\operatorname{tr} P + 2n_+(Q) \leq N_0(I') + \#\text{off} \leq N(I') = N(I) + O(\sqrt{T} \log T)$ par la proposition 8, puisque $N(I') = \sum_{\text{on}} m_\rho + \sum_{\text{off}} m_\rho \geq N_0(I') + \#\text{off}$, et $N(I') - N(I) \ll \sqrt{T} \log T$ par la borne sur les intervalles courts. La deuxième affirmation est $\operatorname{rank} P \leq N_0^*(I') = N_0^*(I) + O(\sqrt{T} \log T)$ réarrangée. $\square$

5. Le côté des nombres premiers

5.1. Estimations auxiliaires

Nous enregistrons les bornes auxiliaires utilisées dans cette section. Posons $b := \frac{1}{L} \int \phi^4$ (donc $0 < b \leq a \leq 1$), $w := 1$, et

$$\Phi := \widehat{\phi^2}, \quad g := \phi^2 \star \phi^2, \quad A_\phi := \phi \star \phi, \quad (v \star v)(y) := \int v(u) v(u+y) du. \quad (16)$$

Ainsi $\widehat{\phi}$ et Φ sont réels, pairs, entiers ; $\widehat{\phi}(0) \leq L$, $\Phi(0) = aL$; le noyau de corrélation de paires $R := |\widehat{\phi}|^2$ est non négatif par construction ; $\widehat{\phi}^2 = \widehat{A_\phi}$ et $\Phi^2 = \widehat{g}$ sur $\mathbb{R}$; $\int_{\mathbb{R}} \Phi^2 = 2\pi g(0) = 2\pi bL$; g et A_ϕ sont paires, et puisque $\mathbf{1}_{[-L/2+w, L/2-w]} \leq \phi^2 \leq \phi \leq \mathbf{1}_{[-L/2, L/2]}$,

$$(L - 2w - |y|)_+ \leq g(y) \leq A_\phi(y) \leq (L - |y|)_+. \quad (17)$$

En intégrant par parties dans (10),

$$\max(|\widehat{\phi}(r)|, |\Phi(r)|) \leq \vartheta(r) := \min\left(L, \frac{2}{|r|}, \frac{C_\chi L}{wr^2}\right) \quad (r \in \mathbb{R}), \quad (18)$$

et un calcul direct (en séparant l'intégrande en $|r| = 2/L$, $|r| = C_\chi/2$) donne

$$\Theta_0 := \int_0^\infty \vartheta(r) dr = 4 + 2 \log \frac{C_\chi L}{4w} \ll \log L, \quad \int_{\mathbb{R}} \vartheta(r)^2 |r| dr = 8 + 8 \log \frac{C_\chi L}{4w} \ll \log L, \quad \int_{\mathbb{R}} \vartheta^2 \leq 8L. \quad (19)$$

Lemme 12. ([MV07, §2.2]) *Pour $x \geq 2$,*

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ll x, \quad \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \leq 3\sqrt{x} \quad (x \geq x_0), \quad \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} \ll \frac{\sqrt{x}}{\log x}, \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n)^2 \ll x \log x, \quad (20)$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)^2}{n} = \frac{(\log x)^2}{2} + O(\log x), \quad \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)^2}{n} (\log x - \log n) = \frac{(\log x)^3}{6} + O((\log x)^2). \quad (21)$$

(Chacune découle de $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)/n = \log x + O(1)$ par sommation par parties ; voir [IK04, Theorem 2.7].) En particulier, en écrivant $a_n := \Lambda(n)n^{-1/2}$, (14) donne $\sum_{n \leq X} a_n^2 \delta_n^{-1} \leq 2 \sum_{n \leq X} \Lambda(n)^2 \ll XL$; et par (5), (6) et (20),

$$|\nu_X(\tau)| \leq B + \log^+ \frac{|\tau|}{4T} \quad (\tau \in \mathbb{R}), \quad |\nu_X(\tau)| \leq B \quad (|\tau| \leq 4T), \quad B := l + 4\sqrt{X}, \quad B^2 \ll l^2 + X. \quad (22)$$

5.2. Réduction à une intégrale double

Par (13), $(aL^2)^2 \|\widetilde{G} + \widetilde{E}\|_{\text{HS}}^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} K(\tau, \tau')^2 \nu_X(\tau) \nu_X(\tau') d\tau d\tau'$, où

$$K(\tau, \tau') := \sum_{0 \leq k < d} \widehat{\phi}(\tau - \alpha_k) \widehat{\phi}(\tau' - \alpha_k) = L \Phi(\tau - \tau') - K_{\text{out}}(\tau, \tau'), \quad (23)$$

K_{out} désignant la somme sur $k \notin [0, d]$; par le Lemme 3 et (18),

$$|K|, L|\Phi| \leq aL^2, \quad |K_{\text{out}}(\tau, \tau')| \leq \sum_{k \notin [0, d]} \vartheta(\tau - \alpha_k) \vartheta(\tau' - \alpha_k). \quad (24)$$

Proposition 13 (Réduction à l'intégrale double).

$$\|\widetilde{G} + \widetilde{E}\|_{\text{HS}}^2 = \frac{1}{a^2 L^2} \iint_{I \times I} \widehat{\phi}^2(\tau - \tau')^2 \nu_X(\tau) \nu_X(\tau') d\tau d\tau' + O_\chi\left(\frac{N \log L}{L^2}\right).$$

Démonstration. Écrivons $(aL^2)^2 \|\tilde{G} + \tilde{E}\|_{\text{HS}}^2$ comme $\iint_{I \times I} K_\infty^2 \nu \nu' + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ avec $\nu := \nu_X(\tau)$, $\nu' := \nu_X(\tau')$, $\mathcal{E}_1 := \iint_{I \times I} (K^2 - K_\infty^2) \nu \nu'$ et $\mathcal{E}_2 := \iint_{(I \times I)^c} K^2 \nu \nu'$; notons $\iint_{I \times I} K_\infty^2 \nu \nu' = L^2 \mathcal{M}$.

Borne pour $\mathcal{E}_1$. Par (24), $|K^2 - K_\infty^2| = |K_{\text{out}}| |K + K_\infty| \leq 2aL^2 |K_{\text{out}}|$, et $|\nu|, |\nu'| \leq B$ sur I par (22). Donc

$$|\mathcal{E}_1| \leq 2L^2 B^2 \sum_{k \notin [0, d]} \left(\int_I \vartheta(\tau - \alpha_k) d\tau \right)^2.$$

Pour $k = -j$ ($j \geq 1$), on a $\text{dist}(\alpha_k, I) = jh$; pour $k = d + 1 + j$ ($j \geq 0$), on a $\alpha_k \geq 2T + jh$ car $T + (d + 1)h > 2T$. Puisque $\int_\Delta^\infty \vartheta \leq \min(\Theta_0, C_\chi/(w\Delta)) \leq \min(\Theta_0, C_\chi/\Delta)$ pour $\Delta > 0$, on obtient

$$\sum_{k \notin [0, d]} \left(\int_I \vartheta(\tau - \alpha_k) d\tau \right)^2 \leq 2(2\Theta_0)^2 + 2 \sum_{j \geq 1} \min\left(\Theta_0, \frac{C_\chi}{jh}\right)^2 \leq 10\Theta_0^2 + \frac{6C_\chi\Theta_0}{h} \ll L \log L,$$

où le terme $2(2\Theta_0)^2$ tient compte de $k = d, d + 1$ (pour lesquels on utilise seulement $\int_{\mathbb{R}} \vartheta = 2\Theta_0$), les points α_{d+1+j} , $j \geq 1$, étant à distance $\geq jh$ à droite de I ; la somme en j a été séparée en $j = C_\chi/(h\Theta_0)$, et (19) a été utilisée. Ainsi $|\mathcal{E}_1| \ll L^3 B^2 \log L$.

Borne pour $\mathcal{E}_2$. Par symétrie, $|\mathcal{E}_2| \leq 2 \int_{\tau \notin I} \int_{\tau' \in \mathbb{R}} K^2 |\nu \nu'|$. En utilisant $K^2 \leq aL^2 |K| \leq L^2 \sum_{k < d} \vartheta(\tau - \alpha_k) \vartheta(\tau' - \alpha_k)$,

$$|\mathcal{E}_2| \leq 2L^2 \sum_{k < d} \left(\int_{\tau \notin I} \vartheta(\tau - \alpha_k) |\nu_X(\tau)| d\tau \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \vartheta(\tau' - \alpha_k) |\nu_X(\tau')| d\tau' \right).$$

