Discussion sur les fondements des mathématiques
dimanche 7 septembre 1930

Hahn : Les remarques qui suivent ne sont que des pistes de réflexion et, par conséquent, nécessairement sommaires ; je vous prie donc de comprendre que je ne m'exprimerai nullement avec la précision requise en la matière.

Si l'on souhaite se prononcer sur l'une des positions concernant les fondements des mathématiques qui ont été exposées en détail ici, il faut d'abord se demander : qu'attend-on d'un fondement des mathématiques ? Et pour répondre à cette question, je dois introduire mes propos par quelques mots à portée philosophique.

Le seul point de vue possible sur le monde me semble être l'empirisme, que l'on peut caractériser, de façon assez sommaire, comme suit : toute connaissance qui possède un contenu et qui dit véritablement quelque chose sur le monde ne peut provenir que de l'observation, de l'expérience ; la connaissance de la réalité ne peut être acquise par la seule pensée ; et un simple regard ne peut fournir aucune connaissance qui dépasse le cas individuel considéré (cette dernière remarque s'adresse à toutes les doctrines de l'intuition pure et de la perspicacité essentielle). J'adopte ce point de vue empiriste non pas par choix parmi d'autres, mais parce qu'il me paraît le seul possible, car toute connaissance de la réalité par la seule pensée, par la seule intuition, par la perspicacité essentielle me semble relever du mysticisme.

L'application de ce point de vue empiriste semble aujourd'hui se heurter à un fait très simple : l'existence d'une logique et de mathématiques qui nous confèrent apparemment une connaissance absolument certaine et générale du monde. Ceci soulève la question fondamentale : comment le point de vue empiriste est-il compatible avec l'applicabilité de la logique et des mathématiques à la réalité ? À la lumière de cette question, j'estime qu'un fondement des mathématiques doit avant tout démontrer pourquoi l'applicabilité des mathématiques à la réalité est compatible avec le point de vue empiriste.

Les représentants de l'intuitionnisme et du formalisme qui se sont exprimés ici ont présenté leurs positions avec une telle clarté que l'on peut affirmer avec certitude que ni l'intuitionnisme ni le formalisme ne remplissent cette condition. Je considère les travaux de Brouwer et de Hilbert comme étant d'une grande importance en mathématiques, mais je ne les considère pas comme des fondements des mathématiques. M. Heyting a fondé sa présentation sur une intuition primordiale de la suite numérique. Cette intuition primordiale, comme l'intuition pure ou la perception de l'essence, a pour moi quelque chose de mystique, et ne convient donc pas comme point de départ pour le fondement des mathématiques. Dans sa présentation, M. Heyting partait d'une intuition primordiale de la suite numérique ; or, cette intuition primordiale, à l'instar de l'intuition pure ou de la perception de l'essence, revêt pour moi un caractère mystique et ne saurait donc servir de point de départ aux fondements des mathématiques. M. von Neumann, quant à lui, affirmait

Référence : Erkenntnis II. Erkenntnis est une revue philosophique mondialement reconnue, axée sur des domaines inspirés par la “philosophie scientifique”.

Traduction : Denise Vella-Chemla (avec l'aide de Google Translate), novembre 2025.

clairement que le formalisme présuppose l'intégralité de l'arithmétique finie pour justifier les mathématiques classiques ; mais un point de vue qui présuppose l'arithmétique finie ne saurait être considéré comme le fondement des mathématiques.

Avant de présenter mon point de vue, permettez-moi une brève explication. Considérons un ensemble d'objets liés par des relations ; projetons cet ensemble sur un domaine d'images de sorte que les objets et les relations de l'ensemble initial correspondent à ceux du domaine d'images. On peut alors considérer les objets et les relations du domaine d'images comme des symboles des objets et des relations de l'ensemble initial. Si la projection n'est pas biunivoque mais multivoque, alors un même état de choses dans l'ensemble initial correspondra à différents ensembles de symboles dans le domaine d'images. Ainsi, des transformations s'opèrent au sein de ce symbolisme, et il s'agit de définir des règles permettant de transformer un ensemble symbolique en un autre représentant le même état de choses dans le domaine d'origine. À mon sens, le langage se distingue de la réalité en ce qu'il attribue des ensembles symboliques aux états de choses du monde, non pas de manière univoque (ce qui serait peu utile), mais de manière multiple (un à plusieurs). La logique, quant à elle, spécifie les règles de transformation d'un ensemble symbolique du langage en un autre désignant le même état de choses. C'est ce qu'on appelle le caractère "tautologique" de la logique. Un exemple très simple en est la double négation : les propositions "p" et "non non p" désignent le même état de choses. Dès lors qu'il existe une correspondance multiple, il existe, en ce sens, une "logique" de cette correspondance. Ce que l'on appelle généralement logique, c'est le cas particulier où la correspondance concerne l'attribution de symboles linguistiques aux états de choses du monde.

