

Transcription d'une conférence d'Alain Connes à l'IHP à laquelle j'avais assisté le 12 novembre 2010, une conférence du cycle "Une question, un chercheur" : Espace-temps, nombres premiers, deux défis pour la géométrie

BERNARD HELLFER¹ : Je suis très heureux de présenter Alain Connes, qui est un de nos très grands mathématiciens. Il a en particulier eu la médaille Fields en 82, en fait en 83, parce qu'il y a eu des aléas politiques à l'époque, pour ses travaux sur la classification des algèbres de von Neumann. C'est un sujet mathématique, mais qui avait déjà de profondes relations avec la physique; Alain Connes, ultérieurement, a construit la théorie, qui porte un peu son nom, de l'algèbre non commutative, dont sans doute il va nous parler un petit peu.

Il a aussi reçu en 2001 le prix Crawford et la médaille d'or du CNRS en 2004, pour ne mentionner que quelques unes des distinctions qu'il a eues. En dehors de son immense œuvre mathématique, il a aussi écrit des textes de réflexion sur l'activité d'un scientifique ou d'un mathématicien. Et donc on lui doit aussi deux livres, l'un en collaboration avec Jean-Pierre Changeux, *Matière à penser*, et un autre, *Triangle de pensée*, écrit avec deux autres mathématiciens.

Bien, Alain, je te cède la parole.

ALAIN CONNES : Voilà, donc, mon but dans cette conférence, c'est d'essayer de vous présenter, de vous initier à deux problèmes qui sont des deux problèmes magnifiques, qui sont à la fois reliés à la physique, mais aussi aux mathématiques et qui ont trait à la géométrie. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand on essaie de comprendre soit l'espace-temps, soit en fait l'ensemble des nombres premiers qui apparaissent tout à fait désordonnés au premier contact, eh bien, en fait, je vais essayer de vous expliquer en quel sens, justement, on est en train de chercher une géométrie qu'on n'a pas encore vraiment trouvée.

Pourquoi ? Parce qu'il y a des bornes extrêmement précises qui permettent de savoir si on a réussi ou pas. Et en ce qui concerne la structure de l'espace-temps, la borne actuelle, c'est, si vous voulez, le fait qu'on sait quantifier les autres forces que la gravitation, mais on ne sait pas quantifier la gravitation. C'est-à-dire qu'on ne sait pas comment réconcilier la mécanique quantique avec la

Référence : <https://smf.emath.fr/smf-dossiers-et-ressources/connes-alain-espace-temps-nombres-premiers-deux-defis-pour-la-geometrie>.

Transcription en \LaTeX : Denise Vella-Chemla, avril 2026. *Je raconte une anecdote : j'arrivais à l'IHP pour assister à cette conférence, j'étais seule, et j'avais alors 45 ans; j'étais entourée d'étudiants des universités ou grandes écoles alentour, qui venaient eux aussi assister à la conférence. Ne parlant pas moi-même, étant seule, mon oreille fut attirée par une conversation entre deux étudiants qui se trouvaient à proximité de moi : l'un "Tu le connais, toi, le conférencier ?". L'autre, assez docte : "Mais bien sûr, c'est Alain Connes, le créateur de la géométrie non commutative...". Le premier, dont le ton témoigne de la gêne qu'il éprouve à "ne pas savoir" : "Ah bon ?... Et tu connais ses travaux depuis quand ?...". Et là, le second, rigolard : "Eh bien, depuis ce matin, je ne voulais pas avoir l'air trop idiot en arrivant, alors, j'ai regardé qui était Alain Connes sur la toile, c'est tout !". Le premier a rigolé aussi, soulagé. Je n'ai sûrement pas retranscrit exactement les termes, mais seulement l'idée générale; ce qui est (doublement) marrant, c'est d'une part l'anecdote, mais c'est aussi que, sans le savoir, ces étudiants témoignaient exactement de ce qui serait dit par Alain Connes dans sa conférence, sur l'angoisse de ne pas comprendre, etc. Ce qui triplerait la rigolade, ce serait que ces étudiants se reconnaissent, mais se rappeler d'une conversation qu'on a eue 16 ans en arrière...*

1. alors président de la Société Mathématique de France (SMF).

gravitation.

Et en ce qui concerne les nombres premiers, il y a une autre borne qui est extrêmement précise, je vais en parler, c'est ce qu'on appelle la conjecture de Riemann, et on ne sait toujours pas la démontrer. Donc, c'est ça qui est merveilleux dans les mathématiques ou dans la physique, c'est quand il existe, comme ça, des problèmes qui sont relativement simples à formuler, mais dont la compréhension, si vous voulez, est bien codifiée, et en fait, va nous permettre, au fur et à mesure, de découvrir des outils, mais pas seulement des outils pour les mathématiques, parce qu'il faut essayer de comprendre, quand les gens vous posent la question, à quoi les mathématiques sont utiles. En fait, les mathématiques sont sans doute l'usine la plus performante pour fabriquer des concepts, et des concepts, après, qui servent partout. On sait bien, si vous voulez, qu'en France, on insiste beaucoup sur la formation mathématique, mais justement, la formation mathématique permet ensuite de réfléchir, de penser de manière beaucoup plus rationnelle et beaucoup plus forte que sans cette formation-là, et un autre avantage énorme qu'elle a, justement, c'est cette potentialité, qu'avait sans doute la philosophie au départ, mais il n'y avait pas de vraie différence, justement, d'élaborer, de créer des concepts.

Alors, en fait, si vous voulez, la nuance entre mathématiques et physique est très difficile à cerner. Pour certains, les mathématiques sont le langage dans lequel la physique a été écrite, pour d'autres, les mathématiques sont la partie de la physique qui ne coûte rien, parce que les expériences sont, en général, très bon marché. Donc, si vous voulez, il y a des points de vue extrêmes là-dessus, mais ce qui est merveilleux, je vais commencer à en parler tout de suite, puisqu'on m'a demandé de parler un tout petit peu de mon itinéraire, mais on va voir tout de suite, si vous voulez, qu'une des choses qui a caractérisé le début du XXe siècle, c'était qu'à la fin du XIXe siècle, les gens pensaient que la physique était terminée, il y avait beaucoup de gens qui avaient écrit qu'on connaissait toutes les lois de la physique, et tout d'un coup, en 1900, en décembre 1900, il y a eu l'irruption du quantique par la personne de Max Planck.

Et donc, ce qu'a fait Max Planck, c'est qu'il était dans un institut où il y avait des gens qui faisaient, qui mesuraient ce qu'on appelle l'intensité de la radiation émise par le corps noir. Alors, le corps noir, ce n'est pas un truc très, très mystérieux, chacun d'entre nous peut agir comme un corps noir et émettre de la radiation. Et donc, il avait dans cet institut plusieurs équipes expérimentales, il y en avait qui travaillaient à petite fréquence, il y en avait qui travaillaient à haute température, il y en avait qui travaillaient à basse température.

Et il y avait une contradiction qui était que, si vous voulez, si on appliquait les lois de la physique tout à fait classiques, donc c'est la flèche qui est à gauche, là-bas, il y avait une loi de mécanique statistique qui était bien connue à l'époque, qui était que chaque degré de liberté en mécanique donnait une contribution qui était proportionnelle à la température absolue, avec une constante de proportionnalité qu'on appelle la constante de Boltzmann. Et donc, si on regarde la radiation, dans la radiation, il y a une infinité de modes, ça impliquait immédiatement qu'on avait ce qu'on appelle la catastrophe ultraviolette, c'est-à-dire qu'on avait une divergence, c'est-à-dire que l'énergie totale était infinie. Alors, d'un autre côté, il y avait d'autres mesures qui avaient été faites à basse température, etc.

Et donc Planck se trouvait devant une contradiction. Il était devant une contradiction, d'une part parce qu'il y avait ce qu'on appelait la catastrophe ultraviolette, d'autre part parce que les mesures qui avaient été faites par les gens qui travaillaient dans ce domaine ne ressemblaient absolument pas aux mesures qui avaient été faites dans l'autre domaine. Alors, ce qu'a fait Planck, c'est un théoricien, mais il a compris qu'en fait, il y avait une fonction qui donnait le résultat d'un côté et qui donnait le résultat de l'autre.

Mais cette fonction, elle n'a rien du tout d'évident, parce que si vous la regardez un petit peu, vous verrez qu'elle implique vraiment l'expression $\frac{x}{e^x-1}$. Et bon, ça, c'était une fonction qui était déjà connue de Euler, Maclaurin, etc. Et c'est une fonction qui donne les nombres de Bernoulli lorsque vous regardez son développement limité. Donc, Planck a eu cette idée-là.

Et puis après, il a passé environ je ne sais pas combien d'années à essayer de trouver une justification théorique à sa formule. Entre temps, les expérimentateurs avaient vérifié que sa formule était merveilleusement en accord avec l'expérience. Donc, vous voyez, il y a une règle qui est que l'inspiration peut venir de la physique à condition, justement, qu'il y ait constamment un contact étroit avec l'expérience, avec l'expérimentation.

Donc, Planck avait trouvé cette formule. On va y revenir. Et en fait, si vous voulez, ça a été le point de départ, donc décembre 1900, de ce qu'on appelle la mécanique quantique.

