

Deux extraits du livre *Projective geometry* de H. S. M. COXETER, chez Springer.

### 5.3 Involutions<sup>1</sup>

Les travaux de Desargues n'ont pas été bien accueillis de son vivant. Ce manque d'appréciation était peut-être dû à son style obscur ; il a introduit environ soixante-dix nouveaux termes, dont seule l'involution a survécu. Selon sa définition, formulée en termes du concept non projectif de distance et du concept arithmétique de multiplication, une “involution” est la relation entre des paires de points sur une droite dont les distances à un point fixe ont un produit constant (positif ou négatif). Il aurait très bien pu ajouter “ou une somme constante”. Une définition équivalente, n'utilisant pas de distances, a été donnée par von Staudt : une involution est une projectivité de période deux, c'est-à-dire une projectivité qui intervertit des paires de points. Il est remarquable que cette relation

$$XX' \wedge X'X$$

est valable pour toutes les positions de  $X$  si elle est valable pour une position quelconque :

**5.31** *Toute projectivité qui intervertit deux points distincts est une involution.*

*Preuve.* Soit  $X \wedge X'$  la projectivité donnée qui intervertit deux points distincts  $A$  et  $A'$ , de sorte que

$$AA'X \wedge A'AX',$$

où  $X$  est un point arbitraire de la droite  $AA'$ . D'après le théorème 1.63, il existe une projectivité pour laquelle  $AA'XX' \wedge A'AX'X$ . D'après le théorème fondamental 4.12, cette projectivité, qui intervertit  $X$  et  $X'$ , est identique à la projectivité donnée. Puisque  $X$  a été choisi arbitrairement, la projectivité donnée est une involution.

Quatre points colinéaires  $A, A', B, B'$  déterminent une projectivité  $AA'B \wedge A'AB'$ , que nous savons maintenant être une involution. Ainsi,

**5.32** *Une involution est déterminée par deux de ses paires.*

Par conséquent, il est commode de noter l'involution  $AA'B \wedge A'AB'$  par

$$(AA')(BB')$$

ou  $(A'A)(BB')$ , ou  $(BB')(AA')$ , et ainsi de suite. Cette notation reste valable lorsque  $B'$  coïncide avec  $B$  ; autrement dit, l'involution  $AA'B \wedge A'AB$ , pour laquelle  $B$  est invariant, peut être notée par

$$(AA')(BB).$$

---

1. p. 45 à 47.

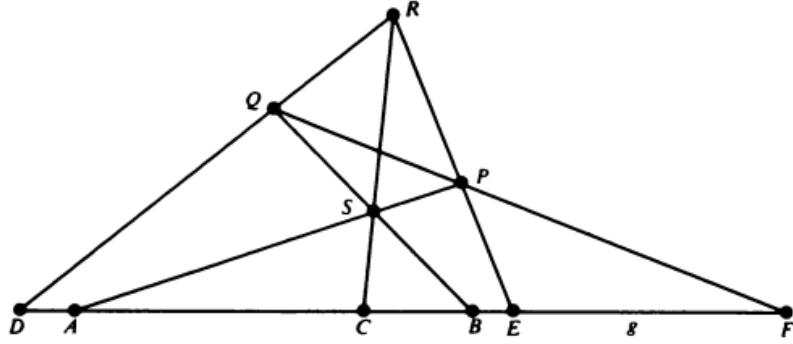


FIGURE 2.4A

Si  $(AD)(BE)(CF)$ , comme dans la figure 2.4A, on peut combiner la projectivité  $AECF \wedge BDCF$  de 5.11 avec l'involution  $(BD)(CF)$  pour obtenir

$$AECF \wedge BDCF \wedge DBFC,$$

qui montre qu'il existe une projectivité pour laquelle  $AECF \wedge DBFC$ . Puisque cela intervertit  $C$  et  $F$ , il s'agit d'une involution, à savoir

$$(BE)(CF) \text{ ou } (CF)(AD) \text{ ou } (AD)(BE).$$

Ainsi, la relation quadrangulaire  $(AD)(BE)(CF)$  équivaut à affirmer que la projectivité  $ABC \wedge DEF$  est une involution, ou que

$$ABCDEF \wedge DEFABC.$$

Autrement dit,

**5.33** *Les trois paires de côtés opposés d'un quadrangle complet rencontrent une droite quelconque (ne passant pas par un sommet) dans trois paires d'une involution. Inversement, trois points colinéaires, avec leurs homologues dans une involution, forment un ensemble quadrangulaire.*

Il s'ensuit que la construction de  $F$ , lorsque  $A, B, C, D, E$  sont donnés (comme dans le préambule de 2.41), peut être considérée comme une construction du conjugué de  $C$  dans l'involution  $(AD)(BE)$ . (Voir Figure 2.4A ou 5.1A)

Nous avons vu que  $CF$  est un couple de l'involution  $(AD)(BE)$  si et seulement si  $AECF \wedge BDCF$ . Il faut s'habituer à utiliser d'autres lettres dans le même contexte. Par exemple,  $MN$  est un couple de l'involution  $(AB')(BA')$  si et seulement si  $AA'MN \wedge BB'MN$ . Puisque  $(AB')(BA')$  est identique à  $(AB')(A'B)$ , il s'ensuit que les deux énoncés

$$AA'MN \wedge BB'MN \quad \text{et} \quad ABMN \wedge A'A'MN$$

sont équivalents (*remarque* : seuls les énoncés sont équivalents : les deux projectivités sont, bien sûr, distinctes).