La logique, par conséquent, ne dit rien du monde lui-même, mais se rapporte uniquement à la manière dont je parle du monde. Il est évident que, selon cette conception, l'existence de la logique est parfaitement compatible avec le point de vue empiriste, tandis que la conception de la logique comme doctrine des propriétés les plus générales des objets est totalement incompatible avec ce point de vue. Prenons comme exemple le principe logique $(x)\varphi(x) \supset \varphi(y)$, qui stipule : ce qui est vrai pour tous l'est aussi pour chaque individu. Ce principe ne dit rien du monde ; ce qui est vrai pour tous l'est aussi pour chaque individu n'est pas une propriété du monde. En réalité, les énoncés "$\varphi(x)$ est vrai pour tous les individus" et "$\varphi(y)$ est vrai pour chaque individu" ne sont que des symboles linguistiques différents désignant un même état de choses. Le principe logique cité n'exprime donc qu'une uniambiguïté du symbolisme utilisé comme langage ; il exprime le sens dans lequel le symbole "tous" est employé.

Revenons-en maintenant aux fondements des mathématiques. Le point de vue logistique présenté par M. Carnap affirme qu'il n'y a pas de différence entre les mathématiques et la logique. Si ce point de vue est tenable, alors, compte tenu de la clarification précédente de la place de la logique dans notre système de connaissance, la place des mathématiques l'est également ; de même que l'existence de la logique est compatible avec le point de vue empiriste, l'existence des mathématiques l'est aussi. C'est pourquoi, parmi les trois conceptions des fondements des mathématiques présentées ici, je privilégie le point de vue logistique.

Or, on peut effectivement constater que les propositions de l'arithmétique finie, telles que $3 + 5 = 5 + 3$, ont le même caractère tautologique que les propositions de la logique ; il suffit de se référer à la définition des symboles $3, 5, +$ et $=$. L'arithmétique finie ne pose donc aucune difficulté au point de vue logistique. Les choses ne sont pas aussi claires en ce qui concerne les méthodes d'inférence transcendantes en mathématiques, telles que la doctrine de l'induction complète, la théorie des ensembles et certains chapitres de l'analyse. Ici, des principes non tautologiques semblent jouer un rôle ; par exemple, l'axiome du choix paraît avoir un contenu réel, dire quelque chose sur le monde ; du moins, c'était la position de RUSSELL, et la tentative de RAMSEY d'attribuer un caractère tautologique à cet axiome a assurément échoué.

Le point de vue absolutiste-réaliste de RUSSELL postule que le monde est constitué d'individus, de propriétés des individus, de propriétés de ces propriétés, etc. ; et que les axiomes logiques sont des énoncés concernant ce monde. J'ai déjà affirmé que cette conception est incompatible avec un empirisme cohérent, et je considère la polémique de WITTGENSTEIN et des intuitionnistes à son encontre pleinement justifiée ; de même, la conception réaliste-métaphysique de RAMSEY, contre laquelle M. CARNAP s'est également opposé, me paraît impossible.

Bien que je m'oppose à l'interprétation philosophique que RUSSELL donne de son système, je crois néanmoins que les aspects formels de ce système sont globalement solides et parfaitement adaptés au fondement des mathématiques ; il s'agit simplement de rechercher une autre interprétation philosophique. Avant de tenter d'en suggérer une, j'aimerais souligner, pour faciliter la compréhension, un point qui vous est familier : prenons n'importe quel système d'axiomes de la géométrie euclidienne, par exemple celui de HILBERT. Ce système d'axiomes est parfaitement adapté à la description du monde ; pourtant, personne ne croit que l'on puisse trouver dans le monde des objets se comportant comme les points, les droites et les plans de la géométrie euclidienne ; ce ne sont que des idéalisations, des hypothèses formulées dans le but de décrire le monde de manière adéquate.