Mais la mécanique quantique, en fait, elle est apparue, si vous voulez, elle est devenue, elle a pris une formulation mathématique presque définitive en 1925. Et cette formulation est venue à nouveau de l'expérience. Et elle est venue du fait que si vous regardez les atomes, par exemple, cet atome, je vous laisse deviner quel corps chimique il représente.

D'accord? Pour que vous soyez quand même un petit peu... D'accord? Donc, des atomes comme ça, ils ont un spectre. Et leur spectre, c'est une espèce de signature. Et cette signature, elle apparaît soit par ce qu'on appelle le spectre d'émission, vous aurez utilisé ça, le spectre d'émission, c'est un spectre, vous avez un fond qui est obscur et puis vous avez un certain nombre de raies spectrales comme ça. Et vous avez aussi ce qu'on appelle le spectre d'absorption. Et ce spectre d'absorption, c'est à nouveau un résultat expérimental merveilleux qui avait été trouvé lorsqu'un physicien absolument génial avait eu l'idée de... Bien sûr, on savait qu'on pouvait faire passer les rayons du soleil à travers un prisme et puis regarder ce que ça donne. Mais lui, il avait eu l'idée géniale de regarder ça au microscope. Et en regardant au microscope, il avait vu qu'il manquait des raies.

Alors il s'était dit, mon télescope n'est pas au point, etc. Je vais le nettoyer. Il l'a fait dix fois, cent fois, etc. Et puis il y avait toujours des raies. Et ces raies sont ce qu'on appelle des raies d'absorption, c'est-à-dire qu'il y a des corps chimiques dans l'enveloppe extérieure de l'étoile. Et lorsque la lumière passe à travers, il y a une absorption de lumière qui se fait et le résultat, c'est une raie obscure comme ça, exactement la même longueur d'onde que dans le spectre d'émission.

Alors maintenant, les gens ont essayé de comprendre, parce que si on vous dit que chaque élément chimique a une signature, c'est naturel d'essayer de voir si ces signatures ont certaines régularités qui permettent ensuite de mieux comprendre ce qu'elles signifient. Alors on a essayé de comprendre

les régularités de ces signatures. Et les gens, au départ, lorsqu'ils avaient voulu comprendre les régularités de ces signatures, ils s'imaginaient que le corps chimique en question, c'était comme un atome, si vous voulez, et que ce corps chimique, on pouvait le modéliser comme étant un petit système solaire, donc comme un système classique.

Alors en fait, on s'était aperçu que si on modélisait un corps chimique sous cette forme-là, il y a un phénomène qui aurait dû se produire, et le phénomène qui aurait dû se produire, c'est que quand vous avez une raie spectrale, eh bien, vous auriez dû avoir tous les multiples entiers de cette raie spectrale qui auraient dû apparaître. Ce n'est manifestement pas le cas sur les spectres que l'on voit. Donc si vous voulez, la règle qu'on aurait dû avoir, c'est que si vous avez une fréquence ν_1 et une fréquence ν_2 , on aurait dû avoir que $\nu_1 + \nu_2$ est aussi une fréquence.

D'accord? Alors ce n'est pas du tout ça qui s'est produit. Ce qui s'est produit, c'est que les physiciens, ont été capables de comprendre qu'en fait, les raies spectrales, elles étaient indexées par des couples. C'est-à-dire qu'en fait, les raies spectrales, il ne fallait pas les penser comme ν_1, ν_2 , etc., il fallait les penser comme $\nu_{\alpha\beta}, \nu_{\beta\gamma}$. Donc, elles étaient indexées... Alors, α, β, γ , ça peut être tout ce que vous voulez. Ça n'a pas du tout de raison d'être des nombres, .

Ça peut être tout ce que vous voulez, des lettres, tout ce que vous voulez. Et ce dont ils se sont aperçus, donc, les physiciens, c'est que si vous prenez $\nu_{\alpha\beta} + \nu_{\beta\gamma}$, eh bien, ça, ça vous donne $\nu_{\alpha\gamma}$. Donc, ils ont compris qu'il y avait une règle qui n'était pas la règle naïve comme ça d'addition, mais qui disait que c'était indexé par des couples et que ça se composait lorsque les couples avaient en commun l'élément qui est ici.

Si vous prenez un couple $\nu_{\alpha\beta}$ et un couple $\nu_{\gamma\delta}$, ça ne se composera pas. Ça ne se compose que comme ça. Alors, là est venue la découverte absolument incroyable d'Heisenberg.

Donc, ce que Heisenberg a compris, il a compris en termes mathématiques savants, mais peu importe, il faut que vous réalisiez à quel point c'est enraciné dans l'expérience. Le principe qui est ici, c'est ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg, de combinaison des fréquences. Et ce qu'Heisenberg a compris, c'est qu'il a compris que si on travaillait dans le classique, en fait, on serait en train d'utiliser la transformée de Fourier par rapport à cette opération-là.

Et donc, si vous voulez, on écrirait la convolution des fonctions, c'est-à-dire qu'on écrirait que pour faire le produit de deux fonctions f , on fait intégrale de $f_1(\nu_1), f_2(\nu_2)$, des ν tels que $\nu_1 + \nu_2 = \nu$. Ça, ça va me donner ce qu'on appelle la convolution $f_1 \star f_2$ de ν . On pourrait mettre une somme aussi.

Et donc, Heisenberg a dit, je vais prendre la même règle, mais avec la règle de Ritz-Ridberg. D'accord? Si vous voulez être plus simple, vous pouvez mettre une somme ici si vous n'aimez pas les intégrales. D'accord? Hein? Bon.

Donc, qu'est-ce qu'il a dit, sur un groupe discret, comme on dit, d'accord? Donc, qu'est-ce qu'il a dit Heisenberg? Eh bien, il a dit, ce n'est pas ça qu'on voit expérimentalement. Ce qu'on voit expérimentalement, c'est cette règle-là, $\nu_{\alpha\beta} \oplus \nu$. Donc, il a dit, je vais prendre une quantité, je vais l'appeler A , et puis je vais calculer le produit de A par B en α, γ .

Eh bien, ça, ça va faire la somme des $A_{\alpha\beta}$ que multiplie $B_{\beta\gamma}$. Et ça, c'est simplement à cause de la règle physique qui est ici. Et alors, quand vous faites ça, tout mathématicien sait que ça, ce sont des matrices.

Et donc, vous êtes en train de faire le produit de deux matrices. Et alors, l'extraordinaire nouveauté de ça, qu'a tout de suite trouvé Heisenberg, c'est que les matrices, elles ne commutent pas. C'est-à-dire que si vous faites le produit dans votre ordre, au lieu de faire AB , vous faites BA , ça ne vous donne pas le même résultat.

D'accord ? Donc, la découverte énorme qu'a faite Heisenberg, c'est que quand vous travaillez avec des systèmes microscopiques, la règle usuelle qui vous permet de commuter, de permuter les observables, les quantités observables, ne marche plus. Donc, il faut faire beaucoup plus d'attention. Ça signifie que quand vous travaillez dans le microscopique, il y a une subtilité qui se présente.

Cette subtilité, elle apparaît avec un coefficient qui est tout petit, qu'on appelle la constante de Planck, qui intervenait dans la formule de tout à l'heure. C'est ce qu'on appelle \hbar . Donc, la subtilité apparaît avec le coefficient \hbar . Mais ce qui est extraordinaire, donc, c'est que la physique, par ses résultats expérimentaux, vous oblige à être beaucoup plus précautionneux et à faire beaucoup plus d'attention quand vous faites les calculs. Vous n'avez plus le droit de permuter librement des termes comme ça.

D'accord ? Alors, donc, ça, ça a été une découverte extrêmement importante. Et après, donc, Heisenberg, donc ça, c'était en 1925, très peu de temps après, il faut bien comprendre que dans la découverte de Planck, on va le voir tout de suite, mais dans la découverte de Planck et dans le mot quantique, il y a intégralité. C'est-à-dire, il y a le fait que le principe vous dit que l'énergie est quantifiée, c'est-à-dire que n est un entier, un entier positif.

C'est-à-dire que quand vous regardez un oscillateur, vous allez seulement avoir les énergies possibles qui sont des multiples entiers de $\hbar\mu$. Alors, évidemment, ça correspond à la théorie d'Einstein, du photon, etc., etc. Ça crée toutes sortes de choses.

Mais mathématiquement, a priori, le fait de parler d'un entier paraît, a priori, complètement incompatible avec cette histoire de non-commutativité et de matrice. Et c'est Paul Dirac qui a eu une idée merveilleuse, qui a été le début de la théorie nucléaire, de ce qu'on appelle la physique nucléaire. Et donc, son idée, ça a été la suivante, c'est ce qu'on appelle la quantification de l'électromagnétisme.

L'idée de Paul Dirac est la suivante, c'est "comment est-ce qu'on va dire qu'un nombre est un entier positif ?". Si on le dit de manière brutale, on fait du Bohr. Et Bohr, ça marchait bien, il y avait des conditions de quantification, etc., mais c'était assez limité. Quelle a été l'idée de Dirac ? Eh bien, l'idée de Dirac, ça a été de dire qu'en fait, ce qu'avait trouvé Heisenberg, c'étaient de nouveaux nombres que Dirac appelait des q -numbers, c'est-à-dire, c'est des nombres quantiques.

