Extrait (p. 1-37 et suiv.) de *Géométrie des domaines complexes* (Référence : *Geometry of complex domains, un séminaire des Professeurs Oswald Veblen et John von Neumann*, 1935-1936), Notes de Dr. A. H. Taub and M. J. W. Givens, IAS, Princeton, New Jersey, Réimprimé avec des corrections en 1955.

Involutions dans $\mathbf{P}_1$

11. En utilisant notre règle concernant les nombres en exposants ou en indices, les équations d'un projecteur dans P_1 peuvent s'écrire des 4 formes équivalentes suivantes :

$$\varphi^A = P^A_B \psi^B, \quad \varphi^A = P_{AB}\psi^B, \quad \varphi_A = -P^B_A \psi_B, \quad \text{et} \quad \varphi^A = -P^{AB}\psi_B, \tag{11.1}$$

où si $\|P^A_B\| = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} =, alors$

$$\|P_{AB}\| = \begin{Vmatrix} c & d \\ -a & -b \end{Vmatrix}, \qquad \|P^B_A\| = \begin{Vmatrix} -d & c \\ b & -a \end{Vmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \|P^{AB}\| = \begin{Vmatrix} -b & a \\ -d & c \end{Vmatrix}, \tag{11.2}$$

respectivement. On doit observer que l'ordre des indices permet de distinguer P^A_B de P^B_A. Par la transformation des coordonnées (voir 10.1), les équations du projecteur deviennent $\varphi^{A*} = P^{A*}_B \psi^{B*}$ où

$$P^{A^*}_B = T^A_C \; P^C_D \; t^D_B \; t^{q-p}, \tag{11.3}$$

si p et q sont les poids de ψ^A et φ^A, respectivement, et si leurs antipoids sont nuls. En prenant $q = p = \frac{1}{2}$, P^A_B et P^B_A sont de poids nul, P_{AB} est de poids -1 et P^{AB} est de poids $+1$. La normalisation $|P^A_B| = +1$ est invariante si le poids de P^A_B est nul.

La matrice $\|P^A_B\|$ définira une involution si $P^A_B \; P^B_C \; \psi^C = \rho \; \psi^A$ et si $\|P^A_B\|$ n'est pas un multiple de $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. C'est-à-dire,

$$\begin{Vmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{Vmatrix} \tag{11.4}$$

ou $a + d = 0$. Ceci s'exprime de manière pratique par les équations équivalentes

$$P^A_A = 0, \quad \text{ou} \quad P_{AB} = P_{BA}. \tag{11.5}$$

Le point ψ^A sera invariant par le projecteur (11.1) si et seulement si $\varphi_A = \rho \; \psi_A$. Ceci est équivalent à $\psi^A \; \varphi_A = 0$ ou

Traduction : Denise Vella-Chemla, janvier 2026.

$$P_{AB}\,\psi^A\,\psi^B = P_{11}(\psi^1)^2 + (P_{12}+P_{21})\psi^1\psi^2 + P_{22}(\psi^2)^2 = 0. \tag{11.6}$$

Tous les coefficients de cette équation quadratique s'évanouissent seulement lorsque P_{AB} est un multiple de ϵ_{AB} et dans ce cas, le projecteur est l'identité. Sinon, un projecteur a juste deux points invariants qui sont distincts quand la matrice symétrique $\|P_{AB}+P_{BA}\|$ est non singulière, et ils coïncident quand elle est singulière.

On peut toujours exprimer les coefficients d'un projecteur sous la forme

$$P_{AB} = Q_{AB} + \frac{1}{2}\,P_C^C\,\epsilon_{AB} \tag{11.7}$$

Puisque $P_{AB} - P_{BA} = P_C^C\,\epsilon_{AB}$, on a

$$Q_{AB} = \frac{1}{2}(P_{AB}+P_{BA}) = Q_{BA} \tag{11.8}$$

et donc à un projecteur P est associée une involution Q déterminée uniquement. Les points doubles de P sont les mêmes que ceux de Q.