À l'instar de RUSSELL, je suppose que nous disposons d'un système de fonctions propositionnelles, de fonctions propositionnelles sur d'autres fonctions propositionnelles, et ainsi de suite, pour décrire le monde (ou plutôt, une partie du monde). (Cependant, contrairement à RUSSELL, je ne crois pas que ces fonctions propositionnelles soient des données absolues, démontrables dans le monde.) La description du monde varie selon la richesse de ce système de fonctions propositionnelles. Nous formulons donc certaines hypothèses quant à cette richesse. Par exemple, nous exigerons que si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ apparaissent dans le système, cela s'applique également à $\varphi(x) \vee \psi(x)$ et $\varphi(x) \wedge \psi(x)$. Nous supposerons également qu'en plus de $\varphi(x, y)$, $(y)\varphi(x, y)$ apparaît aussi dans le système. Nous pourrions même supposer que le système est si riche que même une construction comme $(x)\varphi(x)$ n'en découle pas. L'exigence que l'axiome de l'infini ou l'axiome du choix soient valides est, en ce sens, une exigence quant à la richesse du système de fonctions propositionnelles avec lequel je souhaite décrire le monde. L'ensemble des mathématiques découle de transformations tautologiques des exigences imposées à la richesse de notre système de fonctions propositionnelles. La vérité ou la fausseté d'une proposition particulière (par exemple, le théorème de cardinalité de l'ensemble des parties ou le théorème du bon ordre) dépend des exigences imposées à la richesse du système sous-jacent de fonctions propositionnelles, que l'on peut appeler axiomes ; la question de la validité absolue de telles propositions est totalement dénuée de sens.

On pourrait alors se demander : un tel système de fonctions propositionnelles, tel que requis ici, existe-t-il ? Au sens empirique (ou au sens réaliste de RUSSELL), un tel système n'existe assurément pas : il est impossible de le démontrer dans le monde. Il n'existe pas non plus au sens constructif des intuitionnistes. Mais cela importe peu ; de même que la géométrie euclidienne est très utile pour décrire le monde, bien que ses points, ses droites et ses plans ne puissent être exhibés, de même l'hypothèse d'un système de fonctions propositionnelles, telle que nous l'avons évoquée, est très utile pour décrire le monde, bien qu'un tel système ne puisse être démontré ni empiriquement ni constructivement. L'analyse ainsi construite est purement hypothétique : si je suppose qu'un système de fonctions propositionnelles, satisfaisant à certains critères de richesse, est à ma disposition pour décrire le monde, alors les propositions de l'analyse restent vraies dans une telle description. En fait, même la description du monde à l'aide des outils de l'analyse dépasse de loin toute possibilité de vérification empirique. Bien entendu, les exigences de richesse imposées au système postulé de fonctions propositionnelles doivent être présupposées exemptes de contradiction, ce qui nous amène à nous aligner sur les idées de Hilbert.

Que signifie donc une proposition existentielle dans l'analyse ainsi comprise ? Certes, elle n'affirme aucune constructibilité au sens intuitionniste ; mais est-elle pour autant aussi dénuée de sens que le croient les intuitionnistes ? Supposons qu'une proposition existentielle ait été démontrée par des moyens transcendants (c'est-à-dire non constructifs), par exemple, plus précisément, la proposition : "Il existe une fonction continue sans dérivée" ; quelqu'un tenterait-il alors encore de démontrer la proposition : "Toute fonction continue a une dérivée" ? Je ne le crois pas. Ainsi, cette simple proposition existentielle a une signification factuelle ; non pas qu'une telle fonction puisse être démontrée empiriquement dans le monde, ni qu'elle soit "constructible", mais cette proposition a plutôt la signification, disons, "scientifique et technique" d'un avertissement : n'essayez pas de démontrer la proposition : "Toute fonction continue a une dérivée", car vous n'y parviendrez pas. Je pense que la plupart des collègues qui participent activement à des recherches telles que celles menées dans le domaine de la théorie des fonctions réelles conviendront que tel est bien le rôle des simples "propositions existentielles".

Enfin, quelques mots sur la critique de Russell par Wittgenstein, dont M. Waismann a parlé ici. J'ai déjà indiqué que cette critique me semble justifiée sur des points essentiels. Cependant, je crois que la différence n'est pas toujours aussi grande qu'elle pourrait le paraître d'après la présentation de Waismann. Selon Russell, les nombres naturels sont des classes de classes ; la position de Wittgenstein est apparemment tout à fait différente ; mais si l'on considère que, selon Russell, les symboles de classe sont des symboles incomplets qu'il faut d'abord éliminer pour connaître le sens véritable d'une proposition, et si l'on effectue cette élimination selon les règles établies par Russell, alors on constate que les deux points de vue ne sont pas si différents. Certes, la distinction entre système et totalité, entre opération et fonction, soulignée par Wittgenstein, existe, et il est vrai que le système de Russell ne la fait pas. Cependant, opérations et fonctions, systèmes et totalités ont beaucoup en commun et peuvent donc être traités en grande partie conjointement, en utilisant la même symbolique. Pour que la critique sur ce point soit pertinente, il faudrait démontrer que Russell pousse cette approche conjointe trop loin, l'appliquant même à des cas où elle n'est plus valable en raison de différences effectives, et commettant ainsi une erreur.