Ce ne sont pas des nombres ordinaires. On peut y penser en tant qu'opérateurs, mais en fait, ce ne sont pas des nombres ordinaires, ces nombres ne commutent pas entre eux. Et le fait d'avoir des

nombres qui n'auront comme valeur que des entiers positifs, c'est quoi ? Eh bien, c'est la relation de commutation qui vous dit que, quand vous prenez un nombre a et son complexe conjugué, qu'on appelle a^* , eh bien, on sait qu'il ne commute pas, donc aa^* , ça ne va pas faire la même chose que a^*a . Mais la règle qu'a imposée Dirac, qui est incroyable, il a imposé que aa^* , ça vaut $a^*a + 1$. Alors, pourquoi est-ce qu'on a dit des entiers ? Pourquoi est-ce que cette règle-là vous donne les entiers ? Elle vous donne les entiers pour deux raisons qui sont très simples à expliquer.

La première, c'est que, quand vous prenez un élément de la forme a^*a , c'est comme quand vous prenez un nombre complexe de la forme $\bar{z}z$. Un nombre complexe de la forme $\bar{z}z$, il est positif. C'est un nombre réel et positif. Donc, un nombre de la forme a^*a , il est forcément positif.

Alors, maintenant, pourquoi est-ce que ce nombre-là, il doit être entier ? Pourquoi est-ce qu'il doit être entier ? Eh bien, il y a un autre phénomène qui est très simple à démontrer, qui est que les nombres de Dirac ou les opérateurs, si vous voulez, dans l'espace de Hilbert, pour être plus savant, ils ont la propriété que, bien qu'ils ne commutent pas, le spectre d'un produit AB c'est la même chose que le spectre de BA . Donc, le spectre de AB est égal au spectre de BA . Je vais faire une petite parenthèse avant de continuer.

C'est pour vous expliquer, si vous voulez, que, en fait, ce fait que l'on doit être sensible à la non-commutativité, c'est un fait auquel tout le monde est habitué tout le temps. Tout le temps, tout le temps. Pourquoi ? À cause du langage courant.

Je vais faire un petit break comme ça. Donc, une fois, si vous voulez, j'ai reçu, j'espère que je vais m'en souvenir, j'ai reçu un e-mail de quelqu'un que je connaissais bien et j'ai cru qu'il était venu fou. Il m'a envoyé un e-mail et dans son e-mail, il m'a dit "Je suis alençonais et non alsacien".

Si tu veux un conseil d'Anna, rendez-vous au "coin Annales". J'ai dit, putain, mais c'est la cata, j'ai dit, ça y est, il est complètement fada. D'accord ? Et puis, j'ai réfléchi, j'ai réfléchi, j'ai réfléchi et j'ai compris que si on appliquait la commutativité, il y avait mon nom Alain Connes qui était écrit quatre fois.

Donc... J'espère que vous saisissez la nuance. Donc, si vous voulez, la nuance du microscopique, du quantique par rapport au classique, c'est celle-là. C'est une nuance qui vous dit que quand on travaille dans le microscopique, il faut faire attention, mais il y a aussi des merveilles.

Et la première merveille qu'avait trouvée Dirac, c'était cette chose-là. C'était le fait qu'on pouvait penser à un entier simplement par cette incroyable petite équation qui est que $aa^* - a^*a = 1$. Alors, où intervient ce a , ce coefficient a ? Il intervient quand on écrit le champ électromagnétique. Donc, Dirac a réécrit le champ électromagnétique et au lieu d'utiliser comme coefficient les modes de Fourier du champ électromagnétique, au lieu d'utiliser des nombres complexes, pour a , il a utilisé ces nombres-là.

Et il s'est aperçu, de miracle en miracle, il s'est aperçu d'abord qu'il démontrait que les constantes A et B d'Einstein, qu'Einstein avait devinées par ce qu'on appelle le Gedankenexperiment, c'est-à-dire par la pensée pure, mais qu'il ne savait absolument pas démontrer, Dirac obtenait tout de

suite ces constantes A et B d'Einstein d'émissions et d'absorption des atomes. Et puis, Dirac s'est aussi aperçu d'une chose, il s'est aperçu que s'il écrivait le champ électromagnétique comme ça, le nombre de photons n'était plus conservé. Immédiatement après Dirac, son idée a été reprise par d'autres physiciens et ils en ont déduit que le nombre d'électrons autour d'un atome n'était pas conservé.

Donc, l'alchimie existe, et donc, on peut transformer des corps qui ont un certain nombre atomique en des corps qui ont un autre nombre atomique, et c'est ça le début de toute la physique nucléaire. Donc, c'est vraiment un moment absolument extraordinaire, mais c'est un moment dont la racine, si vous voulez, philosophique ou mathématique, est incroyablement belle.

Parce que qu'est-ce qu'elle nous dit ? Elle nous dit qu'à travers la physique, on a trouvé que la notion de nombre à laquelle nous sommes habitués, elle est trop limitée. Et en fait, on a besoin de l'élargir et on a besoin de permettre cette non-commutation. Alors après, comment est-ce qu'on obtient la loi de Planck, de tout à l'heure, à partir de cette formule ? On obtient en faisant, en prenant ce qu'on appelle un ensemble de Boltzmann et en prenant la valeur moyenne de l'énergie.

Alors quand vous allez calculer ça, comme l'énergie est quantifiée, c'est-à-dire c'est nh_μ , c'est tous les multiples entiers de h_μ , vous allez obtenir une série qui va avoir en gros la forme $\frac{\sum ny^n}{\sigma y^n}$, d'accord ? Eh bien ça, je vous demande de vérifier que ça fait $\frac{y}{1-y}$. Bon, il y a peut-être un petit erreur, mais bon, c'est quelque chose comme ça, d'accord ? Et $\frac{y}{1-y}$, c'est $\frac{1}{y-1} \cdot \frac{1}{y}$, c'est avec exponentielle de $-\beta E$, β , c'est $\frac{1}{kT}$, c'est un coefficient qui dépend de la température, E c'est égal à $\hbar\mu$, le premier E , donc vous allez avoir le terme $\hbar\mu$, en fait, sur exponentielle $\frac{\hbar\mu}{kT} - 1$ et ce terme-là, c'est exactement le terme qui apparaît dans la formule de Planck. C'est exactement ce terme-là qui apparaît dans la formule de Planck. Le terme qui est devant, c'est un terme qui est commun au classique et au quantique.

Alors on m'a demandé de résumer un petit peu comment j'ai fait, comment j'ai commencé à travailler, etc.

Donc j'ai essayé de trouver le seul moment où j'ai où, si vous voulez, j'ai commencé à exister dans le paysage mathématique et c'était dans l'année 71 et donc j'avais fait un voyage aux États-Unis et j'ai appris aux États-Unis un théorème, je vais vous expliquer, qui est un théorème qui a trait justement à l'expression qu'on avait au tableau ici. Vous voyez, vous avez cette expression qui est la quantité définie par Boltzmann ici, c'est-à-dire on fait la somme avec le poids $\exp(-\beta e)$, qui est ce qu'on appelle le poids de Boltzmann et c'est ce qu'on appelle l'ensemble canonique en mécanique statistique quantique. Alors en fait, la relation qu'il y a entre l'état ϕ et l'évolution dans le temps qui est engendrée par ce qu'on appelle l'Hamiltonien ici, c'est une relation qui a été exploitée par deux mathématiciens japonais qui s'appellent Tomita et Takezaki et dans les années 67-68, il y avait un théorème qui était dû à Tomita et Takezaki et qui disait que lorsqu'on prend une algèbre de von Neumann, dont on a déjà entendu parler dans l'introduction, alors à ce moment-là, il existe un groupe à un paramètre qui est associé à chaque état, peu importe la signification de ces mots.

Moi j'ai commencé à exister dans le paysage lorsque j'ai démontré la chose suivante dans ma thèse en 72, j'ai démontré qu'en fait si on changeait la classe, si on changeait l'état dans l'algèbre d'opé-

rateur, dans l'algèbre de von Neumann, eh bien en fait, on changeait ce groupe à un paramètre mais seulement modulo ce qu'on appelle les automorphismes intérieurs. Alors qu'est-ce que c'est que les automorphismes intérieurs? Si vous prenez une algèbre et que vous faites de l'algèbre, mais si cette algèbre n'est pas commutative, eh bien vous avez des transformations de votre algèbre qui seraient idiotes si vous étiez dans le commutatif parce que UXU^{-1} ça vaudrait toujours X , mais qui ne le sont pas dans le cas non-commutatif. C'est ce qu'on appelle des automorphismes qui sont triviaux, qui sont intérieurs.

Ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est que si on ignore ces automorphismes triviaux, eh bien à ce moment-là, une algèbre d'opérateur, ce qu'on appelle une algèbre de von Neumann, elle évolue dans le temps. C'est quelque chose de merveilleux. Elle tourne avec le temps.

Elle a une évolution qui est complètement canonique et en particulier elle a des périodes. Il y a des temps pour lesquels elle ne tourne pas, etc. Et ça, ça a donné une quantité d'invariants et ça a fait démarrer ce qu'on appelle justement la classification des facteurs.

Donc c'est comme ça que j'ai pénétré dans le domaine mathématique et chaque mathématicien est un cas singulier, donc on ne peut pas du tout le donner comme recette aux autres. Mais en tout cas, dans mon cas, ce qui a été extrêmement payant, c'est qu'on m'avait forcé à aller aux États-Unis à une conférence à laquelle a priori je savais que je ne comprendrais rien. Et puis j'y étais quand même allé.