Les points invariants d'une involution la déterminent complètement. Car les racines de (11.6) déterminent ces coefficients selon les facteurs communs et la condition additionnelle $P_{12} = P_{21}$ donne $\|P_{AB}\|$ à un facteur près. En effet, le projecteur défini par

$$Q_{AB} = \alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A \tag{11.9}$$

est l'involution qui laisse α et β invariants. Puisque

$$\beta_A\alpha_B - \alpha_A\beta_B = (\beta^C\alpha_C)\,\epsilon_{AB} \tag{11.10}$$

l'involution est aussi donnée par

$$Q_{AB} = 2\alpha_A\beta_B + (\beta^C\alpha_C)\,\epsilon_{AB} \tag{11.11}$$

ou par

$$Q_{AB} = 2\beta_A\alpha_B - (\beta^C\alpha_C)\,\epsilon_{AB}. \tag{11.12}$$

Un projecteur singulier ($\neq 0$) est de la forme $\|\rho_A\,\sigma_B\|$ et si ce doit être une involution (c'est-à-dire s'il doit être symétrique), on doit avoir $\sigma_B = \lambda\,\rho_B$. En posant $\alpha_A = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\rho_A$, l'involution générale singulière est

$$Q_{AB} = 2\,\alpha_A\,\alpha_B, \tag{11.13}$$

et c'est exactement ce que l'on obtient en posant $\beta_A = \alpha_A$ dans (11.9). Cette involution singulière amène chaque point, excepté α, sur α.

Deux points, X^A et Y^A déterminent le scalaire homogène $X^A Y_A$ dont l'évanouissement implique la coïncidence des points. Si le scalaire ne s'évanouit pas, sa valeur est changée quand les coordonnées X^A sont multipliées par un facteur. Quatre points, pourtant déterminent le scalaire absolu

$$\lambda = \frac{(\varphi^A \alpha_A)(\psi^B \beta_B)}{(\varphi^A \beta_A)(\psi^B \alpha_B)} \tag{11.14}$$

qui est appelé le birapport des 4 points $(\phi\psi|\alpha\beta)$. La valeur de λ est invariante par transformation des coordonnées. De plus, puisque le membre de droite de (11.14) est homogène de degré zéro en les coordonnées des points, la valeur de λ dépend seulement des points et non des coordonnées choisies pour les représenter. Par un projecteur, un ensemble de 4 points est transformé en un nouvel ensemble de points qui a le même birapport que l'ancien, mais par un antiprojecteur, le birapport est changé en son complexe conjugué. Si $\varphi_A = Q_{AB}\psi^B$ où Q_{AB} est donné par (11.9), on a

$$\frac{(\phi^A \alpha_A)(\psi^B \beta_B)}{(\phi^A \beta_A)(\psi^B \alpha_B)} = -1. \tag{11.15}$$

Quand cette relation est vérifiée, les points φ et ψ sont dit être conjugués harmoniques par rapport à α et β. Puisque (11.15) détermine φ^A comme une fonction de ψ^A à un facteur près, l'involution avec les points α et β invariants peut être définie comme la transformation qui envoie tout point sur son conjugué harmonique par rapport à la paire de points, α et β.

Un projecteur qui échange deux points est une involution. Car, par un choix adéquat du système de coordonnées, on peut prendre comme coordonnées covariantes des points $(1,0)$ et $(0,1)$ et alors $\|P_A^B\|$ les échangera seulement si $P_1^1 = P_2^2 = 0$. Ceci implique la condition invariante $P_A^A = 0$ qui caractérise une involution. En effet, le projecteur

$$Q_{AB} = \lambda\, \alpha_A\, \alpha_B + \mu\, \beta_A\, \beta_B \tag{11.16}$$

avec λ et μ des nombres complexes arbitraires $\neq 0$, est une involution qui échange α et β. Le projecteur le plus général ayant cette propriété est de cette forme. Car un projecteur est déterminé par son action sur 3 points et si λ et μ sont solutions des équations

$$\lambda\, \alpha_A(\alpha_B\, \xi^B) + \mu\, \beta_A(\beta_B\, \xi^B) = \eta_A\ , \tag{11.17}$$

Q enverra α, β, et ξ sur β, α, et η, respectivement, où ξ et η sont des points arbitraires distincts à la fois de α et de β.