Carnap : Je voudrais formuler quelques remarques sur les relations entre les trois principaux courants de recherche fondamentale en mathématiques. (L'approche de Wittgenstein, présentée par M. Waismann, recèle des idées importantes, mais n'est pas encore pleinement aboutie.) Certains auditeurs ont eu l'impression, à la lecture des trois présentations, que le problème était complexe et insoluble : trois courants s'ignorent mutuellement, et chacun aspire à repenser les mathématiques.

En réalité, la situation n'est pourtant pas aussi désespérée, comme nous le verrons.

La différence entre ces approches s'explique peut-être par les exigences différentes imposées à la structure des mathématiques selon les perspectives. Le logicien (représenté principalement par Frege, puis par Russell, et dans une moindre mesure par Brouwer) exige : "Tout signe du langage, et donc aussi du symbolisme mathématique, doit avoir une signification spécifique et exprimable.". Le mathématicien (représenté par Hilbert) s'y oppose : "Nous ne voulons pas être obligés de rendre compte de la signification des symboles mathématiques ; nous revendiquons le droit d'opérer axiomatiquement et librement, c'est-à-dire d'établir des axiomes et des règles de fonctionnement pour tout domaine mathématique, puis d'en rechercher formellement les conséquences.".

Ces deux exigences semblent incompatibles. Elles nous présentent l'opposition entre logicisme et formalisme. Cependant, je crois que cette opposition peut être surmontée. La troisième exigence, celle du physicien, nous montre la voie. Le physicien exige que le système logico-mathématique soit non seulement cohérent, mais aussi applicable au domaine des sciences empiriques. Car la finalité même de ce système est d'indiquer comment tirer des conclusions, c'est-à-dire quelles transformations de propositions sont permises. Ainsi, par exemple, nous exigerons que le système logico-mathématique nous permette de passer des propositions
"Tous les humains sont mortels"
et
"Tous les Grecs sont des humains"
à la proposition
"Tous les Grecs sont mortels".

Et en effet, la possibilité de cette transformation est spécifiée dans tous les systèmes logico-mathématiques connus. Mais nous exigerons également de ces systèmes qu'ils nous permettent, par exemple, de transformer la phrase :
"Dans cette pièce, il n'y a que Hans et Peter"
en la phrase :
"Dans cette pièce, il y a deux personnes".

Autrement, nous ne pouvons appliquer l'arithmétique à l'observation empirique. Si le mathématicien n'a pas à se préoccuper de cette application dans son propre domaine, dans le cadre de la science dans son ensemble, nous devons bien sûr exiger la possibilité d'appliquer l'arithmétique aux énoncés concernant la réalité ; sans cela, la physique ne pourrait être pratiquée. Cette exigence est-elle satisfaite par les systèmes logiciste et formaliste ? Avec la méthode de Frege-Russell pour définir les nombres, on peut tirer la conclusion susmentionnée. Avec l'introduction axiomatique des nombres par Hilbert, cela n'est pas certain, car la forme précise du système d'axiomes n'est pas encore disponible. En tout état de cause, ce système peut être complété par l'insertion de certains axiomes afin de permettre des transformations de la forme susmentionnée. Je crois désormais que l'opposition entre logicisme et formalisme peut, dans un certain sens, être surmontée dès lors que le système de ce dernier aura subi le complément nécessaire indiqué.

Considérons d'abord la structure du système logico-mathématique telle qu'elle est mise en œuvre selon la méthode de Hilbert. L'aspect essentiel de cette méthode, à mon sens, réside dans la distinction entre mathématiques formelles (incluant la logique) et métamathématiques substantielles. Les mathématiques consistent en des formules dont le sens est négligé ; la métamathématiques spécifie les transformations admissibles de ces formules et étudie le système des formules dérivables des formules fondamentales. Cette méthode de division présente l'avantage majeur de libérer le mathématicien, dans son domaine, des contraintes imposées par le logicien quant à l'interprétation des symboles, tout en satisfaisant aux exigences finitistes-constructivistes sur le plan substantiel, c'est-à-dire en métamathématiques.