Et puis j'avais acheté par hasard un bouquin, j'avais lu ce bouquin et je trouvais que c'était juste un titre d'une des conférences qui était donnée. Et puis tout a démarré à partir de là. Donc je veux dire, ne vous inquiétez pas si vous ne comprenez pas tous les détails des explications que je fais.

Parce que moi, quand j'avais votre âge, j'avais un prof qui nous avait dit : "il faut absolument que vous alliez écouter des conférences même si vous ne comprenez pas". Alors à l'époque, moi j'avais un copain et avec ce copain, le but qu'on avait, chaque fois que j'allais avec lui dans une conférence, c'était de le faire tellement rire, avec le fou-rire, qu'il serait obligé de sortir. Et alors on était allés à une conférence comme ça, j'avais réussi mon coup, il avait été obligé de sortir, il était tout rouge.

Et ce qui était extraordinaire, c'était que j'ai compris, je n'ai compris cette conférence que dix ans après. C'est à dire que j'avais gardé dans ma mémoire visuelle une formule que l'orateur avait écrite au tableau, et dix ans plus tard j'ai dit "Merde! C'est cette formule!". Donc je veux dire, en fait, ce qu'il faut comprendre, c'est que justement la physique et les mathématiques sont un domaine tellement merveilleux qu'en fait on ne sait pas par où passe l'inspiration.

Et justement, il y a une partie de mystère, c'est à dire que si tout était simple, clair, parfaitement compréhensible, comme des petites équations, c'est pas ça qui vous inspire. Et très souvent, il faut être extrêmement précautionneux, c'est à dire garder une partie de mystère. Si quelque chose est totalement compris, ça ne vous inspirera pas forcément.

Donc il y a une potentialité énorme au fait justement de garder une certaine... si vous voulez, de connaître certains résultats sans nécessairement toujours essayer de les démontrer. Bien sûr, mon

éducation a toujours été que si je voulais comprendre quelque chose, il ne fallait surtout ne pas aller directement à la démonstration, c'est la dernière des choses à faire, mais il fallait prendre l'énoncé, essayer de comprendre l'énoncé, et puis essayer de trouver soi-même une démonstration. En général, on n'y arrive pas.

Mais l'énorme avantage, c'est qu'après, quand on a bien séché dessus, et quand on regarde la démonstration, on dit : "on, ça, ça ne sert à rien, ça ne sert à rien, ça ne sert à rien..." Ouh?!² D'accord? Bon. Alors, donc ça, c'était... Maintenant, j'en reviens... La géométrie non-commutative, je ne vais pas trop vous en parler, mais on en reparlera plus tard.

On en reparlera plus tard dans le cadre des exemples. Ce que je veux vous expliquer, toujours, c'est relatif au quantique. Et donc, ce que je veux vous expliquer, c'est qu'il y a quelque chose d'extraordinaire dans le quantique, par rapport à la physique classique, c'est qu'il y a une variabilité fondamentale.

C'est-à-dire que, dans le quantique, il y a certaines expériences, comme l'expérience des fentes de Young, ou des choses comme ça, dans lesquelles vous allez obtenir un certain résultat expérimental. Par exemple, vous allez émettre un électron, il va passer à travers la fente, il va arriver à un autre point de l'écran. Eh bien, cette expérience, en tant que telle, n'est pas reproductible.

C'est-à-dire, si vous essayez de fixer les conditions initiales, de telle sorte que ça vous redonne le même résultat, vous n'y arriverez pas. Et ça, ce n'est pas parce que vous n'aurez pas assez de précision dans la manière dont vous envoyez l'électron, c'est parce que c'est un principe fondamental. Donc, dans la mécanique quantique, il y a une variabilité qui est encore bien plus forte que la variabilité que l'on connaît avec le temps qui passe.

Il y a des choses qui sont purement variables. Et donc, ce n'est pas étonnant que la notion de nombre qu'avait inventée Dirac, la notion de *q-number*, représente vraiment ce que c'est que la notion de variable.

Et donc qu'est-ce que c'est qu'une variable? C'est ce qu'on appelle un opérateur autoadjoint dans l'espace de Hilbert. Et alors, c'est merveilleux parce que quand on connaît le formalisme mathématique, peu importe les détails, on s'aperçoit que dans le classique, si on regarde les variables classiques, si on vous demandait "Qu'est-ce que c'est qu'une variable?" vous diriez, j'ai une variable réelle, vous diriez : "J'ai un ensemble X et j'ai une application de X dans \mathbb{R} ". Très bien, je veux dire, c'est la définition naïve classique qu'on donnerait d'une variable. Il y a un seul problème avec ça, c'est que si on prend cette définition, on ne peut pas avoir la coexistence entre des variables continues, qui impliquerait que l'ensemble X a au moins la cardinalité du continu, et des variables discrètes, qui signifierait que l'ensemble X est dénombrable.

Dès que vous avez une variable continue, l'ensemble X sera nécessairement non dénombrable, et à ce moment-là, vous ne pourrez pas avoir de variable discrète, sauf avec des valeurs qui sont reproduites une infinité de fois. Et alors la merveille, c'est que le quantique réconcilie ces deux choses.

2. Note de la transcriptrice : Là, ce "Ouh!" interrogatif-exclamatif signifie "Bien sûr que ça sert, et même de nombreuses années après".

C'est-à-dire que dans le quantique, ce que vous avez, c'est que ce qu'on appelle l'espace de Hilbert, par exemple, des fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est le même espace de Hilbert que l'espace des suites de nombres complexes dont la somme des carrés est finie, dont la somme des valeurs absolues (ou dont la somme des valeurs au carré) est finie.

Et ça, c'est merveilleux, parce que ça signifie que vous avez maintenant la coexistence entre les variables continues, qui ont un spectre continu, et les variables discrètes, qui ont un spectre discret. Et alors, maintenant, il y a eu, au moment de la création du calcul infinitésimal, il y a eu en gros une scission, il y avait en gros deux camps, il y avait le camp de Newton et le camp de Leibniz, Euler, etc. Et ce qui est incroyable, bien sûr, je veux dire, les deux avaient raison en un certain sens, mais ce qui est assez incroyable, c'est qu'on retrouve dans les écrits de Newton une définition des variables et des infinitésimaux qui cadrent exactement avec ce qui se passe dans le quantique.

C'est-à-dire, on définit ce qu'on appelle une variable, bon, ça s'est défini comme ça, mais ensuite, on dit qu'une variable est infinitésimale, justement, si, en négligeant un nombre fini de valeurs, toutes les autres sont plus petites que n'importe quel nombre arbitrairement donné, ε . Alors, ce qui se produit, incroyablement, c'est que dans le formalisme quantique, il y a précisément la place, exactement la place qu'il faut pour les variables infinitésimales de Newton. Et il y a des opérateurs, donc c'est ce qu'on appelle les opérateurs dans l'espace de Hilbert, qui ont cette étrange propriété, qui peuvent être plus petits que ε pour tout ε sans être nulles. C'est ce qu'on appelle les opérateurs compacts.

Et ils ont exactement les bonnes propriétés algébriques, c'est-à-dire exactement les propriétés que vous attendriez des infinitésimaux. La seule chose, bien sûr, c'est que maintenant vous devez faire attention à l'ordre des termes quand vous calculez, c'est-à-dire que vous êtes dans le non-commutatif. Voilà.

Alors maintenant, je vous passe ce dictionnaire, c'est un dictionnaire un peu technique, qui vous dit comment on passe de la version classique des choses avec l'intégrale, avec les infinitésimaux, avec les variables réelles, avec l'élément de longueur qu'on va revoir tout de suite, et comment ça se traduit dans le domaine quantique. Mais je vais y revenir. Alors maintenant, si vous voulez, j'en viens à l'incompatibilité justement entre le quantique, j'espère que je vous ai donné une impression presque surréaliste de ce que c'est que le quantique, qui est à la fois non commutatif, entier, très mystérieux, mais avec un potentiel fabuleux, on le sait.

Et Einstein a participé énormément à la découverte du quantique, puisque c'est lui qui a eu l'idée du photon, c'est lui qui a eu l'idée de l'effet photoélectrique, etc. Donc c'est vraiment un des pères, avec Planck, de la théorie quantique. Mais Einstein, avec Poincaré bien sûr, est aussi le père de la relativité restreinte.

Et pendant des années et des années, Einstein a essayé de comprendre comment la force de gravitation pouvait être compatible avec la relativité restreinte, il n'arrivait à rien. Et ce qui a débloqué les choses, c'est l'idée de Riemann, qui est cette idée selon laquelle on peut avoir une géométrie dans laquelle l'élément de longueur qui mesure la distance entre deux points va en fait être non pas l'élément euclidien, bon je vous passe l'espace de Minkowski, mais va être un élément qui va

être une somme sur $g_{\mu\mu} dx_\mu dx_\mu$, en termes de coordonnées locales, ce qu'on appelle les coordonnées locales. Alors ça, ça peut paraître tout à fait ésotérique, etc.

Mais en fait, ce qui s'est produit, c'est qu'après Poincaré, un mathématicien qui s'appelle Minkowski a eu l'idée de reformuler la relativité restreinte sous une forme géométrique. Mais Poincaré avait eu cette idée aussi. Et donc ce qu'il a fait, c'est qu'au lieu d'avoir la distance ordinaire où on aurait $dx^2 + dy^2 + dz^2$ dans l'espace ordinaire, il a mis devant un terme en $-dt^2$.