Un théorème important établit que tout projecteur dans P_1 est le produit de deux involutions. Nous le démontrons en considérant plusieurs cas. L'élément neutre est le carré d'une involution et nous avons vu que tout autre projecteur possède seulement deux points doubles, qui peuvent coïncider. Il suffit donc de considérer les projecteurs à deux points doubles distincts, les projecteurs non singuliers à un point double et les projecteurs singuliers.

Si les points invariants distincts du projecteur P sont a et b, soient α et β une paire de points harmoniquement conjugués par rapport à eux et définissons Q_1 comme l'involution ayant pour points doubles α et β. Alors, en notant Q_1P le projecteur résultant de la transformation de P par Q_1, on a Q_1P qui intervertit a et b et est donc une involution, Q_2. Puisque $Q_1^2 = 1$, $P = Q_1^2P = Q_1Q_2$ et P est le produit de deux involutions.

Si P est non singulière et possède un unique point invariant a, on choisit α un point distinct de a et on note $\beta = P\alpha$ la transformée de α par P. Soit b le conjugué harmonique de a par rapport à α et β, Q_1 l'involution avec les points doubles a et b, et Q_2 l'involution avec les points doubles a et β. Alors $Q_2Q_1a = a$ et $Q_2Q_1\alpha = Q_2\beta = \beta$. De plus, Q_2Q_1 ne peut laisser invariant aucun point $\gamma \neq a$, car $Q_2Q_1\gamma = \gamma$ impliquerait $Q_1\gamma = Q_2\gamma$, et Q_1 et Q_2 échangeraient tous deux γ et $\delta = Q_1\delta$. Ceci, combiné à l'invariance de a par Q_1 et par Q_2 impliquerait $Q_1 = Q_2$, ce qui est faux. Par conséquent, P et Q_2Q_1 ont chacun le point invariant a et chacun envoie α sur β. En se référant à un système de coordonnées canonique, on obtient alors facilement $P = Q_2Q_1$.

Un projecteur singulier est donné par la matrice $\|\alpha_A\beta_B\|$. Si α et β sont des points distincts, cette matrice est le produit des involutions singulières $\|\alpha_A\alpha_B\|$ et $\|\beta^B\beta_C\|$. Lorsque le projecteur est une involution singulière, $\|\alpha_A\beta_B\|$, il est le produit de $\|\alpha_A\beta_B\|$ et de $\|\alpha^B\gamma_C + \gamma^B\alpha_C\|$, où γ_C est distinct de α.

Antiinvolutions dans $\mathbf{P}_1$

12. Un antiprojecteur peut s'écrire des 4 formes équivalentes

$$(12.1) \qquad \overline{\varphi}^A \;=\; P^{\dot{A}}_{B}\,\psi^B, \quad \overline{\varphi}_A \;=\; P_{\dot{A}B}\,\psi^B, \quad \overline{\varphi}_A = -P^{B}_{\dot{A}}\psi_B, \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}^A = -P^{\dot{A}B}\psi_B,$$

les éléments des 4 matrices étant reliés comme dans (11.2). Si l'on prend à la fois φ^A et ψ^A comme étant de poids $\frac{1}{2}$ et d'antipoids zéro, on doit prendre $P^{\dot{A}}_{B}$ comme étant de poids $-\frac{1}{2}$ et d'antipoids $+\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}^{B}_{\dot{A}}$ comme étant de poids $+\frac{1}{2}$ et d'antipoids $-\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}_{\dot{A}B}$ comme étant de poids absolu -1, et $P^{\dot{A}B}$ comme étant de poids absolu $+1$. Avec ces poids, le déterminant de chacune des 4 matrices est invariant et une normalisation, comme $|P^{\dot{A}}_{B}| = 1$, est préservée par des transformations des coordonnées.