Si deux involutions,  $(AA')(BB')$  et  $(AA_1)(BB_1)$ , ont une paire commune  $MN$ , on en déduit

$$A'B'MN \wedge BAMN \wedge A_1B_1MN.$$

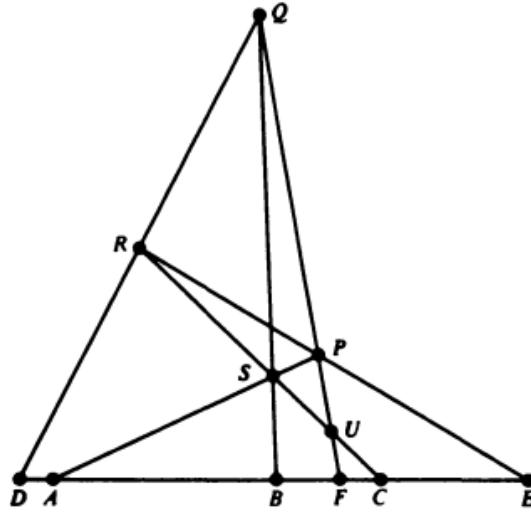


FIGURE 5.1A

Par conséquent

**5.34** *Si  $MN$  est un couple de chacune des involutions  $(AA')(BB')$  et  $(AA_1)(BB_1)$ , il est aussi un couple de  $(A'B_1)(B'A_1)$ .*

Tous ces résultats restent valables lorsque  $M$  et  $N$  coïncident, de sorte que nous avons affaire à des projectivités paraboliques (au lieu d'hyperboliques). Ainsi,  $M$  est un point invariant de l'involution  $(AB')(BA')$  si et seulement si  $AA'MM \wedge BB'MM$ , c'est-à-dire si et seulement si  $ABMM \wedge A'B'MM$ ; et si  $M$  est un point invariant de chacune des involutions  $(AA')(BB')$  et  $(AA_1)(BB_1)$ , il est également un point invariant de  $(A'B_1)(B'A_1)$ .

Si deux involutions ont une paire commune  $MN$ , leur produit est évidemment hyperbolique, avec des points invariants  $M$  et  $N$ . En effet, en observant leur effet sur  $A, M, N$  tour à tour, nous voyons que le produit de  $(AB)(MN)$  et  $(BC)(MN)$  est  $AMN \wedge CMN$ . Plus intéressant encore,

**5.35** *Toute projectivité unidimensionnelle peut être exprimée comme le produit de deux involutions.*

*Preuve.* Soit la projectivité donnée  $ABC \wedge A'B'C'$ , où ni  $A$  ni  $B$  ne sont invariants. En observant l'évolution de  $A, B, C$ , on constate que cette projectivité a le même effet que le produit des deux involutions

$$(AB')(BA') \quad \text{et} \quad (A'B')(C'D),$$

où  $D$  est le correspondant de  $C$  dans  $(AB')(BA')$ . (J. L. Coolidge, *A Treatise on the Circle and the Sphere*, Clarendon Press, Oxford, 1916, p. 200.)

### 9.3 Coniques passant par quatre points donnés

Desargues a non seulement inventé le mot involution (au sens géométrique), mais il a également montré comment les couples de points appartenant à une involution sur une droite proviennent d'un "faisceau" de coniques passant par quatre points. C'est son "théorème d'involution", encore plus remarquable que son "théorème des deux triangles".

**9.31 THÉORÈME D'INVOLUTION DE DESARGUES :** *Parmi les coniques qui peuvent être tracées par les sommets d'un quadrilatère donné, celles qui rencontrent une droite donnée (et non un sommet) le font par paires d'une involution.*

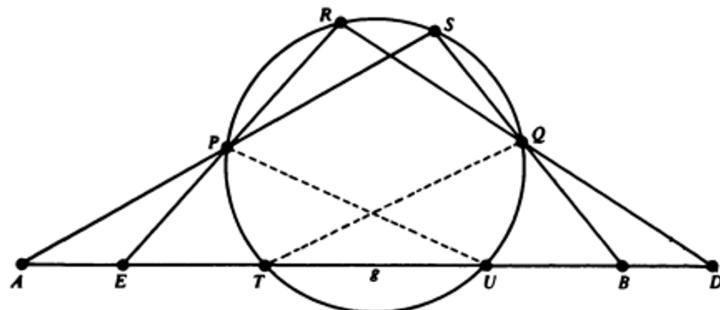


FIGURE 9.3A

*Preuve.* Soit  $PQRS$  le quadrangle donné, et  $g$  la droite donnée, coupant les côtés  $PS, QS, QR, PR$  en les points  $A, B, D, E$  et l'une quelconque des coniques de  $T$  et  $U$  (voir Figure 9.3A). En considérant  $S, R, T, U$  comme quatre positions d'un point variable sur cette conique, on voit, d'après 8.32, que les quatre droites les joignant à  $P$  sont reliées projectivement aux quatre droites les joignant à  $Q$ . Par conséquent

$$AETU \overline{\wedge} BDTU.$$

Puisque, d'après le théorème 1.63,  $BDTU \overline{\wedge} DBUT$ , il s'ensuit que

$$AETU \overline{\wedge} DBUT.$$

Par conséquent,  $TU$  est un couple de l'involution  $(AD)(BE)$ . Puisque cette involution ne dépend que du quadrangle, toutes les coniques du faisceau qui coupent  $g$  (ou touchent  $g$ ) déterminent des couples (ou points invariants) de la même involution.