Bon, il faut la vitesse de la lumière, mais je la prends égale à 1. Oui, parce que la vitesse de la lumière, vous savez, il y a des gens qui vous disent que la vitesse de la lumière est variable. Ce sont des conneries. Pourquoi ? Parce que la vitesse de la lumière, c'est exactement comme si vous aviez décidé de mesurer les largeurs en mètres et les longueurs en pouces.

D'accord ? En fait, c'est un facteur de conversion. Vous mesurez exactement la même chose. Et donc après, ce qui est incroyable, si vous voulez, c'est qu'Einstein s'est aperçu que si vous prenez l'idée générale de ce qu'on appelle la géométrie de Riemann, c'est-à-dire l'idée que vous pouvez avoir des espaces courbes et que vous mesurez la distance entre deux points dans un espace, par exemple ici c'est la distance entre Seattle et Londres, en prenant le chemin le plus court entre les deux, d'accord, et en regardant l'intégrale de l'élément de longueur le long de ce chemin-là.

Ça, c'est une idée très simple, très fondamentale, eh bien, si vous remplacez le coefficient de dt^2 qui était -1 là-bas, d'accord, vous remplacez le -1 par $-1 + 2$ fois le potentiel newtonien, $V(x, y, z)$, d'accord, et vous calculez le chemin le plus court entre deux points, vous obtenez la loi de Newton dans le potentiel V . Donc Einstein s'est aperçu de ça. Donc il s'est aperçu que la loi de Newton qui vous donne la loi de comment on réagit au champ de gravitation, elle signifiait simplement un tout petit truc.

C'était de modifier la manière dont le temps passe avec un coefficient qui dépend du potentiel newtonien. Eh bien, vous ne me croirez peut-être pas, mais ce fait-là est utilisé pour faire les corrections dans le GPS. Et c'est comme ça que les gens ont fait en sorte que, lorsqu'ils creusaient le tunnel sous la Manche, en partant de l'Angleterre et en partant de la France, ils se rencontrent exactement. Ça aurait été gênant qu'ils soient à 10 mètres... Comme ils creusaient chacun de leur côté. Et quand vous êtes en dessous, vous n'avez aucun moyen de vous repérer, sauf le GPS justement.

Et incroyablement, le fait que la métrique, ce n'est pas exactement la métrique plate, mais le fait qu'elle est modifiée par le potentiel newtonien, avec un terme qui n'est pas -1 , mais qui est $-1 + 2V(x, y, z)$, eh bien ça intervient et ça vous donne une correction. Alors ça c'est merveilleux, parce qu'à partir du moment où Einstein a compris ça, il a compris qu'en fait, la chose qui comptait pour comprendre la force de gravitation, c'était la géométrie de l'espace-temps, justement. Et que cette géométrie de l'espace-temps, elle devait tenir compte des masses qui sont présentes par le potentiel newtonien.

Alors après, il a été beaucoup plus loin, etc. Il n'empêche que ça franchissait une étape énorme, bien sûr, c'est ce qu'on appelle la relativité générale, mais malheureusement, cette relativité générale est incompatible avec la mécanique quantique. En quel sens elle est incompatible avec la mécanique

quantique ? Elle le sera, bien sûr, un jour, mais elle était compatible avec la mécanique quantique au sens où, lorsqu'on a appliqué les idées du type, ce qu'on appelle renormalisation, aux champs de gravitation, c'est-à-dire, les physiciens, ils aiment bien penser en termes, vous voyez, de $g_{\mu\nu}$ ou de fonctions comme ça, qui dépendent du point de l'espace-temps et tout ça.

Lorsqu'on a essayé de traiter ça comme un champ ordinaire, on s'est aperçu que ça ne marchait pas, et qu'il y avait des divergences, un petit peu comme la divergence ultraviolette, qu'on a vue tout à l'heure, ce qu'on appelait la catastrophe ultraviolette, qui sont partout et qui font que rien ne marche. Alors, en fait, justement, à travers la géométrie non commutative, il y a une piste qui existe pour essayer de résoudre ce problème-là, et qui vient de Dirac, d'ailleurs. Pourquoi ? Parce qu'en gros, alors que Riemann, si vous voulez, donnait seulement le carré de l'élément de longueur, et vous voyez que donner seulement le carré de l'élément de longueur, c'est dangereux.

Je vais vous dire pourquoi. Parce que quand vous regardez cette formule, et quand vous essayez d'appliquer cette formule, vous voyez, je suppose que vous savez tous vous servir d'un ordinateur et d'un programme de calcul, etc. Et à partir du moment où vous savez, vous voyez que quand vous avez une racine carrée, c'est affreux.

C'est terrible. Essayez de mettre une racine carrée dans un programme d'ordinateur, vous verrez que c'est épouvantable. Donc, ce qu'a fait Dirac, c'est qu'il a réussi à extraire cette racine carrée, et ça, c'est fait au niveau opératoire.

Ça signifie, en fait, qu'au niveau de l'opérateur correspondant, qu'on appelle le Laplacien, ce qu'a montré Dirac, c'est que ce Laplacien avait une racine carrée, qu'on appelle l'opérateur de Dirac, et en fait, cet opérateur avait été déjà écrit par un physicien anglais, plutôt irlandais, Hamilton, celui qui a inventé les quaternions. Et, justement, avec les quaternions, je suppose que vous connaissez les quaternions, $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$, $ijk = -1$, etc. Vous connaissez ça, d'accord ? Donc, ce que Hamilton a écrit, il a écrit l'opérateur $i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$, d'accord ? Et si vous calculez le carré de cet opérateur, vous allez vous apercevoir que, comme i et j , par exemple, anticommulent, il n'y aura pas de terme en $dx dy$, parce que vous allez avoir $i dx$, $j dy$, puis vous allez avoir $+j dy + dy i dx$, et ça, ça va vous donner 0, d'accord ? Donc, vous allez avoir, en fait, $-dx^2 - dy^2 - dz^2$, et ça, c'est le Laplacien. Alors, donc, pour aller assez vite là-dessus, parce que je veux venir sur les nombres premiers, il y a toute une géométrie qui s'est développée, qui vient de la géométrie non commutative, qui est l'essence de la géométrie non commutative, et dans laquelle on fait la transition du point de vue de Riemann au point de vue qui est suggéré par la découverte de Dirac, et, en gros, pour résumer les choses, ce nouveau point de vue, c'est un point de vue dans lequel, pour mesurer la distance entre deux points, on ne prend plus un fil qui est tendu entre les deux points, mais on prend une onde qui va du point A au point B , et on mesure le déphasage de l'onde. Et la nouveauté de ce point de vue peut être parfaitement expliquée par rapport au point de vue de Riemann, en disant que c'est exactement le changement de paradigme qui s'est produit dans l'unité de longueur en physique.

L'unité de longueur en physique a été définie jusqu'en gros en 1960 comme étant le mètre étalon, on l'a appris, ça, en classe, l'unité de longueur, c'était le mètre étalon déposé au pavillon de Breteuil, près de Sèvres, un truc comme ça. Jusqu'au moment, en 1927, où les gens se sont aperçus que l'unité de longueur changeait de longueur. C'était plutôt gênant.

Alors, comment ils s'en sont aperçus ? Ils ont pris le mètre étalon déposé au pavillon de Breteuil, ils ont mesuré sa longueur en la comparant avec la longueur d'onde atomique, et ils se sont aperçus qu'elle changeait de longueur. C'est problématique. Mais ce n'était pas le seul problème.

Si vous réfléchissez un peu, supposez que vous vouliez unifier le système métrique dans la galaxie, par exemple. Si vous envoyez un message en disant aux gens : "on a unifié le système métrique dans la galaxie, si vous voulez mesurer votre lit, il faut que vous veniez à Paris. Il vous faut comparer votre lit au mètre étalon".

Ce n'est pas très efficace. Ce que les physiciens ont compris, ils ont mis un certain temps à le comprendre, c'est qu'en fait, l'unité de longueur qu'ils devaient choisir, c'est précisément ce qui leur avait permis de savoir que le mètre étalon changeait de longueur. C'est-à-dire, ce sont les longueurs d'onde atomique.

Et alors la merveille, c'est que ce changement de paradigme qui passe du mètre étalon aux longueurs d'onde atomique, c'est exactement le changement de paradigme qui passe de la géométrie de Riemann à la géométrie spectrale. C'est exactement ce changement de paradigme qui arrive. Le grand D , c'est l'opérateur de Dirac, c'est cette racine carrée du Laplacien. On vérifie que cette formule redonne la formule classique de la distance géodésique par un petit calcul, puisque cette norme a donné la norme de Lipschitz, de la fonction f , mais elle a un sens beaucoup plus général. Alors ensuite, j'en viens à ce que je disais tout à l'heure, cette géométrie, elle se relie directement à un problème qui est un problème évident.

Comment est-ce que nous donnons notre position dans l'univers ? Supposez que vous vous posiez cette question. Et c'est un problème qui s'est posé puisqu'on a voulu envoyer une sonde. Qu'est-ce qu'on a fait ? On a dit qu'il y a une certaine configuration de courbure, qu'il y a une grosse grosse étoile, le Soleil, après un petit truc, Mercure, après Vénus.