Les points invariants de l'antiprojecteur (12.1) sont donnés par

$$(12.2) \qquad P_{\dot{A}B}\,\overline{\psi}^A\,\psi^B = 0.$$

Si l'on pose

$$(12.3) \qquad H_{\dot{A}B} = \frac{1}{2}(P_{\dot{A}B} + \overline{P}_{\dot{B}A}) \quad \text{et} \quad K_{\dot{A}B} = \frac{1}{2}(P_{\dot{A}B} - \overline{P}_{\dot{B}A}),$$

alors $\|H_{\dot{A}B}\|$ et $\|K_{\dot{A}B}\|$ sont des matrices hermitiennes et

$$(12.4) \qquad P_{\dot{A}B} = H_{\dot{A}B} + iK_{\dot{A}B}.$$

Rendre les parties réelle et imaginaire du côté gauche de (12.2) égales à zéro donne

$$(12.5) \qquad H_{\dot{A}B}\,\overline{\psi}^A\,\psi^B = 0 \quad \text{et} \quad K_{\dot{A}B}\,\overline{\psi}^A\,\psi^B = 0.$$

Représentons les points de P_1 par des points du plan xy comme dans le § 2 par l'équation (cf. (2.3))

$$(12.6) \qquad -\frac{\psi^2}{\psi^1} = \frac{\psi_1}{\psi_2} = z = x + iy$$

Les équations de (12.5) sont les équations de deux cercles (réels, dégénérés ou imaginaires) dans le plan xy. (Dans le cas particulier où $H_{\dot{A}B} = 0$ ou bien où $K_{\dot{A}B} = 0$, l'une des équations est satisfaite de la même manière et il n'y a qu'un seul cercle.)

Si les deux cercles ne coïncident pas, ils peuvent s'intersecter en deux points, être tangents, ou ne pas avoir d'intersection, et l'antiprojecteur aura alors 2, 1 ou aucun points invariants, respectivement. De (12.4), on voit que

$$(12.7) \qquad (\lambda + i\mu)P_{\dot{A}B} = (\lambda H_{\dot{A}B} - \mu K_{\dot{A}B}) + i(\lambda K_{\dot{A}B} + \mu H_{\dot{A}B}),$$

et donc, les composantes homogènes, $\|\rho\ P_{\dot{A}B}\|$, d'un antiprojecteur ne déterminent pas une paire unique de cercles (12.5) mais seulement le faisceau auquel ils appartiennent.

Si les équations (12.5) définissent un seul ou bien une paire de cercles coïncidant (réels ou imaginaires), et seulement dans ce cas, l'antiprojecteur sera une antiinvolution. Car, si $\|P^{\dot{A}}_B\| = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, les antiinvolutions sont caractérisées par les équations matricielles

$$(12.8) \qquad \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{Vmatrix} = \rho \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

et multiplier les deux membres par $\begin{Vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{Vmatrix} = \mathrm{transposee}\|\mathrm{P}^{\mathrm{B}}_{\dot{\mathrm{A}}}\|$ donne

$$-(ad - bc)\begin{Vmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{Vmatrix} = \rho \begin{Vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{Vmatrix}$$

en utilisant le fait que $(\widetilde{P^D_{\dot{B}}})(P^{\dot{B}}_A) = -|P^{\dot{E}}_F|(\delta^D_A)$ avec $\widetilde{\mathrm{op}}$ symbolisant la transposition. Donc, $(\overline{P}^{\dot{D}}_C) = \dfrac{-\rho}{\mathrm{Det}(P^{\dot{E}}_F)}(\widetilde{P^D_{\dot{C}}})$. En baissant l'indice D, on trouve qu'une antiinvolution non-singulière satisfait alors l'équation

$$(12.9) \qquad \overline{P}_{\dot{A}B} = \sigma P_{\dot{B}A}$$

où $\sigma = \dfrac{-\rho}{ad-bc}$ et il découle de (12.3) que les deux cercles (12.5) coïncident. En prenant le déterminant des deux membres de (12.9), on voit que $\sigma\overline{\sigma} = 1$, de telle façon que

$$\overline{\sigma}^{1/2}\overline{P}_{\dot{A}B} = \sigma^{1/2}P_{\dot{B}A}$$

et par conséquent, $\|\sigma^{1/2}P_{\dot{A}B}\|$ est hermitienne. La matrice définissant une antiinvolution est donc proportionnelle à une matrice hermitienne et inversement toute matrice hermitienne définit une antiinvolution.