En se référant à nouveau à la figure 9.3A, on observe que, lorsque  $S$  et  $Q$  coïncident, la droite  $SQ$  (qui détermine  $B$ ) est remplacée par la tangente en  $Q$ . Tout le reste demeure. Par conséquent :

**9.32.** *Parmi les coniques qui peuvent être tracées de manière à toucher une droite donnée en un point donné tout en passant également par deux autres points donnés, celles qui rencontrent une autre droite donnée (ne passant par aucun des trois points donnés) le font par paires d'une involution.*

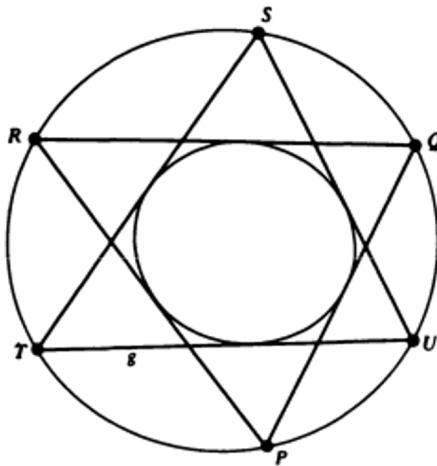
De même, en faisant coïncider  $R$  et  $P$ , on obtient une preuve alternative du théorème 8.42.

## 9.4 Deux triangles autopolaires

En combinant 9.31 et 7.22, on constate que l'involution déterminée sur  $g$  (Figure 9.3A) par le quadrangle  $PQRS$  est non seulement l'involution de Desargues déterminée par les coniques passant par  $P, Q, R, S$ , mais aussi l'involution des points conjugués sur  $g$  pour la polarité  $(PQR)(Sg)$ . Ainsi :

**9.41** *Si deux triangles ont six sommets distincts, tous situés sur une conique, il existe une polarité pour laquelle les deux triangles sont autopolaires.*

Et inversement (Figure 9.4A),



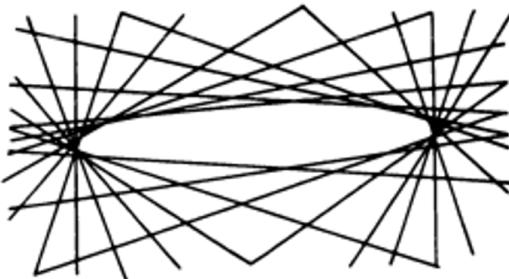
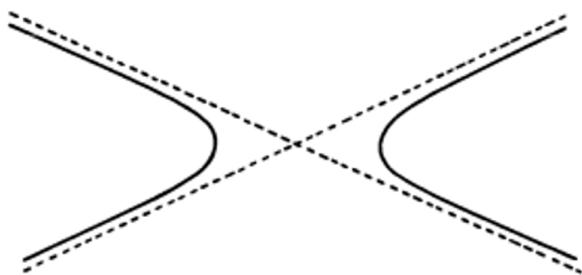
**FIGURE 9.4A**

**9.42** *Si deux triangles, dont aucun sommet n'est situé de part et d'autre de l'autre, sont autopolaires pour une polarité donnée, leurs six sommets sont situés sur une conique et leurs six côtés touchent une autre conique.*

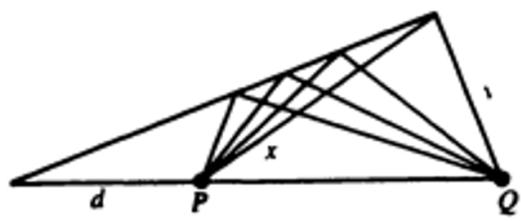
## 9.5 Coniques dégénérées

Pour certaines applications, il est commode d'admettre comme coniques dégénérées une paire de droites (considérées comme un lieu) ou une paire de points (considérés comme une enveloppe : l'ensemble de toutes les droites passant par l'une ou les deux). Visiblement (Figure 9.5A), une hyperbole peut différer aussi peu qu'on le souhaite d'une paire de droites (ses asymptotes), et l'ensemble des tangentes d'une ellipse très fine est difficilement distinguable des droites passant par l'un ou l'autre de deux points fixes.

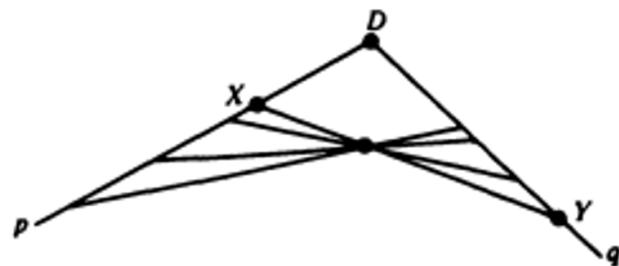
En omettant l'expression “mais pas  $x \barwedge y$ ” de l'énoncé de la construction de Steiner 8.51, on pourrait admettre que le lieu soit constitué de deux droites : l'axe de la perspective  $x \barwedge y$  et la droite  $PQ$  (dont tout point est joint à  $P$  et  $Q$  par des “droites correspondantes” des deux faisceaux, à savoir par la droite invariante  $PQ$  elle-même, comme dans la Figure 9.5B).