Donc vous envoyez ça, et ça, ça veut dire que la sonde est partie de la troisième planète. Mais évidemment, il y a toute probabilité qu'il existe des systèmes solaires qui ressemblent à celui-là et que donc, bon, si on donne ça comme seule information, ça ne nous singularise absolument pas. Alors vous pouvez dire : "Ouais, mais on connaît la relativité générale, donc on va donner nos coordonnées par rapport à un système de coordonnées.". Lequel ? Et où est son origine, par exemple ? Donc vous tournez en rond. Vous ne pouvez pas dire : "On est à Paris, etc.". Ça ne marchera pas.

Donc il faut trouver une manière de dire où on est qui soit invariante. Eh bien, cette géométrie spectrale donne une manière de dire où on est, de manière invariante. C'est-à-dire que d'abord, elle donne un invariant de la géométrie, qui est ce qu'on appelle le spectre de l'opérateur de Dirac.

Ce n'est pas un invariant complet, mais on trouve l'invariant complémentaire, qui est ce qu'on appelle la matrice de CKM³. Et on donne la position à laquelle on se trouve. Comment ? On la donne en donnant les produits scalaires des fonctions propres de l'opérateur de Dirac, mais au point

3. CKM = Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

où on est, c'est-à-dire dans les spinors, au point où on est.

Et les physiciens avaient pratiquement fait quelque chose d'analogue, c'est-à-dire que dans la sonde qu'ils ont envoyée, bon, ils ont montré deux trucs là, mais ils ont aussi donné quatorze directions, qui sont des directions de pulsars. Sur chacune des directions, ils ont mis la fréquence correspondante, et ils ont aussi pointé vers le centre de la galaxie. Donc vous voyez, ils ont eu cette idée, et mathématiquement, c'est une idée qui marche, mais à condition, bien sûr, d'avoir tout le spectre et de donner les produits scalaires correspondants aux valeurs propres, aux fonctions propres qui correspondent au spectre entier.

Donc, j'en viens maintenant, si vous voulez, aux applications de ça. Alors, ça c'est un peu Tartarin de Tarascon, dans les *Lettres de mon moulin*⁴. Donc, je veux dire, si vous voulez, qu'est-ce que c'est que cette énorme chose effrayante, cette titanesque formule ?⁵ Eh bien, c'est une formule qui résume la physique des particules, telle qu'on la connaît.

Et c'est une formule qui résume, si vous voulez, mais qui n'inclut pas la gravitation. C'est une formule qui résume la connaissance que l'on a de notre univers, de notre espace-temps. Notre espace-temps n'est pas seulement l'électromagnétisme, ce serait trop simple.

L'électromagnétisme occupe une toute petite place. D'accord ? Et ça, ça contient ce qu'on appelle les forces faibles, les forces fortes, le mécanisme de Higgs, ça contient tous les mécanismes du modèle standard. Et le travail que j'ai fait avec la géométrie non commutative permet d'écrire cette énorme chose comme étant simplement le nombre de valeurs propres de l'élément de longueur que l'on compte au-delà de la grandeur d'unification, de la longueur de Planck, si vous voulez.

On fait un développement. Pour faire ce développement, on utilise ce qu'on appelle l'équation de la chaleur, on utilise quantité de choses mathématiques. Et ce résultat signifie qu'on a appris une toute petite chose sur l'espace-temps. On a appris qu'en gros, si vous voulez, dans le modèle que j'ai, il a deux côtés. Il a un côté qui est coloré, c'est pour ça que j'ai mis des couleurs ici, et qui correspond à une algèbre qui est un tout petit peu non commutative, qui est l'algèbre de ce qu'on appelle les matrices 4×4 sur les nombres complexes. Et il a un côté qui n'est pas coloré, qui est comme ça.

Pourquoi ce côté est coloré ? C'est ce qui va correspondre au groupe des forces fortes, qui est SU_3 , et au groupe U_1 de l'électromagnétisme. Et il y a un côté qui n'est pas coloré, mais qui correspond à ce qu'on appelle les matrices 2×2 sur les quaternions, donc \mathbb{H} , ce sont vraiment les quaternions, ici.

Et ce côté-là, si vous voulez, il correspond à ce qu'on appelle le groupe d'isospins faibles et à la force électrofaible. Mais ce qui est merveilleux, si vous voulez, quand on fait ces calculs-là, c'est qu'on n'obtient pas seulement cette chose-là, mais on obtient cette chose-là couplée avec la gravitation. Alors malheureusement, la difficulté, c'est qu'on obtient ça au niveau classique et que tout

4. Note de la transcriptrice : Tartarin de Tarascon est un héros provençal qui dit qu'il a affronté un monstre imaginaire, la Tarasque, et qu'il l'a vaincu.

5. Note de la transcriptrice : se reporter à la page 36 de l'article <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0610241> pour voir l'équation du modèle standard des particules.

le problème qui reste entier, c'est le problème de savoir comment est-ce que ça va être quantifié, c'est-à-dire comment est-ce que ces idées merveilleuses de Dirac, etc., elles vont pouvoir s'appliquer lorsqu'on regarde la géométrie non plus du point de vue ordinaire, qui manifestement n'est pas adapté, mais du point de vue spectral.

Et ce qu'il faut arriver à comprendre, je suppose que vous connaissez tous le site merveilleux de la NASA où vous pouvez chaque jour avoir une image différente de l'univers. C'est l'œil qu'on a sur l'univers, ce site-là. Tous les matins, il vous donne une photo. Si vous cherchez, je ne sais plus quel est l'url. Enfin, avec Google, vous le trouverez tout de suite.

C'est le site de la NASA. Et tous les matins, vous avez une image différente de l'univers. Donc, grâce à Hubble, on peut regarder ailleurs.

Et ce qu'on voit est effarant. Mais ce qu'on voit, c'est spectral. Tout ce qu'on voit, c'est spectral.

C'est-à-dire que tout ce qu'on sait, par exemple, sur l'univers très jeune, on le voit parce qu'il y a le décalage vers le rouge, etc. Donc toute notre information, toute l'information qu'on a sur l'univers, on n'a pas la capacité de bouger parce qu'on est coincé sur la Terre, mais on l'a de manière spectrale. Et toute la difficulté, et je pense que c'est ce que fait le cerveau de manière assez constante, c'est de reconstruire, par une espèce de transformée de Fourier, un espace géométrique à partir de ces données qui sont dans l'espace des moments, qui sont spectrales, il y a une reconstruction qui se fait.

Alors ça, c'est une partie très importante justement du travail dans la géométrie non-commutative. J'en viens maintenant aux nombres premiers. Je ne voudrais pas négliger ça.

Donc les nombres premiers, je suppose que vous savez ce que c'est. Il y a peut-être une erreur, là. Je ne sais pas, non.

Non, ça n'a pas l'air quand même. De toute façon, bon. Donc voilà quelques nombres premiers.

Et donc il y a une fonction qui est très intéressante, qui est le nombre de nombres premiers plus petit que n . Alors, moi je me souviens quand j'étais en première, j'avais eu un clash avec mon prof de maths, parce que mon prof de maths avait dit il n'y a pas de formule qui donne le nombre de nombres premiers plus petit que n . Alors, je veux dire, j'étais rentré chez moi et puis, évidemment qu'il y a une formule parce qu'il suffit de savoir si vous pouvez diviser ou pas, etc. Donc j'avais produit une énorme formule qui prenait trois pages. Il y avait des sinus partout, etc.

D'accord ? Donc le problème, ce n'est pas qu'il n'y ait pas de formule. D'ailleurs en voilà une. Ça c'est une formule.

Elle est correcte. Elle vous donne le nombre de nombres premiers plus petit que n . Bon, il faut quand même que n soit plus grand que 5. C'est 2 plus la somme de 5 à n de cette quantité-là, où $\Gamma(k)$ c'est la factorielle. Ce n'est pas une formule qui va vous aider.

C'est ça qu'il faut bien comprendre. Le fait qu'on puisse écrire une formule, ça vous dit simplement

que c'est une fonction récursive. C'est-à-dire que c'est une fonction qui est bien définie par des choses simples, etc.

Mais ce n'est pas ça qui va vous aider. Ce qui nous intéresse, ce n'est pas du tout ça. Ce qui nous intéresse, c'est le comportement asymptotique.

C'est de savoir que cette fonction qui mesure le nombre de nombres premiers, donc cette fonction $\pi(x)$ ici, c'est une fonction en escalier parce qu'elle saute de 1 chaque fois qu'on traverse un nombre premier. Donc c'est que cette fonction-là, si vous voulez, en fait on peut la comprendre. Qu'est-ce que ça signifie la comprendre? Ça signifie comprendre que, en gros, c'est la superposition de deux choses.

Il y a quelque chose qui oscille terriblement, comme ça, c'est la différence entre... Mais qu'est-ce que c'est que ce li x ? Ce li de x , c'est ce qu'on appelle le logarithme intégral. C'est dû à Gauss. C'est l'intégrale de 0 à x de du sur $\log u$ ⁶. Alors si vous êtes un peu soigneux, vous allez me dire, ah oui, mais $\log 1$, ça vaut 0. Il faut faire un petit peu attention quand on traverse... D'accord? Parce que, heureusement, ça change de signe.

D'accord, donc ça va se compenser. Donc vous faites entre 0 et $1 - \varepsilon$, et puis entre $1 + \varepsilon$ et x , vous rajoutez, vous faites tendre vers 0 et ça va marcher. Alors ça, c'est une fonction qui a ce qu'on appelle un développement asymptotique.