Le logicisme exige cependant que non seulement la métamathématique, mais aussi les mathématiques elles-mêmes soient porteuses de sens. Avec la structure susmentionnée, cette exigence semble de prime abord non respectée. Je crois néanmoins qu'elle peut être satisfaite ultérieurement. En effet, une fois les ajouts au système logico-mathématique, dont nous avons précédemment examiné la nécessité, effectués, une analyse logique ultérieure de sa structure devrait nous permettre d'élucider la signification des symboles mathématiques initialement introduits de manière purement formelle. Par exemple, l'analyse logique de la formule qui permet la transformation du théorème de Hans-Peter en théorème des Deux conduira à la conclusion que le symbole "2" a précisément la signification que lui attribue le logicisme. De cette manière, l'introduction formaliste des nombres naturels recevrait une interprétation logiciste.

La structure formaliste introduira les systèmes numériques restants après les nombres naturels. Ce système comprendra des axiomes définissant les relations entre les nombres naturels et les fractions rationnelles, entre ces dernières et les nombres réels, entre ces derniers et les nombres complexes, et entre les nombres naturels et les nombres transfinis. L'analyse logique consistera alors à suivre cette structure étape par étape et à découvrir ainsi la signification de tous les symboles mathématiques. La structure formaliste ne peut se dispenser de spécifier les règles de fonctionnement des symboles mathématiques, c'est-à-dire les règles qui déterminent leur usage non seulement en mathématiques, mais aussi en sciences empiriques. Par cette spécification, la signification de tous les symboles est implicitement déterminée. Car (comme M. Waismann l'a souligné précédemment), la signification d'un concept réside dans son usage.

Ma conjecture porte maintenant plus précisément sur le fait que cette analyse logique du système formaliste aboutira au résultat suivant : si cette hypothèse est correcte, alors le logicisme serait justifié malgré sa méthode de construction formaliste, et l'opposition entre les deux directions serait surmontée :

1. À chaque symbole mathématique peut correspondre une ou plusieurs significations ; il s'agit de significations purement logiques.

2. Si le système d'axiomes est cohérent, alors toute formule mathématique devient une tautologie (un énoncé universellement valable) dès lors que l'on substitue à chaque symbole mathématique (ou à l'une quelconque de ses significations) sa signification logique.

3. Si le système d'axiomes est complet (au sens de Hilbert : aucune formule non dérivable ne peut y être ajoutée sans contradiction), alors l'analyse des significations devient univoque ; chaque symbole possède une signification unique ; ainsi, la structure formaliste se transforme en une structure logiciste.

Le développement des idées exposées ci-dessus ne pourra être entrepris qu'une fois le système d'axiomes logico-mathématiques de Hilbert pleinement établi. Si, outre la présentation du système d'axiomes lui-même, la démonstration de cohérence souhaitée pour le système ou certaines de ses parties était également fournie, l'analyse de la signification logique s'en trouverait considérablement facilitée. En effet, à mon sens, toute démonstration de cohérence contient, explicitement ou implicitement, la démonstration d'un modèle formel (Hilbert lui-même en a donné une indication dans ce sens dans un cas précis, voir sa *Logique*, p. 65 [1]). Au sein de ce modèle, cependant, je crois que la signification logique des symboles formalistes deviendrait manifeste.

Si j'ai exprimé ici l'espoir d'une réconciliation des approches opposées, mon intention n'est pas d'occulter les contradictions et les difficultés existantes. Au contraire, il serait préférable que chaque approche s'efforce de développer ses idées fondamentales avec la plus grande rigueur et cohérence possible. Je suis convaincu que ces efforts aboutiront finalement à un résultat commun.

v. Neumann : Concernant votre interprétation de la cohérence, je tiens à souligner que je doute de sa réelle possibilité. La situation est la suivante : Hilbert introduit effectivement des symboles dénués de sens. Mais cette introduction n'est pas une fin en soi pour lui. Les expériences agréables que l'on a avec les entiers positifs ne justifient pas l'optimisme quant aux résultats ultérieurs. Si la démonstration de la cohérence par Hilbert est concluante, on peut se demander si elle fournit une interprétation possible. Pour qu'un système d'axiomes soit cohérent, il suffit qu'un sous-ensemble fini le soit. C'est pourquoi on tente de spécifier une interprétation possible pour les sous-ensembles finis du système. La fluctuation constante de ces interprétations provisoires prouve qu'il est difficile d'en aboutir à une interprétation définitive. On peut en effet parvenir à une démonstration de cohérence sans trouver d'interprétation pour les mathématiques. Je ne crois donc pas que la démonstration de cohérence soit suffisante. J'aimerais demander à M. Hahn : son point de vue rejette-t-il l'axiome de réductibilité ?