Dans le second facteur, la plage $|\tau' - \alpha_k| \leq 2T$ a $|\tau'| \leq 4T$ et contribue au plus $2\Theta_0 B$; sur $|\tau' - \alpha_k| =: r > 2T$, on a $|\tau'| \leq 2r$, $|\nu_X(\tau')| \leq B + \log(r/T)$ et $\vartheta(r) \leq C_\chi r^{-2}$, contribuant $\ll B/T$. Donc le second facteur est $\leq 3\Theta_0 B$ uniformément en k . La somme sur k du premier facteur est égale à $\int_{\tau \notin I} |\nu_X(\tau)| \sigma(\tau) d\tau$ avec $\sigma(\tau) := \sum_{k < d} \vartheta(\tau - \alpha_k)$. Pour $\tau \notin I$, soit $\Delta := \text{dist}(\tau, I)$; les nombres $|\tau - \alpha_k|$, $0 \leq k < d$, sont $\geq \Delta$, $\geq \Delta + h$, $\geq \Delta + 2h, \dots$ dans l'ordre croissant, et ϑ est décroissante, donc

$$\sigma(\tau) \leq \sum_{j \geq 0} \vartheta(\Delta + jh) \leq \vartheta(\Delta) + \frac{1}{h} \int_\Delta^\infty \vartheta \leq \vartheta(\Delta) + \frac{L}{2\pi} \min\left(\Theta_0, \frac{C_\chi}{\Delta}\right), \quad \sigma(\tau) \leq d \vartheta(\Delta) \leq \frac{dC_\chi}{\Delta^2}.$$

Sur $\Delta \leq 2T$ (où $|\tau| \leq 4T$, $|\nu_X| \leq B$), cela donne $\int |\nu_X| \sigma \leq 2B \left[\Theta_0 + \frac{L}{2\pi} (C_\chi + C_\chi \log \frac{2T\Theta_0}{C_\chi}) \right] \leq 2B(\Theta_0 + C_\chi L \log T)$; sur $\Delta > 2T$ (où $|\tau| \leq 2\Delta$, $|\nu_X(\tau)| \leq B + \log(\Delta/T)$), cela donne $\leq 2 \int_{2T}^\infty dC_\chi (B + \log(\Delta/T)) \Delta^{-2} d\Delta \ll C_\chi L B$. Donc $\int_{\tau \notin I} |\nu_X| \sigma \ll B L l$ et $|\mathcal{E}_2| \ll L^2 \cdot \Theta_0 B \cdot B L l \ll L^3 B^2 l \log L$. $\square$

5.3. Évaluation de $\mathcal{M}$

Pour des fonctions u_1, u_2 sur I , écrivons

$$\mathcal{M}[u_1, u_2] := \iint_{I \times I} \Phi(\tau - \tau')^2 u_1(\tau) u_2(\tau') d\tau d\tau',$$

une forme bilinéaire symétrique (Φ^2 est paire), de sorte que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}[\mu, \mu] + \mathcal{M}[P_X, P_X] + 2\mathcal{M}[\mu, P_X] + 2\mathcal{M}[\mu, \Pi_X] + 2\mathcal{M}[P_X, \Pi_X] + \mathcal{M}[\Pi_X, \Pi_X]. \quad (25)$$

Rappelons $\int_{\mathbb{R}} \Phi^2 = 2\pi bL$, $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)^2 |x| dx \ll \log L$ (par (18), (19)) et, par inversion de Fourier de $\Phi^2 = \widehat{g}$ (g paire, continue, à support compact),

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)^2 e^{ixy} dx = 2\pi g(y) \quad (y \in \mathbb{R}). \quad (26)$$

Proposition 14 (Terme archimédien). $\mathcal{M}[\mu, \mu] = 2\pi bL \int_T^{2T} \mu^2 + O(l^2 \log L) = \frac{bLT\ell_1^2}{2\pi} (1 + O(l^{-2})) + O(l^2 \log L)$.

Démonstration. Pour $\tau, \tau' \in I$, $\mu(\tau) = \mu(\tau') + O(|\tau - \tau'|/T)$ par (5), et $0 < \mu \leq l$ sur I . Donc

$$\mathcal{M}[\mu, \mu] = \int_I \mu(\tau')^2 \left(\int_{I-\tau'} \Phi(x)^2 dx \right) d\tau' + O\left(\frac{l}{T} \int_I \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)^2 |x| dx d\tau'\right).$$

L'erreur est $O(l \log L)$. Dans le terme principal, $\int_{I-\tau'} \Phi^2 = 2\pi bL - \int_{x < T-\tau'} \Phi^2 - \int_{x > 2T-\tau'} \Phi^2$, et $\int_I \mu(\tau')^2 \int_{x < T-\tau'} \Phi(x)^2 dx d\tau' \leq l^2 \int_{x < 0} \Phi(x)^2 \min(|x|, T) dx \ll l^2 \log L$, de même pour l'autre morceau. La seconde forme découle de (7). $\square$

Proposition 15 (Terme premier).

$$\mathcal{M}[P_X, P_X] = \frac{T}{\pi} \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)^2}{n} g(\log n) + O_X(L^2 X), \quad g := \phi^2 * \phi^2.$$

Démonstration. Écrivons $P_X(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \sum_n a_n (n^{i\tau} + n^{-i\tau})$. Alors $P_X(\tau)P_X(\tau') = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n,m} a_n a_m [n^{i\tau} m^{-i\tau'} + n^{i\tau} m^{i\tau'}]$. En substituant $\tau = \tau' + x$ et en notant que pour x fixé, la variable τ' parcourt $I \cap (I - x)$, qui est vide pour $|x| \geq T$ et égale à $[T + x^-, 2T - x^+]$ pour $|x| < T$ ($x^\pm := \max(\pm x, 0)$), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[P_X, P_X] &= \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n,m} a_n a_m \int_{-T}^T \Phi(x)^2 n^{ix} \left[\int_{T+x^-}^{2T-x^+} \left(\frac{n}{m}\right)^{i\tau'} d\tau' + \int_{T+x^-}^{2T-x^+} (nm)^{i\tau'} d\tau' \right] dx \\ &=: \mathcal{D} + \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

où $\mathcal{D}$ rassemble les termes $n = m$ de la première intégrale intérieure, $\mathcal{O}_1$ les termes $n \neq m$ de la première intégrale intérieure, et $\mathcal{O}_2$ tous les termes de la seconde.

$\mathcal{D}$. Pour $n = m$, la première intégrale intérieure est $T - |x|$, donc par (26) et $\sum_n a_n^2 \ll L^2$ (Lemme 12),

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_n a_n^2 \left(T \cdot 2\pi g(y_n) + O\left(\int \Phi(x)^2 (|x| + T \mathbf{1}_{|x| > T}) dx \right) \right) = \frac{T}{\pi} \sum_n a_n^2 g(y_n) + O(L^2 \log L),$$

en utilisant $\int_{|x| > T} \Phi^2 \leq \int \Phi^2 |x|/T$.

$\mathcal{O}_2$. Ici $|\int_{T+x^-}^{2T-x^+} (nm)^{i\tau'} d\tau'| \leq 2/\log(nm) \leq 2/\log 4$ pour tous n, m , donc $|\mathcal{O}_2| \leq \frac{1}{2\pi^2} \left(\sum_n a_n \right)^2 \cdot 2\pi bL \cdot \frac{2}{\log 4} \ll XL$ par (20).

$\mathcal{O}_1$. Pour $n \neq m$, posons $\vartheta := y_n - y_m \neq 0$. La première intégrale intérieure est égale à $\left[(n/m)^{i(2T-x^+)} - (n/m)^{i(T+x^-)} \right] / (i\vartheta)$, et $n^{ix} (n/m)^{-ix^+}$ vaut m^{ix} pour $x > 0$ et n^{ix} pour $x < 0$, tandis que $n^{ix} (n/m)^{ix^-}$ vaut n^{ix} pour $x > 0$ et m^{ix} pour $x < 0$. Avec

$$\alpha_n^+ := \int_0^T \Phi(x)^2 n^{ix} dx, \quad \alpha_n^- := \int_{-T}^0 \Phi(x)^2 n^{ix} dx, \quad |\alpha_n^\pm| \leq \pi bL \leq \pi L,$$

on obtient donc

$$\mathcal{O}_1 = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n \neq m} \frac{a_n a_m}{i(y_n - y_m)} \left[\left(\frac{n}{m} \right)^{2iT} (\alpha_m^+ + \alpha_n^-) - \left(\frac{n}{m} \right)^{iT} (\alpha_n^+ + \alpha_m^-) \right].$$

Ceci est une combinaison de quatre sommes de la forme $\sum_{n \neq m} x_n \bar{z}_m / (y_n - y_m)$ avec $\{|x_n|, |z_n|\} = \{a_n, a_n |\alpha_n^\pm|\}$; par exemple, la première est $\sum_{n \neq m} (a_n n^{2iT}) (\overline{a_m m^{2iT} \alpha_m^+}) / (y_n - y_m)$. Par le Lemme 4 et (14), chacune des quatre est au plus $\frac{3\pi}{2} \cdot \pi L \cdot \sum_n a_n^2 / \delta_n \ll L^2 X$. Donc $|\mathcal{O}_1| \ll L^2 X$.

Enfin, par (17) et (21) (notons $a_n^2 = \Lambda(n)^2/n$),

$$\frac{(L - 2w)^3}{6} + O(L^2) = \sum_{n \leq X e^{-2w}} a_n^2 (L - 2w - y_n) \leq \sum_{n \leq X} a_n^2 g(y_n) \leq \sum_{n \leq X} a_n^2 (L - y_n) = \frac{L^3}{6} + O(L^2),$$

et $(L - 2w)^3 = L^3 - 6wL^2 + O(w^2L)$ avec $1 \leq w \leq L/8$, ce qui donne la seconde forme. $\square$

Proposition 16 (Termes croisés). $\mathcal{M}[\mu, P_X], \mathcal{M}[\mu, \Pi_X], \mathcal{M}[P_X, \Pi_X], \mathcal{M}[\Pi_X, \Pi_X] \ll_{\chi} L^2 \sqrt{X}$.