C'est-à-dire que la quantité qui est à droite, ce n'est pas quelque chose qui va converger, parce qu'il y a les factorielles ici, mais c'est quelque chose qui va vous donner une approximation qui sera meilleure au fur et à mesure qu'on se dirigera vers l'infini, si vous vous arrêtez à ce qu'on appelle le plus petit terme. C'est-à-dire que vous prenez cette somme-là et vous prenez les termes jusqu'à ce qu'ils se remettent à croître et ça va vous donner une très bonne approximation. Alors la conjecture de Riemann, c'est que le reste, c'est-à-dire ce qui mesure la fluctuation de la fonction du nombre de nombres premiers, eh bien, c'est mesuré par la taille qui est la racine carrée de $x \log x$. Alors c'est vraiment le problème central de la théorie des nombres, en tout cas.

Et ce problème, en fait, on peut le reformuler d'une manière qui était à mettre au crédit d'Euler. Alors je vous rappelle que Euler avait fait quelque chose de magnifique parmi 36 choses magnifiques, mais il avait fait une chose qui était merveilleuse, c'est-à-dire qu'il avait calculé la somme des inverses des carrés des n premiers entiers. Et je vous demande de ne pas regarder dans le bouquin.

Si je vous demande de calculer $\sum \frac{1}{k^2}$, avec une certaine précision, vous voyez que le reste, ça fait $\frac{1}{n}$. Donc pour calculer à 10 décimales, il faudrait faire une somme absolument colossale déjà. Alors Euler avait trouvé ce qu'on appelle la formule d'Euler-Maclaurin avec les nombres de Bernoulli, c'est-à-dire les nombres qui interviennent là-dedans. Et ça permet de calculer cette somme-là, il avait calculé avec 20 décimales, en faisant la somme essentiellement de 5 ou 6 termes dans la formule d'Euler-Maclaurin.

6. $\int_0^x \frac{du}{\log u}$.

Et il avait remarqué que c'était la même chose qu'un nombre qu'il connaissait bien qui était $\frac{\pi^2}{6}$. Et alors ce que je vous demande, c'est de ne pas regarder dans les bouquins et d'essayer de trouver votre propre démonstration du fait $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. D'accord? Alors à l'occasion, en fait, Euler avait démontré ce qu'on appelle l'équation fonctionnelle, c'est-à-dire qu'il avait démontré que la fonction ζ^7 , qui est justement appelée après Riemann, elle vérifie une équation, c'est-à-dire que lorsqu'on change la valeur de s en $1 - s$, vous voyez, Euler, ce qu'il avait fait, c'était qu'il avait, par exemple, pour calculer cette $\sum \frac{1}{k^2}$ qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$, grâce à cette formule, la formule d'Euler-Maclaurin, il l'avait reliée à la somme des entiers. En fait, il mettait un signe quand même, parce que ça n'a pas l'air de trop converger, donc la somme de $(-1)^n \times n$. Alors ça, dans tous les cours, vous savez que ça diverge. D'accord? Mais Euler, il savait lui donner un sens.

Et dans les discussions avec Leibniz, etc., ils se demandaient quelle pouvait être la valeur de par exemple $\sum (-1)^n$, ils avaient trouvé que c'était 0,5. Et cette valeur, on peut la calculer à partir des nombres de Bernoulli. Et plus généralement, $\sum (-1)^n n^k$. Et ça, on peut le calculer directement à partir de cette formule-là, parce que quand vous faites cette formule-là et que vous voyez apparaître les nombres de Bernoulli B_k dans le développement limité, si vous faites la série géométrique, pour cette expression-là, vous allez avoir des sommes de n^k qui vont apparaître.

Et avec ça, vous allez pouvoir calculer. Donc je vous laisse réfléchir à ça. Et c'est autour de ces idées-là que Euler avait trouvé cette fonction.

Et Riemann, bien sûr, a été beaucoup plus loin. Et donc, si vous voulez, cette conjecture de Riemann, c'est que les zéros de cette fonction, donc ce sont les zéros qui sont ici, ce sont tous des nombres complexes qui ont ce qu'on appelle leur partie réelle qui est égale à $\frac{1}{2}$. Alors, en fait, si vous voulez, cette conjecture, il y a une forme de cette conjecture beaucoup plus faible qui a été démontrée en fait par Hadamard, et qui consiste à dire que même si on ne sait pas que tous les zéros de la fonction sont sur la droite des nombres complexes partie réelle de s égale à 0.5, d'accord, au moins, on sait exclure le fait qu'il y ait des zéros sur la droite, c'est trivial qu'il n'y ait pas de zéros ici, mais on sait exclure le fait qu'il y ait des zéros sur la droite des nombres complexes de partie réelle de s égale à 1. Alors, ce qui est amusant, si vous regardez bien les dates là, c'est que pendant un certain temps, il y a eu un bruit qui a couru qui disait que du fait que Hadamard et de la Vallée-Poussin avaient démontré le théorème des nombres premiers, ils étaient devenus immortels. Si vous regardez les dates, il y en a un qui a vécu 96 ans et l'autre 98 ans.

Bon, alors, donc c'est un résultat assez extraordinaire et c'est vous dire quand même à quel point on sait peu de choses, puisqu'on ne sait toujours pas, même exclure, même arriver à une bande plus étroite que la bande qui était donnée par le théorème de Hadamard. Alors en fait, les mathématiciens, je vois qu'il me reste très peu de temps, mais c'est pas grave, donc je vais aller un peu à vitesse accélérée là, et une des grandes découvertes de Galois, Galois a publié un seul article dans sa très courte existence, mais, bon, il a fait des choses incroyables, je veux dire, c'est un mystère total, mais l'article qu'il a publié, qui a été publié au bulletin de la société mathématique ou des sciences mathématiques, c'est un article dans lequel il a construit les corps finis, ce qu'on appelle les corps finis. Alors, vous avez tous entendu parler des entiers pairs ou impairs, ça fait un corps, ou des entiers modulo p , ça fait un corps aussi, où p est un nom premier.

7. prononcer dzéta.

Bon, par contre, vous êtes peut-être moins familier avec le fait que ces corps finis, les corps \mathbb{F}_p , ils ont des extensions, et ils ont même une clôture algébrique. C'est-à-dire que, par exemple, si vous prenez le corps \mathbb{F}_2 à deux éléments, 0 et 1, vous pouvez lui rajouter une racine cubique de l'unité, vous obtenez un corps à quatre éléments, \mathbb{F}_4 , et vous pouvez comme ça construire toutes les extensions possibles de \mathbb{F}_2 , et à ce moment-là, vous obtenez ce qu'on appelle un corps algébriquement clos, c'est-à-dire un corps dans lequel toute équation peut être résolue. Mais un des grands mystères, et je ne vous cache pas que c'est un mystère qui pose problème, vraiment, c'est qu'on ne sait pas construire de manière canonique une clôture algébrique des corps finis.

On sait qu'on peut en construire, mais il n'y a absolument pas d'unicité, et on ne sait pas en construire une étant donné un corps, sauf pour \mathbb{F}_2 , on ne sait pas construire de clôture algébrique de manière canonique pour les corps finis. Et c'est en fait un problème extrêmement important, ce problème-là. Alors, donc, qu'est-ce qui se passe par rapport à cette conjecture? Ce qui se passe, c'est que quand les mathématiciens ne savent pas résoudre un problème, il y a une très bonne méthode qui consiste à le généraliser.

C'est une méthode qui peut être drôlement utile, même quand vous avez un problème réel pour vous, vous voyez. Par exemple, supposez que je vous pose ce problème suivant. Je prends une tablette de chocolat qui a un côté qui contient 5 carreaux et l'autre côté qui en contient 8.

D'accord? Qu'est-ce qui va pouvoir me donner la meilleure méthode pour la transformer en petit carré en coupant chaque fois, en minimisant le nombre de coupes qu'il faut faire pour la transformer en petit carré? Ça paraît un problème impossible. D'accord? Et alors, quand on a un problème comme ça, il faut le généraliser, c'est-à-dire il faut lui donner une certaine liberté. Au lieu de prendre une tablette qui fait 5 par 8, on va prendre une tablette qui fait 2 par 1. Bon, là tout le monde sait résoudre le problème.

D'accord? Bon. Après on va prendre une tablette qui fait 3 par 1. Pareil. D'accord? Bon, et qu'est-ce que vous voyez? Ah ben, quand même, un truc bizarre, ça a l'air d'être toujours le même résultat. D'accord? Bon, après vous prenez une tablette de 3 par 2, vous faites des essais, etc. Ok? Et puis, vous voyez que, en ayant donné au problème une certaine liberté, et en ayant permis à ce problème de se spécialiser en un problème beaucoup plus simple, en rendant les nombres 5 et 8 beaucoup plus petits, ça vous a permis d'avoir un escalier qui vous permet d'accéder à la solution.

Alors, les mathématiciens font pareil par rapport à ce problème de Riemann. Et qu'est-ce qu'ils ont fait? Eh bien, ils ont compris qu'en fait, alors que le problème de Riemann avait trait à un certain corps, qui est ce qu'on appelle le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} , il y avait un moyen de formuler un problème entièrement analogue par rapport à d'autres corps, qu'on appelle les corps globaux. Et ces corps globaux ont une interprétation géométrique, c'est-à-dire que c'est ce qu'on appelle les corps de fonctions sur les corps finis.