Une antiinvolution non singulière est de deux types selon que les matrices hermitiennes qui la définissent sont indéfinies ou définies. L'étude du § 1 démontre qu'un choix approprié du système de coordonnées permet d'obtenir comme équation du cercle invariant l'équation $\overline{\psi}^1\psi^1 - \overline{\psi}^2\psi^2 = 0$ ou l'équation $\overline{\psi}^1\psi^1 + \overline{\psi}^2\psi^2 = 0$ selon que l'antiinvolution est respectivement de première ou de seconde espèce. En fonction de la coordonnée non homogène z, ces cercles ont pour valeurs $z\overline{z} = 1$ et $z\overline{z} = -1$, et leurs antiprojecteurs respectifs sont $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $w = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

Une antiinvolution singulière ($\neq 0$) est de la forme $\overline{\alpha}^A\beta_B$, et (12.8) implique alors $\overline{\alpha}^A\beta_B(\alpha^B\overline{\beta}_C) = 0$, soit $\beta_B = \rho\,\alpha_B$. Par conséquent, les matrices définissant l'antiinvolution singulière sont proportionnelles à $\|\overline{\alpha}_A\alpha_B\|$ et l'antiinvolution transforme tout point, sauf α, en α.

Les antiinvolutions qui laissent deux points, par exemple α et β, invariants correspondent aux cercles passant par α et β. Ces cercles sont linéairement dépendants de deux quelconques d'entre eux, de sorte que

$$P_{\dot{A}B} = \lambda(\overline{\alpha}_A\beta_B + \overline{\beta}_A\alpha_B) + i\,\mu(\overline{\alpha}_A\beta_B - \overline{\beta}_A\alpha_B). \tag{12.10}$$

est, pour un choix approprié des nombres réels λ et μ, l'involution qui laisse α et β invariants.

L'involution qui a pour points invariants α et β est le produit des antiinvolutions $(\overline{\alpha}_A\beta_B + \overline{\beta}_A\alpha_B)$ et $i(\overline{\alpha}_A\beta_B - \overline{\beta}_A\alpha_B)$, pour :

$$i(\alpha_A\overline{\beta}_B + \beta_A\overline{\alpha}_B)(\overline{\alpha}^B\beta_C - \overline{\beta}^B\alpha_C) = i(\overline{\alpha}^B\overline{\beta}_B)(\alpha_A\beta_C + \beta_A\alpha_C). \tag{12.11}$$

De plus, l'involution singulière $\alpha_A\alpha_B$ est le produit de $\overline{\alpha}_A\beta_B + \overline{\beta}_A\alpha_B$ et de $\overline{\alpha}_A\alpha_B$. Par conséquent, toute involution est le produit de deux antiinvolutions.

Nous avons vu dans la section précédente que tout projecteur était le produit de deux involutions et donc tout projecteur est le produit de quatre antiinvolutions. Sachant que tous les antiprojecteurs sont obtenues en multipliant les projecteurs par une seule antiinvolution, on obtient le résultat que les antiinvolutions génèrent l'ensemble du groupe antiprojectif.

Réflexions point-plan dans $\mathbb{R}^3$

13. L'antiinvolution

(13.1) $$\overline{\varphi}_A = P_{\dot{A}B}\,\psi^B, \qquad \text{avec} \qquad \overline{P}_{\dot{A}B} = P_{\dot{B}A},$$

induit dans $\mathbb{R}^3$ l'involution

(13.2) $$Y^i = P^i_j\,X^j,$$

où (cf. (5.7))

(13.3) $$p^i_j = g^{i\dot{A}B}\,P_{\dot{C}B}\,P_{\dot{A}D}\,g^{\dot{C}D}_j.$$

Puisque $P_{\dot{C}B}\;P_{\dot{A}D} - P_{\dot{A}B}P_{\dot{C}D}$ est antisymétrique à la fois par rapport aux indices $(\dot{A}\dot{C})$ et par rapport aux indices (BD), on a :

(13.4) $$P_{\dot{C}B}P_{\dot{A}D} = P_{\dot{A}B}P_{\dot{C}D} + \rho\,\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\,\epsilon_{BD},$$

En multipliant par $\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}$ et en sommant, on obtient : $\rho = -\dfrac{1}{2}P^{\dot{E}F}P_{\dot{E}F}$. Par conséquent, en substituant (13.4) dans (13.3), on obtient :

(13.5) $$P^i_j = P^iP_j - \frac{1}{2}(P^kP_k)\delta^i_j,$$

où $P^i = g^{i\dot{A}B}P_{\dot{A}B}$ est le point de $\mathbb{R}^3$ correspondant à $P_{\dot{A}B}$ selon (4.5).