**FIGURE 9.5A**



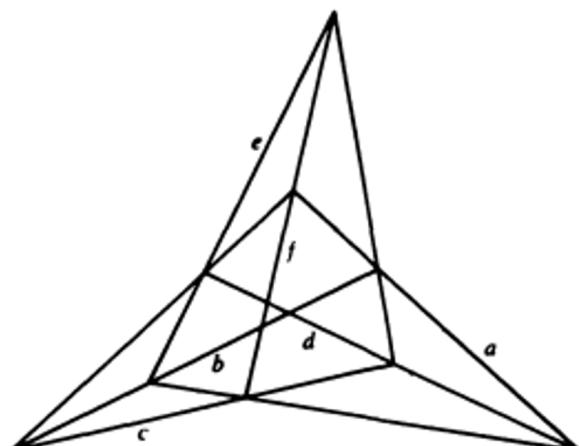
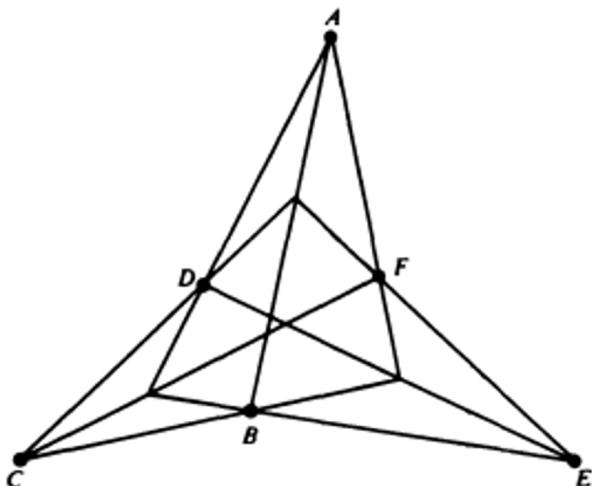
**FIGURE 9.5B**



**FIGURE 9.5C**

Dualemment (Figure 9.5C), lorsque les points  $P$  et  $Q$  de la Figure 8.5A coïncident avec  $D$ , on a une enveloppe conique dégénérée constituée de deux points, considérés comme deux faisceaux : les différentes positions de la droite  $XY$  lorsque  $X$  et  $Y$  sont distincts, et le faisceau de droites passant par  $D$ .

Dans le même esprit, on peut dire qu'une conique est déterminée par cinq points, dont quatre ne sont pas colinéaires, ou par cinq droites, dont quatre ne sont pas concourantes.



**FIGURE 9.5D**

Les formes dégénérées du théorème de Brianchon (Figure 9.1D) et du théorème de Pascal (Figure 9.2C) sont les suivantes :

Si  $AB, CD, EF$  sont concourants et  $DE, FA, BC$  sont concourants alors  $AD, BE, CF$  sont concourants

Si  $a \cdot b, c \cdot d, e \cdot f$  sont colinéaires, et si  $d \cdot e, f \cdot a, b \cdot c$  sont colinéaires, alors  $a \cdot d, b \cdot e, c \cdot f$  sont colinéaires.

En comparant la figure 9.5D à la figure 4.4A, nous constatons que ces deux affirmations sont équivalentes au théorème de Pappus, 4.41.

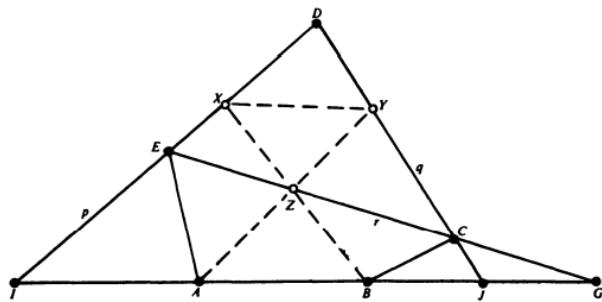


FIGURE 9.1D

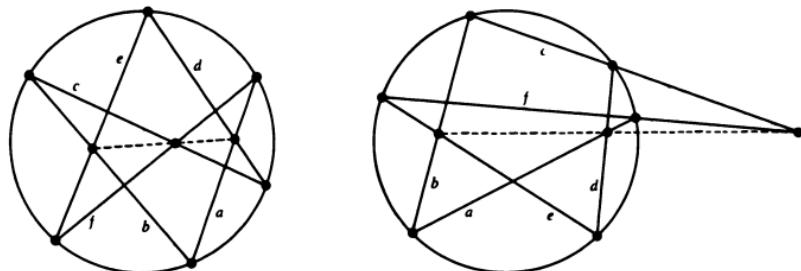


FIGURE 9.2C

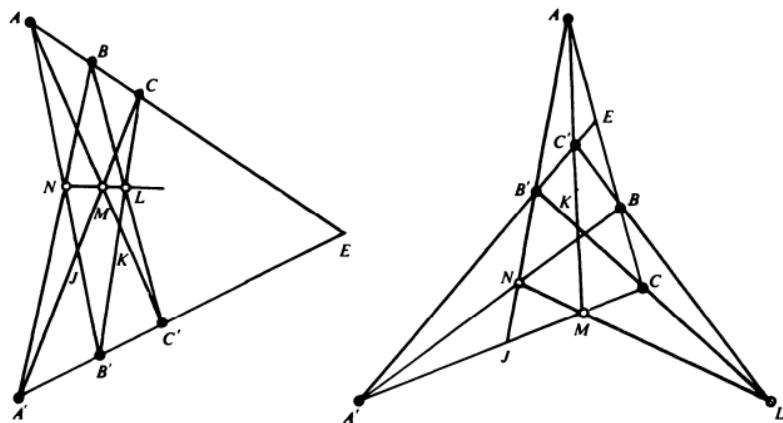


FIGURE 4.4A

## Chapitre dix

### Un plan projectif fini

Notre géométrie est une géométrie abstraite. Son raisonnement pourrait être suivi par un esprit désincarné qui n'aurait aucune idée d'un point physique ; tout comme un aveugle de naissance pourrait comprendre la théorie électromagnétique de la lumière.