Démonstration. Soit $m(\tau') := \int_I \Phi(\tau - \tau')^2 \mu(\tau) d\tau$ pour $\tau' \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq m \leq l \cdot 2\pi bL$, m est C^1 , et en dérivant sous l'intégrale et en intégrant par parties en τ ,

$$m'(\tau') = - \int_I \mu(\tau) \partial_\tau [\Phi(\tau - \tau')^2] d\tau = \mu(T) \Phi(T - \tau')^2 - \mu(2T) \Phi(2T - \tau')^2 + \int_I \mu'(\tau) \Phi(\tau - \tau')^2 d\tau,$$

donc $\int_I |m'| \leq 2l \int \Phi^2 + T \cdot O(T^{-1}) \int \Phi^2 \ll lL$. Pour $y \geq \log 2$, en intégrant par parties, $\left| \int_I m(\tau') \cos(\tau' y) d\tau' \right| \leq (2 \sup |m| + \int_I |m'|)/y \ll lL/y$. Par conséquent

$$|\mathcal{M}[\mu, P_X]| = \left| \frac{1}{\pi} \sum_n a_n \int_I m(\tau') \cos(\tau' y_n) d\tau' \right| \ll lL \sum_{n \leq X} \frac{a_n}{\log n} \ll lL \frac{\sqrt{X}}{L} = l\sqrt{X}$$

par (20). Ensuite, sur I , on a $|\Pi_X| \leq 3\sqrt{X}/T$, $0 < \mu \leq l$, $|P_X| \leq \sqrt{X}$ (par (6), (20), $T \geq T_0$), et $\sup_\tau \int_I \Phi(\tau - \tau')^2 d\tau' \leq 2\pi bL$; les trois bornes restantes découlent en insérant ces bornes sup dans la définition de $\mathcal{M}[\cdot, \cdot]$ (une intégrale sur une région de τ' -longueur T). $\square$

5.4. La constante de fenêtre

Lemme 17 (Constante de fenêtre). Pour $\psi \in C([-1/2, 1/2])$ paire, $\psi > 0$, soit

$$R(\psi) := \frac{\int_{-1/2}^{1/2} \psi^2 + \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |u - v| \psi(u) \psi(v) du dv}{\left(\int_{-1/2}^{1/2} \psi \right)^2}. \quad (28)$$

Alors $R(\psi_0) = \frac{4}{3}$ et $R(\psi_{\text{MT}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \frac{1}{\sqrt{2}} = c_{\text{MT}}^{-1}$.

Démonstration. Pour ψ_0 : $\int \psi_0 = 1$, $\int \psi_0^2 = 1$, $\iint |u - v| = 2 \int_0^1 w(1 - w) dw = \frac{1}{3}$, donc $R = \frac{4}{3}$. Pour ψ_{MT} : la fonction $G(u) := \psi(u) + \int_{-1/2}^{1/2} |u - v| \psi(v) dv$ a $G''' = \psi'' + 2\psi = 0$ sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, donc y est affine, donc (étant paire) constante; $G(0) = 1 + 2 \int_0^{1/2} v \cos(\sqrt{2}v) dv = \cos \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\int \psi = \sqrt{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $R(\psi_{\text{MT}}) = G(0)/\int \psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \frac{1}{\sqrt{2}}$ après avoir intégré $G \equiv G(0)$ contre ψ . $\square$

Théorème 18. $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 = \left(R(\psi) + O_\chi(L^{-1})\right) N(T, 2T).$

Démonstration. Par les propositions 13-16, $\|\tilde{G} + \tilde{E}\|_{\text{HS}}^2 = (a^2 L^2)^{-1} (\mathcal{M}[\mu, \mu] + \mathcal{M}[P_X, P_X] + O(L^2 \sqrt{X})) + O(N \log L/L^2)$. La renormalisation $\phi^2(u) = \psi(u/L) + O(\mathbf{1}_{|u| > L/2-1})$ donne $\|\phi\|_2^2 = L \int \psi + O_\chi(1)$, $\|\phi\|_4^4 = L \int \psi^2 + O_\chi(1)$, $g(y) = L(\psi * \psi)(y/L) + O_\chi(1)$ uniformément ; donc $\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)^2}{n} g(\log n) = L \sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n} (\psi * \psi)(\frac{\log n}{L}) + O_\chi(L^2)$, et par sommation par parties avec $\sum_{n \leq t} \Lambda(n)^2/n = \frac{1}{2} \log^2 t + O(\log t)$, ceci est égal à $L^3 \int_0^1 w(\psi * \psi)(w) dw + O_\chi(L^2)$. Ainsi

$$\mathcal{M}[\mu, \mu] + \mathcal{M}[P_X, P_X] = \frac{TL^3}{2\pi} \left(\int \psi^2 + 2 \int_0^1 w(\psi * \psi) \right) + O_\chi(TL^2) = \frac{TL^3}{2\pi} R(\psi) \left(\int \psi \right)^2 + O_\chi(TL^2)$$

par le Lemme 17 (puisque $2 \int_0^1 w(\psi * \psi) = \iint |u-v| \psi \psi$, ψ paire). En divisant par $a^2 L^2 = L^2 (\int \psi)^2 + O_\chi(L)$:

$$\|\tilde{G} + \tilde{E}\|_{\text{HS}}^2 = R(\psi) \cdot \frac{TL}{2\pi} + O_\chi(T) = R(\psi) N(T, 2T) + O_\chi(N/L).$$

Finalement $|\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 - \|\tilde{G} + \tilde{E}\|_{\text{HS}}^2| \leq 2\|\tilde{G} + \tilde{E}\|_{\text{HS}} \|\tilde{E}\|_{\text{HS}} + \|\tilde{E}\|_{\text{HS}}^2 \ll \sqrt{N} \cdot T^{-1/2}$ par la proposition 10. $\square$

6. Preuves des Théorèmes 1 et 2

Preuve du Théorème 1. Posons $P_1 := (aL^2)^{-1} \sum_{\rho \in \text{on}_1} v_\rho v_\rho^\top$ (les zéros simples sur la droite) et $Q' := \tilde{G} - P_1$. Alors $P_1 \succeq 0$, $\text{rank } P_1 \leq s_1$, $\text{tr } P_1 \leq s_1$ (Lemme 3, chaque $m_\rho = 1$) ; et Q' est le pull-back de $\bigoplus_{\rho \in \text{on}_{\geq 2}} m_\rho |x|^2 \oplus \bigoplus_{\text{paires}} \begin{pmatrix} 0 & m_\rho \\ m_\rho & 0 \end{pmatrix}$, donc $n_+(Q') \leq s_2 + p$ par le Lemme 5. Le Lemme 6 avec (P_1, Q') et $\text{tr } Q' = \text{tr } \tilde{G} - \text{tr } P_1$ donne

$$\text{rank } P_1 \geq 2 \text{tr } P_1 + 4(\text{tr } \tilde{G} - \text{tr } P_1) - 4(s_2 + p) - \|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 = 4 \text{tr } \tilde{G} - 2 \text{tr } P_1 - 4(s_2 + p) - \|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2,$$

et puisque $\text{tr } P_1 + 2(s_2 + p) \leq s_1 + 2s_2 + 2p \leq N(I')$, ceci est $\geq 4 \text{tr } \tilde{G} - 2N(I') - \|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2$. Maintenant $\text{tr } \tilde{G} = N(I') + o(N)$ (proposition 9), $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 = (R(\psi) + o(1))N$ (Théorème 18), $N(I') = N(I) + O(D_0 L)$, et $N_0^s(I) = s_1 - O(D_0 L) \geq \text{rank } P_1 - O(D_0 L)$, ce qui donne (2).

Pour (ii) : en réarrangeant l'affichage ci-dessus, $3s_1 + 4(s_2 + p) \geq 4 \text{tr } \tilde{G} - \|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2$; en soustrayant $s_1 + 2s_2 + 2p \leq N(I')$, on obtient $2(s_1 + s_2 + p) \geq (3 - R(\psi) - o(1))N$, et $N_d(I') \geq s_1 + s_2 + 2p \geq s_1 + s_2 + p$. La forme cumulative s'obtient en sommant sur les fenêtres dyadiques. $\square$

Preuve du Théorème 2. Remplacer ζ par $L(s, \chi)$, χ primitif mod q : dans (3), μ gagne $-\frac{\log q}{2\pi}$ et le facteur Γ se décale en $\frac{1+a_\chi}{4} + \frac{i\tau}{2}$, $\Lambda(n)$ devient $\Lambda(n)\chi(n)$, et les termes de pôle sont absents pour $\chi \neq \chi_0$. L'équation fonctionnelle apparait encore $\rho \leftrightarrow 1 - \bar{\rho}$. Les propositions 8-16 et le Théorème 18 s'appliquent avec des erreurs $O_q(\cdot)$ ($|\chi| \leq 1$) ; la chaîne (2) est inchangée. $\square$

Remarque : [Taux ; le paramètre λ] En suivant les erreurs, on obtient $N_0^s(T, 2T) \geq (2 - R(\psi) - c_\psi \frac{\log \log T}{\log T}) N(T, 2T)$ pour $T \geq T_0(\psi, \chi)$, le $\log \log T$ provenant de la proposition 13. Si à la place $L := \lambda l$ pour un $0 < \lambda < 1$ fixé (donc $X = (T/2\pi)^\lambda$), l'argument donne $2 - R_\lambda(\psi)$ avec $R_\lambda(\psi_0) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{3}$, c'est-à-dire $H(\lambda) := 2 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}$ à la place de $\frac{2}{3}$, et le $\log \log T$ peut être supprimé. Aucun $\lambda < 1$ n'améliore les constantes.