Hahn : Oui.

v. Neumann : Alors les mathématiques classiques ne peuvent être fondées par des moyens logiques. On pourrait obtenir quelque chose de plus que l'intuitionnisme, mais pas les mathématiques classiques.

Hahn : L'axiome de réductibilité n'est nécessaire que pour réduire la théorie des types ramifiés à la théorie des types simples. Or, la théorie des types ramifiés n'est nécessaire que pour résoudre les contradictions qui ne sont pas de nature extensionnelle. Puisque les mathématiques sont purement extensionnelles, seule la théorie des types simples est nécessaire à leur fondement, et donc aucun axiome de réductibilité n'est requis.

1. *Note de la traductrice : on suppose qu'il est fait référence ici au livre David Hilbert et Wilhelm Ackermann (1928). Grundzüge der theoretischen Logik (Principes de logique théorique). Springer-Verlag, 1928.*

Carnap : La tentative d'interpréter le système d'axiomes formels ne me semble pas vaine. Si une interprétation est possible pour tout sous-système fini, telle que ces interprétations soient déterminées par une loi générale, alors cette loi fournit déjà, de fait, une interprétation de l'ensemble du système. Car une interprétation peut aussi avoir une forme disjonctive ("ce signe a cette signification dans ce contexte, cette autre signification dans cet autre contexte") et donc aussi être donnée de manière fonctionnelle.

Pour chaque symbole mathématique, il doit exister des règles au sein du système mathématique permettant de déduire les propositions réelles contenant ce symbole à partir de celles qui ne le contiennent pas. On peut ici appliquer la thèse de Wittgenstein selon laquelle le sens d'un symbole se révèle dans son usage, et plus précisément, la thèse selon laquelle toute proposition réelle dérivée est une fonction de vérité des propositions élémentaires dont elle est issue. Si l'on imagine le schéma combinatoire des "possibilités de vérité" des propositions réelles ne contenant pas le symbole mathématique en question, la règle d'inférence nous permettra de déduire la proposition réelle contenant le symbole mathématique à partir de certaines possibilités de vérité (les lignes du schéma), mais pas à partir des autres. Considérons ensuite l'ensemble des possibilités de vérité pour lesquelles la dérivation est possible. La disjonction des propositions de cet ensemble donne alors le sens de la proposition contenant le symbole mathématique, sans toutefois le contenir elle-même. Ainsi, il me semble, on trouverait alors une interprétation du symbole mathématique.

Scholz : Si l'on présente le formalisme comme un schéma, alors un théorème, s'il est vrai, est déjà réalisable dans l'ensemble dénombrable. On pourrait dire qu'il est superflu d'aller au-delà des ensembles dénombrables car un système d'axiomes, s'il est réalisable, peut déjà l'être dans l'ensemble dénombrable. Mais qu'en est-il de la cardinalité plus élevée des nombres réels par rapport aux nombres rationnels ?

v. Neumann : On ne peut dénombrer tout le continuum si l'on utilise uniquement des fonctions construites purement logiquement. Cependant, on peut construire cette application de l'extérieur à l'aide d'autres fonctions. Il n'y a pas de contradiction.

Heyting : Un résultat important de cette conférence est pour moi que la relation entre formalisme et intuitionnisme a été pleinement clarifiée. Je partage entièrement l'opinion de von Neumann. Quelle est donc cette relation ? Les deux approches sont possibles en elles-mêmes et toutes deux peuvent légitimement porter le nom de mathématiques, car elles sont issues des mathématiques classiques par réinterprétation. Le mot "mathématiques" signifie assurément, d'une part, une construction conceptuelle et, d'autre part, un jeu avec des formules. Certaines relations existent entre les deux approches ; le formalisme a besoin de l'intuitionnisme, au moins partiellement, en ce qui concerne les entiers et le raisonnement par induction. Par ailleurs : une fois la preuve de cohérence établie, le formalisme peut servir de moyen de démonstration pour l'intuitionnisme, car les symboles formels peuvent être compris intuitionnistement comme des données mathématiques. Cette compréhension est possible car les mathématiques existent pour les deux approches avant même d'être appliquées à la nature, à la réalité. C'est aussi pourquoi une compréhension avec le logicisme est encore impossible. Il faudrait d'abord expliquer comment les mathématiques peuvent être appliquées à la réalité. Cette question est loin d'être entièrement résolue. Les logiciens ne veulent pas renoncer à utiliser le concept de monde dans la construction même des mathématiques.