L'involution (13.2) laisse P^i et chaque point de son plan polaire P_i invariant. Car, de (13.5), on a $P^i_jP^j = \frac{1}{2}(P^kP_k)P^i$ et, si $X^iP_i = 0$, $P^i_jX^j = -\frac{1}{2}(P^kP_k)X^i$. Une involution de ce type est appelée réflexion point-plan. Pour trouver la transformée d'un point quelconque X, on observe, d'après (13.2), que la droite déterminée par P et X coupe le plan P_i en un point invariant, disons Q. Par conséquent, (13.2) établit une involution sur cette droite avec les points doubles P et Q. La transformée de X est alors sa conjuguée harmonique par rapport à P et Q.

Deux points de la quadrique sont intervertis par l'involution si et seulement s'ils sont alignés avec le centre P de la réflexion point-plan. Il existe donc un faisceau réel d'antiinvolutions qui intervertissent deux points α_A et β_A, et les éléments de ce faisceau sont :

(13.6) $$P_{\dot{A}B} = \lambda\overline{\alpha}_A\alpha_B + \mu\overline{\beta}_A\beta_B,$$

où λ and μ sont des paramètres réels, aucun d'eux n'étant nul.

Réflexions par rapport à une droite dans $\mathbb{R}^3$

14. Dans les équations (12.11), nous avons exprimé une involution quelconque comme le produit de deux antiinvolutions. De plus, puisque $(\overline{\alpha}^A\beta^B + \overline{\beta}^A\alpha^B)(\overline{\alpha}_A\beta_B - \overline{\beta}_A\alpha_B) = 0$, les antiinvolutions correspondent à des points de $\mathbb{R}^3$ conjugués par rapport à la quadrique. Par conséquent, une involution dans P_1 correspond au produit de deux réflexions point-plan dans $\mathbb{R}^3$, le point et le plan de l'une étant respectivement incidents au plan et au point de l'autre.

Notons P_1 et P_2 les deux réflexions point-plan, C et D leurs centres respectifs, et c et d leurs plans. Puisque les réflexions point-plan laissent la quadrique invariante, c est le plan polaire de C et d celui de D. L'intersection de c et d est une droite, cd, dont les points sont invariants par P_1 et P_2, et donc par leur produit, $P_1P_2 = Q$. De plus, P_1 et P_2 induisent la même involution sur la droite invariante CD, et par conséquent Q laisse chaque point de CD invariant. Une involution de $\mathbb{R}^3$ qui laisse chacune des deux droites non coplanaires ponctuellement invariante est appelée une réflexion de droite.

Pour trouver la transformée d'un point X n'appartenant ni à CD ni à cd, on considère l'intersection du plan formé par X et CD avec le plan formé par X et cd. Cette intersection est une droite qui coupe CD et cd respectivement aux points E et F. Puisque E et F sont invariants, la droite EF l'est également, et la réflexion sur cette droite induit l'involution de E et F. Par conséquent, la transformée de X est la conjuguée harmonique de X par rapport à E et F. La réflexion sur cette droite est donc entièrement déterminée par les deux droites qu'elle laisse ponctuellement invariantes.

En voyant $\mathbb{R}^3$ comme un espace euclidien, et la quadrique comme une sphère à l'intérieur de cet espace, la réflexion par rapport à une droite laisse invariant tout plan de faisceaux sur cd et CD et donc laisse invariant deux faisceaux de cercles sur la sphère. Par notre construction initiale, c et d coupent la sphère en cercles qui s'intersectent en les points A^i et B^i correspondant aux points invariants A et B de l'involution dans P_1. Les plans sur cd coupent donc la sphère en les cercles en A et B et les plans sur CD coupent la sphère en le faisceau de cercles orthogonaux aux cercles en A et B.