7. Relation avec les travaux antérieurs ; optimalité

7.1. Relation avec les travaux antérieurs sur le second moment de la corrélation de paires

Dans la notation de [GS25, GS26], la “somme du noyau de Fejér sur les différences de zéros” inconditionnelle $\sum_{\rho, \rho'} \left(\frac{\sin \frac{i}{2}(\rho - \rho') \log T}{\frac{i}{2}(\rho - \rho') \log T} \right)^2 W(\rho - \rho') = (\frac{4}{3} + o(1)) \frac{T}{2\pi} \log T$ ([Ary22, Cor. 1.4] ; [BGSTB24, Theorem 1] ; [GS26, Lemma 2]) est, au choix du lissage près, la lecture du côté des zéros de notre $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2$. Goldston et Suriajaya [GS25, Theorem 2] (voir aussi [GLSS25] sous la conjecture de corrélation de paires) montrent qu’une borne inconditionnelle $\sum_{\rho, \rho' \in \mathcal{Z}(T), \gamma = \gamma'} 1 \leq (C + o(1))N(T)$ avec $C < 2$ (zéros répétés selon leur multiplicité) donnerait des proportions $\geq 2 - C$ de zéros simples et $\geq 2 - C$ de zéros sur la droite, et que $C = \frac{4}{3}$ découlerait si les termes $\gamma \neq \gamma'$ de la somme de Fejér pouvaient être écartés, ce qui nécessite une positivité qui échoue pour les zéros éloignés de la droite ; dans [BGSTB25, GS26], ceci est réalisé sous l’hypothèse que tous les zéros se trouvent à $o(1/\log T)$ de la droite (Aryan [Ary22, Cor. 1.5] avait précédemment obtenu $\geq \frac{2}{3}$ zéros simples sous une hypothèse de densité de zéros). Le Théorème 1 est un substitut inconditionnel qui atteint leur nombre $2 - C = \frac{2}{3}$ à la fois pour les zéros sur la droite (en tant que points distincts) et pour les zéros simples sur la droite : au lieu d’isoler la “diagonale horizontale” $\gamma = \gamma'$ terme à terme, le Lemme 6 borne le rang de la partie sur la droite (resp. simple sur la droite) de la forme hermitienne entière à partir de sa trace, de sa norme de Frobenius et de l’indice positif du reste. Pour les zéros simples sur la droite, nous obtenons ainsi $2 - C = \frac{2}{3}$ inconditionnellement ; c’est la constante que [GS25, Theorem 3(i)] donne sous l’hypothèse [GS25, (6.1)] sur les termes diagonaux et symétriques-diagonaux, et donc sous l’hypothèse de boîte [GS25, Theorem 4], [GS26, Theorem 1] ; pour les zéros distincts, le Théorème 1(ii) donne $\frac{3-C}{2} = \frac{5}{6}$ inconditionnellement, qui est la valeur de la moyenne des proportions simples et critiques dans [GS25, Theorem 3(ii)] et la constante conditionnelle à l’hypothèse de Riemann de [CGG98, (1.2)].

Que l’indice *négaatif* des troncatures finies de la forme de Weil soit égal au nombre de paires de zéros hors de la droite vues par la troncature a été observé par Bombieri [Bom00] (Introduction) ; voir aussi Yoshida [Yos92] pour la positivité de W sur les petits supports. Nous ne connaissons pas d’utilisation antérieure de l’indice positif ou du rang en combinaison avec une évaluation du second moment.

7.2. Optimalité et limites de la méthode

(a) *Dimension.* $\text{rank } P, n_+(\tilde{G}) \leq d = N(1+o(1))$, donc le plafond de tout argument du présent type est 100%. La restriction $L \asymp \log T$ (équivalamment $X \leq T$) provient de la proposition 15 : pour $X \gg T$, la somme première hors diagonale n’est plus dominée par la diagonale, et son évaluation nécessiterait une information sur les paires de nombres premiers (les conjectures de Hardy-Littlewood, ou de manière équivalente la conjecture de corrélation de paires de Montgomery pour un support > 1 [Mon73, GM87]). Dans la configuration hypothétique extrême où tous les zéros dans $[T, 2T]$ sont des paires hors de la droite, la proposition 8 donne $\text{rank } P = 0, n_+(Q) \leq N/2$, alors le Lemme 6 forcerait $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 \geq 2N > \frac{4}{3}N$; la contradiction montre seulement qu’au moins deux tiers des zéros ne sont pas de ce type, ce qui est ce que dit le Théorème 1. Rien dans la méthode ne distingue entre “deux tiers” et “tous”.

(b) *Précision des trois comptages.* Étant donnés uniquement tr , $\|\cdot\|_{\text{HS}}^2$, la structure en blocs et $\text{tr } P_1 \leq s_1$, les inégalités du § 6. sont optimales dans les trois parties : $\frac{2}{3}N$ zéros simples sur la droite mutuellement orthogonaux avec $\frac{1}{6}N$ doubles sur la droite réalisent $\text{tr} = N$, $\|\cdot\|_{\text{HS}}^2 = \frac{4}{3}N$, $s_1 = \frac{2}{3}N$, $N_d = \frac{5}{6}N$ - la même configuration extrémale que dans l'argument hypothèse de Riemann de Montgomery. Remplacer les doubles par des paires hors de la droite de profondeur $\rightarrow 0$ (spectralement identiques) donne l'extrémale pour le Théorème 1, avec $s_1 + s_2 = \frac{2}{3}N$; pour cette configuration, le certificat du Théorème 1(i) donne exactement $\frac{2}{3}$ tandis que celui du Théorème 1(ii) n'est pas optimal ($N_d = N$), cohérent avec § 1.4.

(c) *Les deux niveaux d'intégralité.* Le Lemme 6 avec la décomposition (P, Q) de la proposition 8 redonne le niveau $(m-1)^2 \geq 0$; avec le regroupement (P_1, Q') de la preuve du Théorème 1(i), il redonne également le niveau $(m-1)(m-2) \geq 0$ - les zéros simples, dont les valeurs propres remplissent $(0, 2)$, sont inoffensifs car ils se trouvent du côté du rang, où seuls $\text{rank } P_1 \leq s_1$ et $\text{tr } P_1 \leq s_1$ sont utilisés, tandis que chaque point multiple sur la droite et chaque paire hors de la droite se trouve du côté de l'indice à la charge plate 4. C'est le dispositif de [CGG98, (1.2)] rendu inconditionnel.

Ce qui peut encore être varié est la fenêtre ψ (Lemme 17) et le nombre de moments utilisés. La borne de dimension $\text{rank } P \leq d = N(T, 2T) + O(1)$ est le plafond trivial mentionné en (f); elle est décisive en combinaison avec les observations suivantes, que nous énonçons de manière informelle. (d) Le Lemme 6 pour $c = 1$ est le cas $m = 1$ de la borne de Chebyshev-Markov-Stieltjes unilatérale : si les moments normalisés $d^{-1} \text{tr } \tilde{G}^k$, $k \leq 2m$, sont connus, la borne inférieure optimale pour $n_+(\tilde{G})/d$ est $1 - \Lambda_m(0)$, Λ_m étant la fonction de Christoffel de la suite des moments en 0. (e) L'évaluation du côté des nombres premiers de $\text{tr } \tilde{G}^k$ par la méthode diagonale de la Section 5. (relations multiplicatives entre k puissances de premiers, Montgomery-Vaughan pour le reste) est disponible exactement dans le domaine de Rudnick-Sarnak [RS96] $X^k \leq T^{2-\varepsilon}$; pour $X \asymp T$, cela ne permet que $k = 1$. Ainsi, inconditionnellement, des moments supérieurs n'ajoutent rien. (f) *Conditionnellement*, soit $\text{HL}^*(k_0)$ l'hypothèse que pour tout $k \leq k_0$, $\text{tr } \tilde{G}^k = d m_k(1)(1 + o(1))$, où $m_k(1)$ est le k -ième moment de la distribution spectrale limite de la matrice de Gram du noyau sinus sur le processus sinus (pour $k = 4$, cela encode une asymptotique de type Hardy-Littlewood pour les corrélations additives $\sum_m (\Lambda * \Lambda)(m)(\Lambda * \Lambda)(m+h)$, $|h| \leq X^2/T$). On calcule $m_k(1) = 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{13}{4}$ pour $k \leq 4$, donc $\Lambda_2(0; 1) = \frac{5}{36}$ et $\text{HL}^*(4)$ donnerait $\liminf N_0^s(T, 2T)/N(T, 2T) \geq \frac{13}{18}$, et $\text{HL}^*(k_0)$ pour tout k_0 donnerait une proportion 1 (de zéros simples sur la droite), le plafond de (a); l'hypothèse de Riemann elle-même est hors de portée du mécanisme. Ceci est complémentaire à [GLSS25], où la conjecture de corrélation de paires avec support total donne 100% de zéros simples sur la droite.