*H. G. Forder (1889-1981)*  
(Référence 9, p. 43)

#### 10.1 L'idée d'une géométrie finie

Les propos de Forder ci-dessus soulignent le fait que nos concepts primitifs sont définis uniquement par leurs propriétés telles que décrites dans les axiomes. Ce fait est plus facilement compréhensible lorsque l'on abandonne l'idée "intuitive" que le nombre de points est infini. Nous constaterons que tous nos théorèmes restent valables (bien que les chiffres soient quelque peu trompeurs) lorsqu'il n'y a que 6 points sur chaque droite et 31 points dans le plan.

En 1892, Fano a décrit une géométrie à  $n$  dimensions dans laquelle le nombre de points sur chaque droite est  $p + 1$  pour un nombre premier  $p$  fixé. En 1906, O. Veblen et W. H. Bussey ont donné à cette géométrie projective finie le nom de  $PG(n, p)$  et l'ont étendue à  $PG(n, q)$ , où  $q = p^k$ ,  $p$  est premier et  $k$  est un entier positif quelconque. (Par exemple,  $q$  peut être 5, 7 ou 9, mais pas 6.)

Sans se rendre compte de la nécessité de restreindre les valeurs possibles de  $q$  aux nombres premiers et à leurs puissances, von Staudt obtint les résultats numériques suivants en 1856. Puisque tout ensemble ou faisceau peut être relié à tout autre par une suite de correspondances élémentaires, le nombre de points sur une droite doit être le même pour toutes les droites, et le même que le nombre de droites d'un faisceau (c'est-à-dire situées dans un plan et passant par un point) ou le nombre de plans passant par une droite dans l'espace tridimensionnel. Convenons d'appeler ce nombre  $q + 1$ . Dans un plan, tout point est relié aux autres points par un faisceau constitué de  $q + 1$  droites, chacune contenant ce point et  $q$  autres. Le plan contient donc

$$q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$$

points et (dualement) le même nombre de droites. Dans l'espace, toute droite  $l$  est jointe aux points extérieurs à  $l$  par  $q + 1$  plans, chacun contenant  $q + 1$  points de  $l$  et  $q^2$  autres. Par conséquent, l'espace entier contient

$$(q + 1)(q^2 + 1) = q^3 + q^2 + q + 1$$

points et (dualement) le même nombre de plans.

La formule générale du nombre de points dans  $PG(n, q)$  est la suivante :

$$q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1 = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

J. Singer (Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), p. 377-385) a démontré que toute géométrie de ce type peut être représentée par un schéma combinatoire tel que celui présenté page 94 pour le cas particulier  $PG(2, 5)$ <sup>2</sup>.

## 10.2 Un schéma combinatoire pour $PG(2, 5)$

Conformément à la formule générale, le plan projectif fini  $PG(2, 5)$  possède 6 points sur chaque droite, 6 droites passant par chaque point,

$$5^2 + 5 + 1 = \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 31$$

## 10.3 Vérification des axiomes

La discussion des pages 25 et 39 indique que les cinq axiomes suivants suffisent au développement de la géométrie projective bidimensionnelle :

AXIOME 2.13 *Deux points distincts quelconques sont incidents à une seule droite.*

AXIOME 3.11 *Deux droites quelconques sont incidentes en au moins un point.*

AXIOME 3.12 *Il existe quatre points dont aucun n'est colinéaire.*

AXIOME 2.17 *Les trois points diagonaux d'un quadrangle ne sont jamais colinéaires.*

AXIOME 2.18 *Si une projectivité laisse invariant chacun des trois points distincts d'une droite, elle laisse invariant tous les points de cette droite.*

On peut établir qu'il s'agit d'une géométrie logiquement cohérente en vérifiant tous les axiomes dans un cas particulier, tel que  $PG(2, 5)$ . Pour vérifier les axiomes 2.13 et 3.11, nous observons que deux résidus quelconques se trouvent ensemble dans une seule colonne du tableau, et que deux colonnes quelconques ne contiennent qu'un seul nombre commun. Pour l'axiome 3.12, nous pouvons citer  $P_0P_1P_2P_5$ . Vérifier l'axiome 2.17 pour tout quadrangle complet (ou plutôt, pour tout quadrangle ayant  $P_0$  pour sommet) est possible mais fastidieux. Contentons-nous donc de prendre un seul exemple : les points diagonaux de  $P_0P_1P_2P_5$  sont

$$l_0 \cdot l_{29} = P_3, \quad l_1 \cdot l_7 = P_{11}, \quad l_3 \cdot l_{30} = P_9.$$

L'axiome 2.18 est remplacé par le théorème 3.51 car un réseau harmonique occupe toute la droite. En fait, le réseau harmonique  $R(P_0P_1P_{18})$  contient la suite harmonique  $P_0P_1P_3P_{12}P_8\dots$ . Pour le vérifier, on utilise la procédure suggérée par la figure 3.5A, en prenant  $A, B, M, P, Q$  comme étant  $P_0, P_1, P_{18}, P_5, P_{30}$ , de sorte que  $C = P_3, D = P_{12}, E = P_8, F = P_0 = A$ . Puisqu'il n'y a que six points sur la droite, la séquence est inévitablement périodique : les cinq points

$$P_0, P_1, P_3, P_{12}, P_8$$

---

2. voir annexe.