On peut exprimer les composantes, Q^i_j, de la réflexion par rapport à une droite en fonction des coordonnées q_{ij}, de cd par la formule

$$Q^i_k = q^{ij}\, q_{jk} + \frac{1}{4}\, q^{pq}\, q_{pq}\, \delta^i_k. \tag{14.1}$$

En effet, si on choisit un système de coordonnées dans lequel les points invariants α_A et β_A ont comme coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$, les points correspondants A^i et B^i dans $\mathbb{R}^3$ sont, par (1.8), $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$, et $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1)$. Les coordonnées de cd et CD sont donc

$$\|q^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \text{et} \quad \|q_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{14.2}$$

En substituant dans (14.1), on obtient

$$\|Q^i_k\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| - \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \tag{14.3}$$

et donc la colinéation $Y^i = 2\, Q^i_j\, X^j$ est

$$Y^1 = -X^1, \quad Y^2 = -X^2, \quad Y^3 = X^3, \quad Y^4 = X^4, \tag{14.4}$$

qui est clairement la réflexion par rapport à une droite de droites invariantes $X^1 = X^2 = 0$ et $X^3 = X^4 = 0$.

Factorisation de la forme quadratique fondamentale

15. On commence cette section en observant que les matrices hermitiennes d'ordre 2 constituent un espace linéaire de 4 dimensions réelles. Si l'on combine ce résultat, comme exprimé dans (4.7), avec le théorème (démontré en section 12) qu'une matrice hermitienne définit une antiinvolution, on voit que $(\overline{g}_{i\dot{A}B}\, X^i)(g_j^{\dot{B}C}\, X^j)$ est un multiple de δ^A_C pour toutes les valeurs des variables X^i. Par conséquent,

$$(\overline{g}_{i\dot{A}B}\, X^i)(g_j^{\dot{B}C}\, Xj) = \rho_{ij}\, X^i\, X^j\, \delta^C_A. \tag{15.1}$$

Pour évaluer $\rho_{ij}\, X^i\, X^j$, on rend A égal à C et on somme ; on obtient

$$g_{ij}\, X^i\, X^j = 2\, \rho_{ij}\, X^i\, X^j, \tag{15.2}$$

puisque $\overline{g}_{i\dot{A}B} = g_{i\dot{B}A}$ et

$$g_{i\dot{B}A}\, g_j^{\dot{B}A} = g_{ij}, \tag{15.3}$$

grâce à (4.8). Les équations (15.1) sont alors

$$2(\overline{g}_{i\dot{A}B}\, X^i)(g_j^{\dot{B}C}\, Xj) = g_{ij}\, X^i\, X^j\, \delta^C_A. \tag{15.4}$$

Rendre égaux les coefficients dans (15.4) donnent les équations importantes

$$\overline{g}_{i\dot{A}B}\, g_j^{\dot{B}C} + \overline{g}_{j\dot{A}B}\, g_i^{\dot{B}C} \;= g_{ij}\, \delta^C_A. \tag{15.5}$$

Les équations (15.4) peuvent être interprétées comme une factorisation de la forme quadratique $g_{ij}X^iX^j$ en produit de deux formes linéaires $\sqrt{2}\, \overline{g}_{i\dot{A}B}\, X^i$ et $\sqrt{2}\, \overline{g}_{j\dot{B}C}\, X^i$ avec les coefficients matriciels. On peut alors écrire $g_{ij}\, X^i\, X^j$ comme le carré une forme linéaire unique si on combine $\|\overline{g}_{i\dot{A}B}\|$ et $\|g_i^{\dot{A}B}\|$ en les matrices 4×4,

(15.6)
$$\gamma_i = \sqrt{2}\left\|\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \|g_{i\dot{A}B\|} \\ \|g_i^{\dot{A}B}\| & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}\right\|$$

et on observe alors que (15.5) et son conjugué implique

(15.7)
$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2g_{ij}1.$$

Alors on peut écrire (15.4) ainsi

(15.8)
$$(\gamma_i X^i)^2 = g_{ij}X^iX^j1.$$