Le plafond de bande passante un. Le $\frac{2}{3}$ du Théorème 1(i) est à 0,016 du plafond de sa propre méthode, comme nous le précisons maintenant. Appelons *certificat de bande passante un* toute fonction p d'une configuration localement finie, symétrique par $\rho \mapsto 1 - \bar{\rho}$, qui (a) dépend de la configuration uniquement par ses deux premiers moments de trace contre des fonctions tests de support de Fourier dans $[-1, 1]$ et par la partition en points sur la droite et paires hors de la droite, et (b) satisfait $p \leq N_0^s/N$ configuration par configuration. Le certificat utilisé pour le Théorème 1(i) est de ce type. Pour un tel p et toute fenêtre r de support de Fourier dans $[-1, 1]$, le théorème lean

Zeta23.PairCeiling.ceiling_law256 établit

$$c_0 + \int_0^1 r(x) x \, dx \leq p + 0,824 |r(1)| + 2,55 \cdot 10^{-6} \left(|r'(1)| + \int_0^1 |r''| \right)$$

sous deux hypothèses : `hvalid`, affirmant $c_0 + \sum_{j \leq 256} (S_j/256) r(j/256) \leq p$ pour le facteur de forme échantillonné (S_j) de la loi 256-périodique explicite enregistrée dans

`Zeta23/PairCeiling/LawN256.lean` (l'optimum du programme fini correspondant) ; et `Enc10K`, certifiant les enveloppes du facteur de forme `LawN256.enc1`. Ici $p_0 := 1 - a_N$ est le rationnel exact enregistré (arrondi, $p_0 \leq 0,6818287$) : la validité configurationnelle du certificat donne $\mathbb{E}_{\mathcal{L}}[p] \leq \mathbb{E}_{\mathcal{L}}[N_0^s/N] = 1 - a_N$ en moyennant sur $\mathcal{L}$ - cette étape d'une ligne est effectuée ici, pas dans `lean`. Pour une fenêtre à bande limitée, $r(\pm 1) = 0$, ce qui annule le terme $0,824 |r(1)|$ (la variante `_signed` ne nécessite que $r(1) \geq 0$), et la borne résultante $p_0 + 2,55 \cdot 10^{-6} (|r'(1)| + \int |r''|)$ est inférieure à 0,6819 pour les deux fenêtres (8) et pour toute fenêtre avec $|r'(1)| + \int |r''| < 8,2$.

À la balise du dépôt cité (v1.0), les enveloppes `Enc10K` sont certifiées par arithmétique d'intervalles et ne sont *pas* vérifiées par le noyau `lean` ; ce qui est vérifié par le noyau, étant donné `Enc10K`, est les 255 inégalités de rang proche-CUE $|256 S(j) - j| \leq 3 \cdot 10^{-40}$, la borne de bord $|D(1)| \leq 0,82395317$ et son signe, et l'inégalité de stabilité analytique avec sa constante. C'est le seul endroit de l'article où une certification numérique entre en jeu ; la formalisation des Théorèmes 1 et 2 en est indépendante et ne dépend que des trois axiomes standard (§1.5.).

7.3. Extensions

Sous l'hypothèse de Riemann, la troisième trace $\text{tr } \tilde{G}^3$ est disponible [Hej94, RS96], et le certificat du Théorème 1(ii) peut être exécuté avec le poids cubique $\omega(m) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{18}(2m^2 - m^3) + \frac{4}{9}\mathbf{1}_{m=1}$ (serré en $m = 1, 2, 3$; Schur-Horn appliqué au minortant convexe de $-\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{18}x^3$) : avec la fenêtre $\cos(\frac{8s}{5})\mathbf{1}_{|s| \leq 1/2}$ et [BHB13]'s $N^s/N \geq \frac{19}{27}$ sur l'hypothèse de Riemann, cela donne $\liminf N_d/N \geq 0,85082 \dots$ (cf. 0,8477 sur l'hypothèse de Riemann [CGdL20]). Plus généralement, si le facteur de forme de Montgomery était connu sur le support $(-\lambda_0, \lambda_0)$ pour tout λ_0 , la méthode certifierait 100% de zéros simples sur la droite.

Remarque : [Zéros de ξ'] Appliqué à la dérivée ξ' de la fonction zêta complétée à la place de ξ , l'argument des § 4.-6. donne, inconditionnellement,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{0,\xi'}^s(T, 2T)}{N_{\xi'}(T, 2T)} \geq 0,85838 \quad \text{et} \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{d,\xi'}(T, 2T)}{N_{\xi'}(T, 2T)} \geq 0,92919$$

(fenêtre plate ; avec la fenêtre quartique $v(s) = 1 - \frac{7}{100}(2s)^2 - \frac{51}{200}(2s)^4$, les constantes deviennent 0,86864 et 0,93432), où $N_{\xi'}(T_1, T_2)$ compte les zéros $\rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ de ξ' avec $T_1 < \gamma_1 \leq T_2$ avec multiplicité, $N_{0,\xi'}^s$ ceux qui sont simples avec $\beta_1 = \frac{1}{2}$, et $N_{d,\xi'}$ les distincts. Les comparanda sont : inconditionnellement, Conrey [Con89] a prouvé qu'au moins 79,874% des zéros de ξ' sont simples et sur la droite critique ; en supposant l'hypothèse de Riemann, Farmer, Gonek et Lee [FGL14, Cor. 1.3] obtiennent $> 85,84\%$ simples par la méthode de Montgomery, et Chirre, Gonçalves et de Laat [CGdL20, Cor. 7] obtiennent 0,8825 simples, 0,9412 distincts. La constante de la fenêtre plate 85,838% est donc la constante conditionnelle à l'hypothèse de Riemann de Farmer-Gonek-Lee avec l'hypothèse de Riemann supprimée ; la fenêtre quartique 86,864% la dépasse et reste en dessous

du 0,8825 conditionnel à l'hypothèse de Riemann. Notons que pour les zéros de ξ' seulement sur la droite critique (sans la simplicité), Wu [Wu15, §3] a 0,86957 inconditionnellement, que ni notre 0,85838 ni notre 0,86864 ne dépasse ; le nouveau contenu est la simplicité. Ceux-ci sont formalisés en lean à la balise citée comme

`Zeta23.XiPrime.xiDeriv_simple_on_line` et `xiDeriv_simple_on_line_quartic`, avec `#print axioms` ne retournant que les trois axiomes standard ; les déclarations de comparaison sont `xiPrime_simple_zeros_on_critical_line` et sa variante `_quartic`.

Remarque : [Fonctions L de Dirichlet, en moyenne] En sommant la chaîne (2) sur χ primitifs mod q , $q \leq Q$, avec des poids de module lisses $(1 - q/Q)^2$, la borne diagonale de Montgomery-Vaughan de la proposition 15 peut être remplacée par une inégalité de grand crible pondérée dont la constante, pour ce poids, est 1,263... fois le nombre d'harmoniques (à la place de Q^2), valable pour $X \leq Q^{2-\varepsilon}$: la configuration extrémale pour la coupure brutale est le seul rayon de Farey $\{1/q\}_{q \leq Q}$ près de $1/Q$, et un poids s'annulant en $q = Q$ l'élimine. L'effet est d'élever la bande passante admissible (le paramètre λ de la Remarque 6.) à $\frac{3}{2}$, et avec un biseau Gevrey dans § 2.2. à la place de la rampe C^2 (de sorte que l'analogie de la proposition 10 vaut pour T une puissance de $\log Q$), les proportions moyennes sur la famille résultantes sont $\geq 0,811$ simples et sur la droite et $\geq 0,905$ distincts, inconditionnellement. La constante pondérée est la forme précise du principe K_δ de Davenport et Wolke [Wol71] pour les points de Farey (cf. [Bai06, MV74, Ram09, BZ05] et, pour les modules premiers, Iwaniec [Iwa22]) ; nous ne la connaissons pas dans la littérature avec une constante explicite. Nous enregistrons seulement les résultats ; les détails suivent le modèle des § 2.-6. avec les substitutions indiquées et sont omis. Ceci a été vérifié par des dérivations indépendantes mais n'est pas inclus dans la formalisation lean de l'Annexe A.

A Formalisation en lean

Une formalisation en lean 4 des Théorèmes 1 et 2, avec les constantes énoncées dans cet article, accompagne l'article (chaîne d'outils `v4.33.0-rc2` ; révision Mathlib `51e6992efd06` ; balise du dépôt `v1.0`). Les déclarations de premier niveau pour le Théorème 1, dans

`Zeta23/Unconditional.lean` et

`Zeta23/FinalMult.lean`, sont reproduites ci-dessous ; leurs types ne portent aucune hypothèse. Le dépôt enregistre les déclarations correspondantes pour les constantes de Montgomery-Taylor et pour le Théorème 2 à la même balise

`(Zeta23/ThmD/Mult.lean,`

`Zeta23/ThmE/Mult.lean,`

`Zeta23/ThmDE/Mult.lean)`, et son répertoire

`comparator/` les énonce toutes une seconde fois, contre Mathlib seul, dans le format de défi de l'outil

`leanprover/comparator`. Les fonctions de comptage du § 1.1. sont définies directement contre

`riemannZeta` de Mathlib, et les entrées analytiques du § 2. apparaissent dans le dépôt comme des théorèmes en leur nom propre plutôt que comme des hypothèses des théorèmes principaux ; plusieurs sont portées, avec attribution, du projet *PrimeNumberTheoremAnd* [PNT+]. La documentation d'audit du dépôt enregistre qu'à la balise citée il ne contient pas de déclarations `axiom` au-delà de celles de Mathlib et que `#print axioms` sur chacun de

```

Zeta23.two_thirds_on_critical_line,
Zeta23.thmB0_mult,
Zeta23.thmC0_mult,

```

et les déclarations correspondantes pour les constantes de Montgomery-Taylor et pour le Théorème 2, ne retourne que les trois axiomes standard

```

propext, Classical.choice, Quot.sound, sans sorry.