Par conséquent, une clarification définitive n'est pas encore possible.

Gödel : Selon la conception formaliste, on ajoute des (pseudo-)propositions transfinies aux propositions signifiantes des mathématiques. Ces propositions n'ont pas de signification intrinsèque et servent uniquement à compléter le système, de la même manière qu'on obtient un système complet en géométrie en introduisant des points à l'infini. Cette conception présuppose que si l'on ajoute le système T de propositions et d'axiomes transfinis au système S de propositions signifiantes, puis que l'on démontre indirectement une proposition de S par des propositions de T, cette proposition est également substantiellement correcte ; autrement dit, aucune proposition substantiellement fausse ne peut être démontrée par l'ajout des axiomes transfinis. Cette exigence est généralement remplacée par celle de cohérence. Je tiens à préciser que ces deux exigences ne doivent en aucun cas être considérées comme équivalentes. Car si une proposition significative p peut être démontrée à l'aide des axiomes transfinis dans un système formel cohérent A (tel que celui des mathématiques classiques), alors la cohérence de A implique simplement que non p ne peut être formellement démontrée au sein du système A. Néanmoins, il reste concevable que l'on puisse désactiver non p par un mécanisme lié au contenu (comme en mathématiques classiques) si un théorème significatif p peut être démontré à l'aide des axiomes transfinis, alors la cohérence de A implique simplement que non p est formellement indémontrable dans le système A. Néanmoins, il reste concevable de déduire non p par des considérations substantielles (intuitionnistes) qui ne peuvent être formellement représentées dans A. Dans ce cas, malgré la cohérence de A, un théorème dont la fausseté pourrait être déduite par des considérations finies serait démontrable dans A. Dès lors que l'on définit le concept de "théorème significatif" de manière suffisamment restrictive (par exemple, en le restreignant aux équations à nombres finis). Commentaire : une telle chose est impossible. En revanche, il serait tout à fait possible, par exemple, de démontrer un théorème de la forme $(Ex)F(x)$, où F est une propriété finie des nombres naturels (la négation du théorème de Goldbach, par exemple, a cette forme), en utilisant les méthodes transfinies des mathématiques classiques, et, d'autre part, de constater, par des considérations substantielles, que tous les nombres possèdent la propriété non F. Et, comme je le soulignais, cela reste possible même si l'on avait démontré la cohérence du système formel des mathématiques classiques. Car on ne peut affirmer avec certitude que toutes les considérations substantielles peuvent être représentées dans n'importe quel système formel.

v. Neumann : Il n'est pas certain que toutes les inférences intuitionnistes admissibles puissent être reproduites formalistiquement.

Gödel : On peut (en supposant la cohérence des mathématiques classiques) même donner des exemples de propositions (notamment celles de type Goldbach ou Fermat) vraies quant à leur contenu, mais indémontrables dans le cadre formel des mathématiques classiques. Par conséquent, si l'on ajoute la négation d'une telle proposition aux axiomes des mathématiques classiques, on obtient un système cohérent dans lequel une proposition fausse quant à son contenu peut être démontrée.

Reigemeister : Je voudrais conclure cette discussion par quelques remarques qui n'apportent rien de nouveau, mais qui mettent plutôt en lumière certains points abordés : trois points qui se sont révélés particulièrement importants pour clarifier les trois positions fondamentales et leurs interrelations.

1. Quel rôle joue l'axiome de réductibilité dans le système de Russell ? L'échange d'idées entre von Neumann et Hahn a révélé qu'il s'agit d'une question très spécifique concernant la théorie logistique pleinement développée. Cette question n'a pas été suffisamment clarifiée dans la littérature allemande. Je peux annoncer qu'une conférence sur ce sujet est prévue prochainement. Elle abordera également la thèse dite de l'extensionalité.

2. Comment l'interprétation du système de Russell par Hahn se rapporte-t-elle à l'interprétation formaliste de ce même système ? Les formalistes soutiennent également que l'interprétation substantielle donnée par Russell à son système n'est pas nécessairement liée au système lui-même ; ils dissocient plutôt le système formel de sa signification. Mais comment, d'un point de vue logistique, formuler le premier outil d'une telle réinterprétation, à savoir le concept d'énoncé essentiellement dénué de sens ? Comment quelqu'un qui ne partage pas le point de vue purement intuitionniste selon lequel la logique relève de la combinatoire et que les phrases peuvent être construites à partir de signes peut-il appréhender un énoncé dénué de sens ?