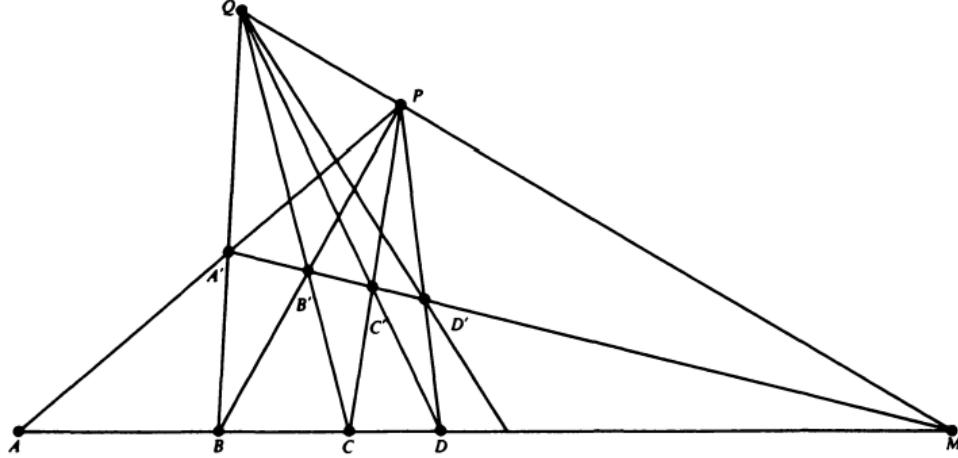


FIGURE 3.5A

se répètent cycliquement à l'infini. Au lieu de considérer  $P$  et  $Q$  comme étant  $P_5$  et  $P_{30}$ , on aurait tout aussi bien pu les considérer comme n'importe quelle autre paire de points sur  $l_{13}$ ,  $l_{14}$ ,  $l_{16}$ ,  $l_{21}$  ou  $l_{25}$  (ceux-ci étant, avec  $l_0$ , les droites passant par  $P_{18}$ ) ; nous aurions néanmoins obtenu la même suite harmonique.

#### 10.4 Involutions

En se reportant à la figure 2.4A, nous observons que les sections des quadrangles  $P_4P_5P_6P_9$ ,  $P_{14}P_{15}P_{16}P_{19}$ ,  $P_9P_{10}P_{11}P_{14}$  par la droite  $l_0$  donnent les relations quadrangulaire et harmonique

$$(P_1P_8)(P_0P_3)(P_{18}P_{12}), \quad (P_{12}P_{18})(P_8P_0)(P_3P_1), \quad H(P_{12}P_{18}, P_3P_8).$$

Le théorème fondamental 4.11 montre que toute projectivité sur  $l_0$  peut être exprimée sous la forme

$$P_0P_1P_3 \overline{\wedge} P_iP_jP_k,$$

où  $i, j, k$  sont trois nombres distincts choisis parmi 0, 1, 3, 8, 12, 18. Il existe donc seulement  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$  projectivités (y compris l'identité). Parmi celles-ci, comme nous le verrons, 25 sont des involutions : 15 des involutions hyperboliques et 10 des involutions elliptiques. En fait, si  $i$  et  $j$  sont deux des six nombres, il existe une involution hyperbolique  $(P_iP_i)(P_j, P_j)$  qui intervertit les quatre nombres restants deux à deux de manière définie. Les deux autres façons possibles d'apparier ces quatre nombres doivent chacune déterminer une involution elliptique qui intervertit  $P_i$  et  $P_j$ . Par exemple, l'involution hyperbolique  $(P_{12}P_{12})(P_{18}P_{18})$ , intervertissant  $P_3$  et  $P_8$ , doit également intervertir  $P_0$  et  $P_1$ , et s'exprime par  $(P_0P_1)(P_3P_8)$  ; mais les deux involutions

$$(P_1P_8)(P_0P_3), \quad (P_0P_8)(P_1P_3)$$

intervertissent  $P_{12}$  et  $P_{18}$ , et sont donc elliptiques.