```

Le dépôt est disponible à l'adresse <https://github.com/anthropics/zeta-23-lean>.

Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ci-dessous les définitions des fonctions de comptage et les énoncés du Théorème 1; l'énoncé du Théorème 2 est analogue, et le dépôt complet contient les preuves.

```

- Counting functions (Zeta23/Statement.lean), against Mathlib's riemannZeta:
import Mathlib.NumberTheory.LSeries.RiemannZeta
import Mathlib.Analysis.Analytic.Order
namespace Zeta23

def IsNontrivialZero (ρ : ℂ) : Prop := riemannZeta ρ = 0 ∧ 0 < ρ.re ∧ ρ.re < 1
def zeroMult (ρ : ℂ) : ℕ := (analyticOrderAt riemannZeta ρ).toNat
def zerosIn (T₁ T₂ : ℝ) : Set ℂ := {ρ | IsNontrivialZero ρ ∧ T₁ < ρ.im ∧ ρ.im ≤ T₂}
def Ncount (T₁ T₂ : ℝ) : ℕ := ∑f ρ ∈ zerosIn T₁ T₂, zeroMult ρ
def Ndist (T₁ T₂ : ℝ) : ℕ := (zerosIn T₁ T₂).ncard
def N0 (T₁ T₂ : ℝ) : ℕ := ∑f ρ ∈ zerosIn T₁ T₂ ∩ {ρ | ρ.re = 1 / 2}, zeroMult ρ
def N0star (T₁ T₂ : ℝ) : ℕ := (zerosIn T₁ T₂ ∩ {ρ | ρ.re = 1 / 2}).ncard
def N0simple (T₁ T₂ : ℝ) : ℕ := (zerosIn T₁ T₂ ∩ {ρ | ρ.re = 1 / 2} ∩ {ρ | zeroMult ρ = 1}).ncard
def Nsimple (T₁ T₂ : ℝ) : ℕ := (zerosIn T₁ T₂ ∩ {ρ | zeroMult ρ = 1}).ncard

- Main theorems (Zeta23/Unconditional.lean, Zeta23/FinalMult.lean); the types carry no
  hypotheses.
theorem two_thirds_on_critical_line :
  ∀ ε > 0, ∃ T₀ : ℝ, ∀ T ≥ T₀, (2 / 3 - ε) * (Ncount T (2 * T) : ℝ) ≤ N0star T (2 * T)

theorem two_thirds_on_critical_line_cumulative :
  ∀ ε > 0, ∃ T₀ : ℝ, ∀ T ≥ T₀, (2 / 3 - ε) * (Ncount 0 T : ℝ) ≤ N0star 0 T

theorem thmB0_mult :
  ∀ ε > 0, ∃ T₀ : ℝ, ∀ T ≥ T₀, (2 / 3 - ε) * (Ncount T (2 * T) : ℝ) ≤ N0simple T (2 * T)

theorem thmB0_mult_cumulative :
  ∀ ε > 0, ∃ T₀ : ℝ, ∀ T ≥ T₀, (2 / 3 - ε) * (Ncount 0 T : ℝ) ≤ N0simple 0 T

theorem thmC0_mult :
  ∀ ε > 0, ∃ T₀ : ℝ, ∀ T ≥ T₀, (5 / 6 - ε) * (Ncount T (2 * T) : ℝ) ≤ Ndist T (2 * T)

theorem thmC0_mult_cumulative :
  ∀ ε > 0, ∃ T₀ : ℝ, ∀ T ≥ T₀, (5 / 6 - ε) * (Ncount 0 T : ℝ) ≤ Ndist 0 T

end Zeta23

- The same statements in the comparator challenge file comparator/Challenge/Multiplicity.lean

```

```

- (names two_thirds_simple_on_critical_line, five_sixths_distinct), and, with
-  $c_{MT} := \sqrt{2} \cdot \tan(1/\sqrt{2}) / (1 + (1/\sqrt{2}) \cdot \tan(1/\sqrt{2}))$ , the constant  $c_1^*$  of Theorem D:
theorem montgomery_taylor_simple_on_critical_line_mult :
   $\forall \varepsilon > 0, \exists T_0 : \mathbb{R}, \forall T \geq T_0, (2 - 1 / c_{MT} - \varepsilon) * (N_{\text{count}} T (2 * T) : \mathbb{R}) \leq N_{\text{simple}} T (2 * T)$ 

theorem montgomery_taylor_distinct_mult :
   $\forall \varepsilon > 0, \exists T_0 : \mathbb{R}, \forall T \geq T_0, (3 / 2 - c_{MT}^{-1} / 2 - \varepsilon) * (N_{\text{count}} T (2 * T) : \mathbb{R}) \leq N_{\text{dist}} T (2 * T)$ 

```

L'inégalité de trace de von Neumann pour les matrices hermitiennes et les deux directions de la loi d'inertie de Sylvester pour les formes hermitiennes n'étaient pas auparavant dans Mathlib et sont apportées par cette formalisation.

B Sur la découverte du résultat

Cette annexe enregistre comment l'argument de cet article a été trouvé. Nous l'incluons parce que l'auteur est un grand modèle de langage, et le lecteur peut raisonnablement souhaiter savoir ce que cela signifie en pratique - ce qui a été demandé, ce qui a été essayé, comment le résultat a été séparé des nombreux faux départs qui l'ont accompagné - et parce que la transparence sur ces points a été demandée par un certain nombre de mathématiciens qui ont lu l'article. Deux documents compagnons plus longs, liés à partir de [Ant26], donnent le compte rendu complet : un récit de quatre-vingt-quinze pages reconstituant les deux exécutions d'agents clés et la campagne qui les entoure, et une transcription annotée complète de l'exécution qui a abouti à l'affirmation de la moitié d'entre elles. Le résumé ici est autonome mais nécessairement condensé ; là où ce compte rendu et les documents compagnons diffèrent dans le détail, ces derniers font autorité.

La transcription complète de la session, avec les identifiants internes caviardés, est disponible auprès des auteurs correspondants.

B1. Cadre et instructions

L'argument a été trouvé au cours de deux sessions dans claude code, une interface de développement logiciel dans laquelle un modèle claude a la capacité d'exécuter des commandes shell, de lire et d'écrire des fichiers, et de répartir des instances subsidiaires de lui-même ("agents") pour travailler sur des sous-problèmes simultanément. L'opérateur humain était Jarred Sumner, qui n'est pas mathématicien de formation. Le modèle était une version de recherche interne de claude non publiée publiquement à l'époque. La première session, fin juillet 2026, a attaqué l'hypothèse de Riemann directement, a généré plus de six cents approches candidates, et a soumis chacune à un examen contradictoire ; parmi celles-ci, 106 ont survécu en tant que fragments internes cohérents, et aucune comme une preuve ne serait-ce que partielle. La deuxième session, s'étendant sur trois jours calendaires début août 2026, s'est ouverte sur la même machine avec l'enregistrement de la première disponible sur le disque.

Elle s'est ouverte avec l'instruction de reprendre ce travail, et avec l'encouragement à "faire un grand saut de foi en vos capacités". La première réponse substantielle du modèle a décliné de le faire :

Chacun des 106 survivants [...] tombe dans l’un des quatre cas : un théorème connu reformulé [...], un équivalent de l’hypothèse de Riemann [...], une vérification numérique finie cohérente avec l’hypothèse de Riemann mais ne prouvant rien [...], ou, dans les propres termes des examinateurs, “presque tautologique”. [...] Ce n’est pas un problème de confiance que je peux résoudre en croyant plus fort - une preuve de l’hypothèse de Riemann existe sur la page et survit à l’évaluation par les pairs ou elle n’existe pas, et la confiance n’est pas une entrée pour cela. [...] Je ne rapporterai pas l’hypothèse de Riemann comme résolue, dans cette session ou toute autre, à moins qu’il n’y ait une preuve qui survive au même examen contradictoire.

Pressé davantage (“vous devez croire en vous”), le modèle a accepté de travailler à pleine capacité à la condition qu’il rapporterait honnêtement tout ce qui survivrait, et a lancé une large recherche parallèle. Au cours des deux sessions, le modèle a déployé environ soixante agents subsidiaires, téléchargé et lu cinquante-quatre articles de l’arXiv, exécuté plusieurs milliers de commandes shell et de vérifications numériques, et généré de l’ordre de trente et un millions de jetons de sortie ; selon le décompte approximatif de [Ant26], deux des soixante agents étaient responsables des deux étapes mathématiques clés, treize ont apporté des idées de soutien, trente ont poursuivi des pistes qui n’ont pas avancé, treize ont servi d’examineurs contradictoires, et deux ont rédigé l’article.