3. Quelle est la signification d'une phrase au sens intuitionniste et au sens logistique ? Je fais référence à un point soulevé par Carnap, à savoir qu'il serait possible de donner un sens à un système formaliste par le biais d'une preuve de cohérence. Que signifie ici le terme "signification" ? Certainement pas ce qu'un intuitionniste entend par là. La différence la plus significative entre les deux camps réside peut-être dans la manière dont le mot "signification" est compris. Ce point n'a pas toujours été clairement reconnu par les tenants de la logistique, et il est donc important de tracer une ligne de démarcation nette entre ces conceptions très différentes du terme "signification".

Addendum

Les rédacteurs d'"Erkenntnis" m'ont demandé de résumer les résultats de mon traité récemment publié, "*Sur les propositions formellement indécidables des "Principia Mathematica" et des systèmes apparentés"*, paru dans le Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVIII et qui n'était pas encore disponible à la conférence de Königsberg. Ce travail aborde deux types de problèmes : 1. la question de la complétude (ou de la détermination des décisions) des systèmes formels de mathématiques, et 2. la question des preuves de cohérence pour de tels systèmes. Un système formel est dit complet si toute proposition exprimable par ses symboles est formellement décidable à partir des axiomes, c'est-à-dire si, pour toute proposition A, il existe une chaîne de raisonnement finie, procédant selon les règles du calcul logique, qui commence par certains axiomes et aboutit à la proposition A ou à la proposition non A. Un système est dit complet par rapport à une certaine classe d'énoncés R si au moins chaque énoncé de R est décidable à partir de ses axiomes. L'étude précédente montre qu'il n'existe aucun système comportant un nombre fini d'axiomes qui soit complet, même par rapport aux énoncés arithmétiques.[2] Les "propositions arithmétiques" sont entendues comme les propositions dans lesquelles n'apparaissent aucun autre concept que le signe $+$ (addition, multiplication, élément neutre, etc., par rapport aux nombres naturels), les connecteurs logiques du

2. À condition qu'aucune proposition arithmétique fausse (c'est-à-dire substantiellement réfutable) ne puisse être prouvée à partir des axiomes du système en question.

calcul propositionnel, et enfin l'univers et le signe existentiel, mais uniquement par rapport aux variables dont le domaine est l'ensemble des nombres naturels (par conséquent, aucune variable autre que celles des nombres naturels n'apparaît dans les propositions arithmétiques). Même pour les systèmes comportant une infinité d'axiomes, il existe toujours des propositions arithmétiques indécidables si seulement la "règle axiomatique" satisfait certaines hypothèses (très générales). Il découle notamment de ce qui précède que tous les systèmes formels de mathématiques connus, par exemple le "principe mathématique" (incluant les axiomes de réductibilité, de choix et d'infini), les systèmes d'axiomes de Zermelo-Fränkel et de von Neumann en théorie des ensembles, ainsi que les systèmes formels de l'école hilbertienne, contiennent des propositions arithmétiques indécidables. Concernant les résultats des démonstrations de cohérence, il convient de préciser qu'il s'agit de démonstrations de cohérence au sens formel (hilbertien). Le sens concerne la cohérence, c'est-à-dire une propriété purement combinatoire de certains systèmes symboliques et des "règles du jeu" qui leur sont applicables. Or, les faits combinatoires peuvent être exprimés dans les symboles des systèmes mathématiques (comme dans les "*Principia mathematicae*"). Par conséquent, l'énoncé de la cohérence d'un système formel donné est souvent exprimable dans les symboles de ce système lui-même (ceci s'applique notamment à tous les systèmes mentionnés précédemment). On démontre ici que, pour tous les systèmes formels pour lesquels l'existence de propositions arithmétiques indécidables a été affirmée plus haut, l'énoncé de la cohérence du système en question figure, en particulier, parmi les propositions indécidables de ce système. Autrement dit, une preuve de cohérence pour l'un de ces systèmes ne peut être réalisée qu'à l'aide d'inférences non formalisées. Pour un système où toutes les formes de preuve finies (c'est-à-dire intuitionnistement valides) sont formalisées, une preuve finie de la cohérence, telle que recherchée par les formalistes, serait donc impossible. Cependant, il semble douteux que l'un des systèmes proposés jusqu'à présent, tel que celui des "*Princ. Math.*", soit aussi complet (ou même qu'un tel système complet existe).

Kurt Gödel, Vienne.