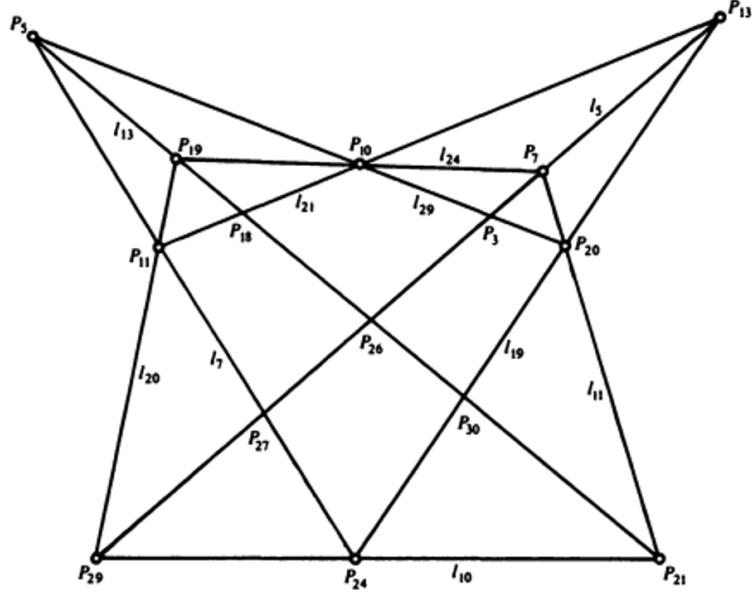


FIGURE 10.3A

## 10.5 Collinéations et Corrélations

D'après 6.22 et 6.42, toute collinéation ou corrélation projective est déterminée par son effet sur un quadrangle particulier, tel que  $P_0P_1P_2P_5$ . La collinéation peut transformer  $P_0$  en l'un des 31 points, et  $P_1$  en l'un des 30 points restants. Elle peut transformer  $P_2$  en l'un des  $31 - 6 = 25$  points non colinéaires aux deux premiers. Le nombre de points situés sur au moins un côté d'un triangle donné est évidemment  $3 + (3 \cdot 4) = 15$ ; par conséquent, le nombre de points n'appartenant à aucun côté est 16. Par conséquent,  $PG(2, 5)$  admet au total

$$31 \cdot 30 \cdot 25 \cdot 16 = 372\,000$$

collinéations projectives, et le même nombre de corrélations projectives. Sur les 372 000 collinéations projectives, 775 sont de période 2 (voir 6.32). Car, d'après 6.31, le nombre d'homologies harmoniques est

$$31 \cdot 25 = 775.$$

Outre l'identité, les deux collinéations les plus évidentes sont  $P_r \rightarrow P_{5r}$  (de période 3, puisque  $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$ ) et  $P_r \rightarrow P_{r+1}$  (de période 31). Le critère 6.11 nous assure qu'elles sont projectives. En fait, les portées correspondantes du premier sur les  $P_0P_1$  et les  $P_0P_5$  sont liées par la perspectivité

$$P_0P_1P_3P_8P_{12}P_{18} \stackrel{P_{11}}{\overline{\wedge}} P_0P_5P_{15}P_9P_{29}P_{28}$$

et les portées correspondantes du second sur  $P_0P_1$  et  $P_1P_2$  sont liées par une projectivité d'axe  $P_0P_2$ :

$$P_0P_1P_3P_8P_{12}P_{18} \stackrel{P_9}{\overline{\wedge}} P_0P_2P_{30}P_{11}P_{17}P_7 \stackrel{P_8}{\overline{\wedge}} P_1P_2P_4P_9P_{13}P_{19}.$$

## 10.6 Coniques

La corrélation la plus évidente est, bien sûr,  $P_r \rightarrow l_r$ . Pour vérifier sa projectivité, on peut utiliser 6.41 sous la forme

$$P_1P_2P_4P_9P_{13}P_{19} \stackrel{P_8}{\overline{\wedge}} P_0P_{29}P_{28}P_9P_5P_{15} \wedge l_1l_2l_4l_9l_{13}l_{19}.$$

Étant de période 2, c'est une polarité. Puisque  $P_0$  est sur  $l_0$ , c'est une polarité hyperbolique et elle détermine une conique. Par 8.51 (construction de Steiner), on voit que le nombre de points sur une conique (dans tout plan projectif fini) est égal au nombre de droites passant par ce point, dans le cas présent 6. En examinant la table d'incidence, ou en divisant par deux les résidus 0, 1, 3, 8, 12, 18 (mod 31), on voit que la conique déterminée par la polarité  $P_r \leftrightarrow l_r$  est constituée des 6 points et des 6 droites

$$P_0P_4P_6P_9P_{16}P_{17}, \quad l_0l_4l_6l_9l_{16}l_{17}.$$

Les 6 droites sont les tangentes. En joignant les 6 points deux à deux, on obtient les  $\binom{6}{2} = 15$  sécantes

$$l_1 = P_0P_{17}, \quad l_2 = P_6P_{16}, \quad l_3 = P_0P_9, \quad l_8 = P_0P_4, \quad l_{12} = P_0P_6,$$

$$l_{14} = P_4P_{17}, \quad l_{15} = P_{16}P_{17}, \quad l_{18} = P_0P_{16}, \quad l_{22} = P_9P_{17}, \quad l_{23} = P_9P_{16},$$

$$l_{25} = P_6P_9, \quad l_{26} = P_6P_{17}, \quad l_{27} = P_4P_{16}, \quad l_{28} = P_4P_6, \quad l_{30} = P_4P_9$$

Il s'ensuit (voir Figure 10.3A) que les 10 droites restantes

$$l_5, \quad l_7, \quad l_{10}, \quad l_{11}, \quad l_{13}, \quad l_{19}, \quad l_{20}, \quad l_{21}, \quad l_{24}, \quad l_{29}$$

sont des droites non sécantes, chacune contenant une involution elliptique de points conjugués. Deux points conjugués quelconques sur une droite sécante ou non sécante déterminent un triangle autopolaire. Par exemple, la sécante  $l_1$ , contenant l'involution hyperbolique  $(P_0P_0)(P_{17}P_{17})$  ou  $(P_2P_{30})(P_7P_{11})$ , est un côté commun des deux triangles autopolaires  $P_1P_2P_{30}$ ,  $P_1P_7P_{11}$ . Ces deux triangles sont de types différents : pour le premier, les trois côtés  $l_1, l_2, l_{30}$  sont sécants ; mais les côtés  $l_7$  et  $l_{11}$  du second sont non sécants. On peut commodément parler de triangles du premier type et du second type, respectivement. Puisque chacune des 15 sécantes appartient à un triangle autopolaire de l'un ou l'autre type, il y a en tout 5 triangles du premier type et 15 du second. (Ces propriétés d'une conique sont curieusement différentes de ce qui se passe en géométrie réelle, où les côtés d'un triangle autopolaire sont toujours constitués de deux sécantes et d'une non sécante.)