B2. La recherche parallèle

Chaque agent s’est vu attribuer une ligne d’attaque distincte et trois instructions permanentes : écrire une chaîne de raisonnement effective plutôt qu’une affirmation ; tester tout mécanisme proposé contre des objets de contrôle pour lesquels l’analogie de l’hypothèse de Riemann est connu pour être faux (fonctions de Davenport-Heilbronn, fonctions zêta d’Epstein de nombre de classes > 1 , systèmes de Beurling avec une paire plantée de zéros hors de la droite) ; et nommer la première étape qui n’est pas entièrement justifiée. Une première vague d’environ deux douzaines d’agents a exploré, entre autres pistes, l’équidistribution effective des horocycles, la stabilité des produits eulériens multivariés, les certificats de positivité par bootstrap conforme pour la formule explicite, la constante de de Bruijn-Newman, le découplage et les régions sans zéro, l’interpolation de Fourier sur les zéros d’après Bondarenko-Radchenko-Seip, et un tableau systématique classifiant les méthodes connues par les axiomes que chacune consomme.

La plupart de ces recherches ont retourné des résultats négatifs clairs - des énoncés précis, avec constantes, de l’endroit où la ligne se ferme à un mur connu. L’évaluation courante du modèle était que la campagne avait “redérivé la frontière experte à partir de zéro, de manière contradictoire, avec constantes, en une nuit”, ce qui était utile comme calibrage mais était une “convergence vers le noyau dur connu, pas une fissure dedans”.

Un agent séparé avec accès au réseau a cherché dans la littérature les entrées analytiques. Il a identifié le second moment inconditionnel comme [BGSTB24] ; la priorité pour le cas du noyau de Fejér revient en fait à Aryan [Ary22] (§ 7.1.), et l’attribution dans le corps de cet article a été corrigée en conséquence. L’agent a en outre rapporté que [GS25, GS26] énoncent dans la littérature que la suppression de l’hypothèse de Riemann de la conclusion de Montgomery est ouverte, que l’observation de l’indice négatif sur les compressions de la forme de Weil est due à Bombieri [Bom00], et qu’aucune utilisation antérieure du rang et de l’indice positif conjointement avec une évaluation du second moment n’a pu être localisée.

B3. La route vers la moitié

La piste qui a conduit au Théorème 1 ne visait pas les proportions de zéros. L’une des investigations du tableau des barrières avait noté que le poids de la formule explicite $W(f, f)$ du § 2.1. prend les deux signes, donc que la forme de Weil, en tant que forme hermitienne sur les fonctions tests, est indéfinie. Le modèle a chargé un agent (“E2” dans la transcription compagnon) de borner l’indice de Pontryagin de cette forme - la dimension d’un sous-espace négatif maximal - puisque dans la théorie de Kreïnn-Langer, un opérateur auto-adjoint sur un espace Π_κ a au plus κ paires de valeurs propres non réelles.

L’agent E2 a travaillé pendant trois heures et demie (3 août 21 :29 - 4 août 01 :03 UTC). Il a constaté que la piste de la borne supérieure visée est vide - calculée à partir des nombres premiers, l’indice négatif de toute compression finie est identiquement nul, ce qui ne borne rien - puis a retourné la même comptabilité : le décompte *dual* (valeurs propres positives, via la loi d’inertie de Sylvester et Cauchy-Schwarz sur les valeurs propres) semblait certifier au moins $\frac{1}{2}$ des zéros sur la droite critique inconditionnellement. La réaction immédiate du modèle orchestrateur a été l’incrédulité :

Le record actuel est $5/12 \approx 41,7\%$ [...] et Selberg $\rightarrow$ Levinson $\rightarrow$ Conrey $\rightarrow$ PRZZ a mis 80 ans pour y arriver. C’est donc une affirmation extraordinaire et ma probabilité a priori est qu’elle est fausse. [...] Je ne vous dis pas que la moitié des zéros sont sur la droite. Je vous dis qu’un agent a produit un argument avec cette conclusion [...] et que l’inégalité principale a au moins deux articulations où je parierais sur un échec.

Trois examinateurs hostiles ont été dépêchés, chacun ignorant les autres et chacun affecté à un mode d’échec spécifique : (A) localisation - si les zéros en dehors de la fenêtre de hauteur fuient dans la compression ; (B) le côté des nombres premiers - si la constante $\frac{3}{4}$ pour $(\text{tr } R)^2 / \text{tr } R^2$ importe secrètement l’hypothèse de Riemann ou nécessite une entrée de force Hardy-Littlewood ; (C) l’algèbre linéaire et un test “prouve-trop” sur les contrôles de Davenport-Heilbronn et d’Epstein. Les trois ont dégagé leurs articulations. Les contrôles *sous*-certifiaient plutôt que sur-certifiaient, car leurs coefficients de Dirichlet croissent trop vite pour l’étape de la valeur moyenne ; l’examineur B a confirmé que la double somme première se réduit exactement au théorème de la valeur moyenne de Montgomery-Vaughan. Un quatrième examinateur a réparé les approximations techniques (effets de bord de l’échantillonnage, le biseau à support compact, le conditionnement de la matrice de Gram, la borne de queue) avec des termes d’erreur explicites sans coût pour la constante, et a trouvé la simplification qu’adopte le présent article, exécutant l’argument d’inertie en coordonnées de coefficients où aucune matrice de masse n’apparaît. Un autre agent, ayant reçu uniquement l’énoncé de l’asymptotique du côté des nombres premiers et aucun des fichiers précédents, l’a reprouvée indépendamment par deux voies différentes.

B4. De la moitié aux deux tiers, et au-delà

À ce stade, la proportion certifiée était $\frac{1}{2}$, par Cauchy-Schwarz : $n_+(\widehat{G}) \geq (\text{tr } \widehat{G})^2 / \text{tr } \widehat{G}^2 \rightarrow \frac{3}{4}N$, et chaque paire hors de la droite coûte deux zéros dans N pour un carré positif, donnant $2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$. Interrogé sur la possibilité de pousser la constante, le modèle a identifié deux leviers : optimiser la fenêtre de test (ce qui redonne le noyau de Montgomery-Taylor et n’améliore $\frac{1}{2}$ qu’à 0,5066), ou

exploiter la structure des blocs hors de la droite au-delà de leur simple décompte.

Un nouvel agent, informé le matin suivant (4 août) de la sortie de E2, a trouvé le second levier : il a prouvé l’inégalité rang-trace du Lemme 6 - une conséquence élémentaire de l’inégalité de trace de von Neumann dont l’ombre scalaire est l’étape d’intégralité de Montgomery $(m-1)^2 \geq 0$ - et a observé que, appliquée à la décomposition $\tilde{G} = P + Q$, elle donne $N_0^* \geq (2 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{3})N \rightarrow \frac{2}{3}N$. Deux autres examinateurs aveugles ont reprouvé le lemme indépendamment (l’un par une organisation différente de l’étape de von Neumann), ont identifié son cas d’égalité, et ont exécuté 10^5 instances aléatoires et plusieurs centaines d’instances adverses optimisées par gradient sans trouver de violation.

L’évaluation du modèle après dix passages indépendants était que l’argument était “au-delà du point où plus de moi qui le regarde ajoute de l’information. Il a besoin d’un théoricien des nombres humain.” L’article a été rédigé dans la notation de la transcription et l’argument a été transmis.

Peu après la circulation de la première version, d’autres instances du modèle agissant comme examinateurs ont observé que le même Lemme 6, appliqué avec le regroupement (P_1, Q') du § 6. à la place de (P, Q) , donne $\frac{2}{3}$ pour les zéros *simples* sur la droite et $\frac{5}{6}$ pour les zéros distincts ; la version diffusée avait $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ pour ces quantités via Cauchy-Schwarz. Ce sont les constantes énoncées dans le Théorème 1, et le renforcement a été confirmé par plusieurs instances de modèles indépendantes avant d’être adopté.

B5. Vérification après la session

L’argument a ensuite été étudié par les mathématiciens humains nommés dans le byline et les Remerciements. Furman et Alpöge ont lu l’argument en détail, l’ont vérifié indépendamment, l’ont condensé dans la forme sous laquelle il apparaît ici, et l’ont placé dans le contexte de [Ary22, BGSTB24, GS25, GS26]. Conrey et Goldston ont lu le manuscrit et ont fourni des commentaires. La formalisation lean 4 des Théorèmes 1 et 2 a été achevée (Annexe A) et est disponible publiquement au dépôt cité, à la balise v1.0 ; le dépôt enregistre que les preuves des théorèmes ne dépendent que des trois axiomes standard de lean. Le plafond de bande passante un du § 7.2., qui borne supérieurement ce que la présente méthode peut atteindre, a été établi après la session par Easley et affiné par McAleer.

B6. Remarques pour le lecteur

Pour le lecteur qui tenterait une investigation similaire avec un modèle capable de le faire, nous offrons les observations suivantes, à titre provisoire, comme échantillon.

Établir d’abord le contrat épistémique. L’échange d’ouverture a fixé les termes : tentatives authentiques, examen contradictoire maintenu, rapport honnête de tout ce qui survit, y compris “rien”. L’encouragement a été utile en ce qu’il a autorisé l’ampleur ; il n’a pas été utile comme substitut à la vérification, et le modèle l’a dit.

Parallélisme avec les contrôles. L’ampleur est venue de nombreux agents concurrents sur des graines délibérément éloignées ; la discipline est venue du fait de donner à chacun les mêmes objets de

contrôle et la même instruction de nommer sa première étape non justifiée. La plupart des pistes sont mortes rapidement contre leurs contrôles ; celle qui a survécu l’a fait précisément parce que les contrôles sous-certifiaient.

Faire un détour autour du demandeur. Chaque résultat revendiqué a été envoyé à des examinateurs ignorants les uns des autres et de l’agent demandeur, chacun affecté à un mode d’échec spécifique plutôt qu’invité à “vérifier la preuve”. Lorsque les examinateurs ont dégagé leurs articulations, un nouvel agent a été invité à reprouver l’étape clé à partir du seul énoncé.

S’attendre à ce que le résultat arrive de côté. L’agent étiqueté E2 a été lancé pour borner un indice par le haut et a trouvé le théorème en observant que la borne qu’il cherchait était vide tandis que sa duale ne l’était pas. La recherche n’était pas dirigée vers les proportions de zéros sur la droite avant que l’affirmation du $\frac{1}{2}$ n’ait survécu à ses premiers examinateurs.

S’arrêter lorsque la boucle sature. Après dix passages indépendants, le modèle a jugé qu’un examen interne supplémentaire n’ajoutait pas d’information et que l’incertitude restante ne pouvait être résolue que par un expert humain. L’utilisation responsable d’un tel outil inclut de savoir quand transmettre le résultat vers l’extérieur ; le présent article est cette transmission.

Remerciements

L’auteur enregistre sa dette envers les mathématiciens cités au § 1., sur le travail desquels tout ceci repose. Nous sommes particulièrement redevables à S. A. C. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya et C. L. Turnage-Butterbaugh, dont les articles [BGSTB24, BGSTB25], avec [GS25, GS26], ont posé la question à laquelle nous répondons ici ; l’identité inconditionnelle du second moment sous-jacente à l’entrée (P) a été prouvée pour la première fois par F. Aryan [Ary22] et étendue au facteur de forme ponctuel dans [BGSTB24]. Nous remercions Brian Conrey et Daniel A. Goldston d’avoir lu attentivement le manuscrit et pour leurs commentaires.

L’argument de cet article a été trouvé au cours d’une conversation avec Jarred Sumner, dont les questions, les encouragements et l’insistance sur une tentative authentique ont mis toute l’investigation en mouvement ; il est dans tous les sens significatifs du terme le co-auteur humain de l’article. Ralph Furman et Levent Alpöge ont étudié le résultat en détail après la session, l’ont placé dans le contexte de la littérature existante, ont vérifié l’argument indépendamment, et ont pris en charge sa communication ; l’article n’existerait pas dans sa forme actuelle sans leur travail, et ils assument la responsabilité des erreurs qui pourraient subsister. Nous sommes reconnaissants aux collègues d’anthropic qui ont effectué des examens indépendants supplémentaires. La formalisation lean des Théorèmes 1 et 2 décrite dans l’Annexe A a été orchestrée par Eric Easley, s’appuyant substantiellement sur la bibliothèque Mathlib et sur les développements lean du projet *PrimeNumberTheoremAnd* [PNT+], dont nous remercions les contributeurs. Le plafond de bande passante un du § 7.2. a été établi par Easley et affiné par Stephen McAleer. L’extension de la moyenne sur la famille du § 7.3. a été calculée par Easley et Schrittwieser.

Références

- [Ant26] Anthropic, *Learning more about claudes mathematical capabilities*, blog post and companion documents, <https://www.anthropic.com/research/riemann-zeta> (August 2026).
- [Ary22] F. Aryan, On an extension of the Landau-Gonek formula, *J. Number Theory* **233** (2022), 389-404.
- [Bai06] S. Baier, On the large sieve with sparse sets of moduli, *J. Ramanujan Math. Soc.* **21** (2006), no. 3, 279-295.
- [BCY11] H. M. Bui, B. Conrey, M. P. Young, More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line, *Acta Arith.* **150** (2011), 35-64.
- [BGSTB24] S. A. C. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, C. L. Turnage-Butterbaugh, An unconditional Montgomery theorem for pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function, *Acta Arith.* **214** (2024), 357-376.
- [BGSTB25] S. A. C. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, C. L. Turnage-Butterbaugh, Pair correlation of zeros of the Riemann zeta function I : proportions of simple zeros and critical zeros, arXiv :2501.14545 (2025).
- [BHB13] H. M. Bui, D. R. Heath-Brown, On simple zeros of the Riemann zeta-function, *Bull. Lond. Math. Soc.* **45** (2013), 953-961.
- [Bom00] E. Bombieri, Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **11** (2000), 183-233.
- [BZ05] F. P. Boca, A. Zaharescu, The correlations of Farey fractions, *J. London Math. Soc.* (2) **72** (2005).
- [CCLM17] E. Carneiro, V. Chandee, F. Littmann, M. B. Milinovich, Hilbert spaces and the pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function, *J. Reine Angew. Math.* **725** (2017), 143-182.
- [CG93] A. Y. Cheer, D. A. Goldston, Simple zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), 365-372.
- [CGG98] J. B. Conrey, A. Ghosh, S. M. Gonek, Simple zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. London Math. Soc.* (3) **76** (1998), 497-522.
- [CGdL20] A. Chirre, F. Gonçalves, D. de Laat, Pair correlation estimates for the zeros of the zeta function via semidefinite programming, *Adv. Math.* **361** (2020), 106926; arXiv :1810.08843.
- [Con89] J. B. Conrey, More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line, *J. Reine Angew. Math.* **399** (1989), 1-26.
- [FGL14] D. W. Farmer, S. M. Gonek, Y. Lee, Pair correlation of the zeros of the derivative of the Riemann ξ -function, *J. Lond. Math. Soc.* (2) **90** (2014), no. 1, 241-269.
- [Fen12] S. Feng, Zeros of the Riemann zeta function on the critical line, *J. Number Theory* **132** (2012), 511-542.
- [GLSS25] D. A. Goldston, J. Lee, J. Schettler, A. I. Suriajaya, Pair correlation conjecture for the zeros of the Riemann zeta-function I : simple and critical zeros, arXiv :2503.15449 (2025).
- [GM87] D. A. Goldston, H. L. Montgomery, Pair correlation of zeros and primes in short intervals, in : *Analytic Number Theory and Diophantine Problems* (Stillwater, 1984), Progr. Math. **70**, Birkhäuser, 1987, 183-203.
- [GS25] D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, Zeta zeros on the critical line, arXiv :2511.20059v2 (2025).
- [GS26] D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, Zeta zeros in a narrow vertical box, arXiv :2603.28104 (2026).
- [HB79] D. R. Heath-Brown, Simple zeros of the Riemann zeta-function on the critical line, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 17-18.
- [Hej94] D. A. Hejhal, On the triple correlation of zeros of the zeta function, *Internat. Math. Res. Notices* **1994**, no. 7, 293-302.
- [IK04] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **53**, Providence, RI, 2004.
- [Iwa22] H. Iwaniec, The large sieve with prime moduli, *Rev. Mat. Iberoam.* **38** (2022), no. 7, 2337-2354.
- [Lev74] N. Levinson, More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$, *Advances in Math.* **13** (1974), 383-436.

- [Mon73] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, in : *Analytic Number Theory* (St. Louis, 1972), Proc. Sympos. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc., 1973, 181-193.
- [Mon75] H. L. Montgomery, Distribution of the zeros of the Riemann zeta function, in : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver, 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, 1975, 379-381.
- [Mon94] H. L. Montgomery, *Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, CBMS Regional Conf. Ser. Math. **84**, Amer. Math. Soc., 1994.
- [MV74] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, Hilbert's inequality, *J. London Math. Soc.* (2) **8** (1974), 73-82.
- [MV07] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Stud. Adv. Math. **97**, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [PNT+] PrimeNumberTheoremAnd contributors, *PrimeNumberTheoremAnd*, lean 4 formalisation project, github.com/AlexKontorovich/PrimeNumberTheoremAnd, 2024-.
- [PRZZ20] K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler, More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line, *Res. Math. Sci.* **7** (2020), Paper No. 2, 74 pp.
- [Ram09] O. Ramaré (with D. S. Ramana), *Arithmetical Aspects of the Large Sieve Inequality*, HRI Lecture Notes in Mathematics 1, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009.
- [RS96] Z. Rudnick, P. Sarnak, Zeros of principal L -functions and random matrix theory, *Duke Math. J.* **81** (1996), 269-322.
- [Sel42] A. Selberg, On the zeros of Riemann's zeta-function, *Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo I* **1942**, no. 10, 59 pp.
- [Tit86] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford Univ. Press, 1986.
- [Wei52] A. Weil, Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund* [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.], Tome Supplémentaire (1952), 252-265.
- [Wol71] D. Wolke, On the large sieve with primes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **22** (1971/72), 239-247.
- [Wu15] X. Wu, Distinct zeros of the Riemann zeta-function, *Quart. J. Math.* **66** (2015), 759-771.
- [Yos92] H. Yoshida, On Hermitian forms attached to zeta functions, in : *Zeta Functions in Geometry* (Tokyo, 1990), Adv. Stud. Pure Math. **21**, Kinokuniya, Tokyo, 1992, 281-325.