Il existe bien sûr de nombreuses façons d'exprimer une polarité donnée par un symbole de la forme  $(ABC)(Pp)$  ; par exemple, la polarité  $P_r \leftrightarrow l_r$  est  $(P_1P_2P_{30})(P_3l_3)$  ou  $(P_1P_7P_{11})(P_4l_4)$  ou  $(P_1P_7P_{11})(P_4l_4)$ . De tels symboles nous permettront de trouver le nombre total de polarités.

Si  $ABC$  est donné, il existe 16 choix possibles pour  $P$  (hors de tout côté) et 16 choix possibles pour  $p$  (hors de tout sommet), ce qui donne  $16^2 = 256$  symboles  $(ABC)(Pp)$  disponibles pour les polarités dans lesquelles  $ABC$  est autopolaire. Puisque chacune des 16 lignes contient 3 des 16

points, seuls 48 des 256 symboles ont  $P$  situé sur  $p$ , comme dans le cas de  $(P_1P_7P_{11})(P_4l_4)$ .

Lorsque le triangle autopolaire est du premier type (dont chaque côté est une sécante), les six points de la conique sont tous situés sur des côtés du triangle,  $P$  ne se trouve jamais sur  $p$ , et chaque polarité hyperbolique (avec  $ABC$  de ce type) est nommée 16 fois par un symbole  $(ABC)(Pp)$  avec  $P$  non sur  $p$ . Lorsqu'un seul côté est une sécante, 2 des 6 points sont situés sur ce côté et les 4 restants sont parmi les 16 ; donc chaque polarité hyperbolique (avec  $ABC$  du deuxième type) est nommée 4 fois avec  $P$  sur  $p$  et 12 fois avec  $P$  non sur  $p$ . Inversement, si  $P$  est sur  $p$ ,  $ABC$  ne peut être que du second type ; le nombre de ces polarités hyperboliques (chacune représentant 4 des 48 symboles) est donc de 12. Puisque chaque polarité hyperbolique (ou conique) possède 5 triangles autopolaires du premier type et 15 du second, le nombre de polarités hyperboliques dans lesquelles un triangle  $ABC$  donné est du premier type est un tiers de 12, soit 4. Le nombre total de symboles  $(ABC)(Pp)$  qui désignent des polarités hyperboliques est donc

$$48 + 16 \cdot 4 + 12 \cdot 12 = 256.$$

Puisque nous avons pris en compte tous les symboles disponibles,

Il n'y a pas de polarités elliptiques dans  $PG(2, 5)$ <sup>3</sup>.

Le nombre total de triangles dans  $PG(2, 5)$  peut être calculé comme suit : il y a 31 choix pour le premier sommet, 30 pour le deuxième et  $31 - 6 = 25$  pour le troisième ; mais les trois sommets peuvent être permutés de  $3! = 6$  façons. Le nombre est donc

$$\frac{31 \cdot 30 \cdot 25}{6} = 31 \cdot 125 = 3875.$$

On peut facilement déduire le nombre de coniques. Chaque conique possède 5 triangles autopolaires du premier type, et chaque triangle joue ce rôle pour 4 coniques ; le nombre de coniques est donc<sup>4</sup>

$$\frac{31 \cdot 125 \cdot 4}{5} = 3100.$$

Prenons l'exemple de  $7 \cdot 71$  : la colinéation  $P_r \leftrightarrow P_{r+1}$  (ou  $l_r \rightarrow l_{r-1}$ ) est le produit des polarités  $P_r \leftrightarrow l_r$  et  $P_r \leftrightarrow l_{r-1}$ , qui peut s'exprimer ainsi :

$$(P_3P_5P_{29})(P_4l_4) \quad \text{et} \quad (P_4P_5P_{28})(P_3l_2).$$

---

3. En d'autres termes, toute polarité est hyperbolique. Ceci est vrai non seulement en géométrie complexe et dans  $PG(2, 5)$ , mais aussi dans  $PG(2, q)$  pour tout  $q = p^k$ . Voir P. Scherk, Can. Math. Bull., 2 (1959), p. 45-46, ou Segre (Référence 15, pp. 266-268).

4. Un raisonnement analogue montre que le nombre de coniques dans  $PG(2, q)$  est  $q^5 - q^2$ . Voir B. Segre, *Le geometrie di Galois*, Ann. Matematica (4), 48 (1959), pp. 1-96, en particulier p. 4.

Table des valeurs possibles de  $s$ , telles que  $P_r$  et  $l_s$  (ou  $l_r$  et  $P_s$ ) sont incidents.

$r$	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3	
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3		
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3			
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3				
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3					
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3						
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3							
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3								
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3									
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3										
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3											
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3												
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3													
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3														
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3															
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																		
22	23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																			
23	24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																				
24	25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																					
25	26	27	28	29	30	0	1	2	3																						
26	27	28	29	30	0	1	2	3																							
27	28	29	30	0	1	2	3																								
28	29	30	0	1	2	3																									
29	30	0	1	2	3																										
30	0	1	2	3																											