Et à ce moment-là, donc, ils ont défini la même quantité que la quantité définie par Riemann, et c'est André Weil, en 1942, alors qu'il était en prison, qui a réussi à trouver la démonstration de l'analogue, si vous voulez, de la conjecture de Riemann dans le cas des corps de fonctions. Mais ce

que la démonstration d'André Weil indique de manière absolument inéluctable, si vous voulez, c'est qu'il faut avoir un support géométrique pour avoir une chance quelconque de résoudre ce problème. Alors, donc, il y a eu pas mal de progrès récents, très très récents, que je voudrais simplement évoquer en deux minutes, qui ont été faits là-dessus, et l'idée principale a été, au départ, si vous voulez, l'idée que, alors qu'il y a les corps finis \mathbb{F}_q , donc on a les corps finis \mathbb{F}_q lorsque q est une puissance de nombre premier p^k , l'idée, c'est que, lorsqu'on regarde la situation dans laquelle la fonction ζ de Riemann, en fait, il faut faire tendre q vers 1, et qu'il y a un objet mystérieux que personne ne connaît entièrement encore, et qui est ce qu'on appelle le corps \mathbb{F}_1 .

Alors, ce qui est merveilleux, c'est que Soulé avait défini une équation, bon, alors, ensuite, dans des travaux récents avec Consani, on a montré que cette fonction ζ définie par Soulé pouvait se réécrire sous une forme intégrale, et on a cherché, donc : "Est-ce qu'il pouvait y avoir une courbe analogue à ce qui se passe dans le cas des corps finis, sur cet objet mystérieux, et qui redonne, cette fois, exactement la fonction ζ de Riemann. Vous voyez que, quand j'ai écrit cette fonction, ce n'est pas exactement la fonction ζ de Riemann, mais c'est la fonction qui vérifie exactement l'équation fonctionnelle, c'est-à-dire qu'il faut mettre un facteur de π à la puissance $-\frac{s}{2}$ devant, et un facteur Γ , mais ce sont des choses innocentes, c'est-à-dire, ce sont des choses dont on connaît les zéros, etc., sans aucun problème. Et alors, on a fait des calculs, on a fait toutes sortes de calculs en utilisant la théorie des nombres, et on s'est aperçu de la chose suivante, on s'est aperçu qu'en fait, on avait exactement le même résultat que dans le cas de Weil, c'est-à-dire que cette fonction, la distribution $N(U)$, qui compte le nombre de points de cette courbe mythique, existe, lorsque U est plus grand que 1, et qu'elle est donnée exactement par la même formule que la formule de Weil, où, si vous voulez, lorsqu'on se permet de prendre la dérivée, qui est normalement une dérivée au sens des distributions, lorsqu'on se permet de prendre cette dérivée à l'intérieur de la somme, eh bien on obtient exactement la formule de Weil.

Ça, c'est extrêmement encourageant, et c'est d'autant plus encourageant qu'a priori, il y avait une contradiction totale, c'est-à-dire qu'on devait avoir une fonction de comptage, cette fonction $N(U)$, elle devait être positive pour U appartenant à 1 plus l'infini, mais Soulé avait dit que la valeur en 1, et ça on le savait dans le cas des corps de fonctions, elle devait être égale à la caractéristique d'Euler, mais la caractéristique d'Euler, comme il y a une infinité de zéro pour la fonction ζ de Riemann, elle doit être égale à $-\infty$. Donc on devait avoir une fonction positive, qui vaut $-\infty$ en 1, mais qui est positive partout ailleurs. Donc ça, ça paraissait un comportement tout à fait bizarre, et en fait, c'est exactement ce qui se produit, parce que quand on calcule la primitive de cette fonction, et quand on voit vers quoi ça converge en approximant par les premiers zéros de la fonction ζ de Riemann, ce qu'on appelle l'approximation $J(n)$, et bien on s'aperçoit (ça, on ne le voit pas sur l'image ici), mais on s'aperçoit que, vous voyez, c'est le point 1 qui est le point limite, cette fonction va changer de signe au point 1,002, etc., et elle tend vers $-\infty$.

Mais elle reste croissante. Le fait qu'elle soit croissante, ça veut dire que sa dérivée est positive, donc on a bien une distribution positive, mais la valeur de la fonction au point 1, elle est finie. Donc quand je calcule la dérivée au point 1, eh bien je vais obtenir exactement ce qu'on attend, c'est-à-dire $-\infty$, parce qu'on va calculer $\Omega(1+\varepsilon)$ en prenant la primitive $-\Omega(1)$, qui est fini, divisée par ε , et on obtient exactement ce qu'il faut, et en plus on obtient exactement le nombre qu'il faut en utilisant la densité des zéros de ζ . Bon, alors j'aurais bien aimé vous parler de toutes sortes de

choses qu'on a faites en partant de là, mais le temps est compté, donc je vais m'arrêter là.

(Applaudissements)

BERNARD HELLFER : Bien, la vitesse de la lumière a beau être égale à 1, tu nous as fait voyager à la vitesse de la lumière dans plein de sujets. Donc, y a-t-il des questions ? On va peut-être commencer par la partie gauche pour faciliter la transmission du micro. Y a-t-il des questions ?

UNE INTERVENANTE : *Bonjour, excusez-moi, au début vous avez parlé des AB , des $\alpha\gamma$, donc je n'ai rien compris qu'est-ce que ça représente sur le plan physique, et qu'est-ce que ça veut dire sur le plan physique, ça ne commute pas, s'il vous plaît.*

ALAIN CONNES : Excellente question. Bon, alors, d'abord, qu'est-ce que ça veut dire sur le plan physique ? Vous voyez, lorsque les gens ont vu ces spectres, il fallait qu'ils comprennent qu'il y avait une certaine structure dans ces spectres, au niveau des fréquences, pas au niveau des longueurs d'onde. Donc on est au niveau des fréquences, d'accord ? Bon, donc, ils se sont aperçus qu'il y avait certaines fréquences qui, quand on prenait leurs sommes, redonnaient une fréquence, mais que ce n'était pas du tout le cas pour toutes les fréquences, comme on se serait attendu à cela dans le cas classique. Ils se sont aperçus que pour que la somme de deux fréquences donne une autre fréquence, ça n'était possible qu'en pensant à ces fréquences comme à des transitions, c'est-à-dire qu'une transition, c'est le fait de passer d'un état α à un état β . Alors, si j'ai la fréquence qui permet de passer de l'état α à l'état β , et si j'ai la fréquence qui permet de passer de l'état β à l'état γ , c'est normal que la somme des deux fasse passer de l'état α à l'état γ , d'accord ? Par contre, si l'intermédiaire n'est pas le même, il n'y a pas de raison qu'elles s'ajoutent. Il n'y a strictement aucune raison qu'elles s'ajoutent. Donc, ils se sont dit, voilà la règle. Ça, c'est ce qu'on appelle la règle expérimentale de Ritz-Rydberg. C'est une règle expérimentale. En voyant cette règle, et en comparant avec la règle qu'on aurait obtenue si on faisait de la mécanique classique, si on avait fait de la mécanique classique, on aurait obtenu un groupe, d'accord ? On aurait obtenu un groupe de fréquences. Mais là, on n'avait pas un groupe de fréquences, on avait un objet qui était paramétré par des paires (α, β) , d'accord, etc. Et la loi de composition entre ces paires, c'est (α, β) composé avec (β, γ) donne (α, γ) . Alors, quelle est l'idée de Heisenberg ? L'idée de Heisenberg, ça a été de dire, ça veut dire que la mécanique classique ne marche pas. Ça veut dire qu'au lieu de prendre des fonctions qui dépendent d'une fréquence, etc., et au lieu de faire la convolution comme je l'avais écrit pour un groupe, ce qu'il faut faire, c'est faire la convolution comme ça. C'est-à-dire avec cette règle-là. Et alors à ce moment-là, lui, il ne savait pas que ces objets s'appelaient des matrices. Il avait pensé trouver un nouvel objet mathématique. Il y avait Born et Jordan qui connaissaient les matrices et qui lui ont dit : "Mais ce que tu as trouvé, les mathématiciens le connaissent, ça s'appelle les matrices." Alors, quelle est la signification physique du fait que ça ne commute pas ? C'est exactement le principe d'incertitude de Heisenberg. C'est-à-dire que ce qu'on appelle les variables conjuguées, par exemple la position et le moment d'une particule, ne commutent pas. Ces deux attributs vérifient une règle de commutation qui n'est pas la même que celle de Dirac parce que $[P, Q]$ (à lire P commutateur Q) vaut \hbar . D'accord ? Alors, quand on écrit une règle comme ça, il y a \hbar . Donc, quand on écrit une règle comme ça, qu'est-ce que ça signifie ? Ça signifie qu'on ne peut pas mesurer simultanément P et Q parce qu'ils ne commutent pas. On ne peut pas les mesurer simultanément. Et c'est le principe d'incertitude de Heisenberg. Alors, pour vous raconter une histoire sur le principe d'incertitude de

Heisenberg et la gravitation, il y a une histoire absolument merveilleuse qui est qu'Einstein, bien sûr, ne croyait pas au principe d'incertitude de Heisenberg. Donc, il était arrivé à un congrès. À l'époque, ça s'appelait les congrès Solvay. Donc, il était arrivé à un congrès et à ce congrès, il avait eu l'idée qui était la suivante. Il avait dit, moi, je peux démontrer que le principe d'incertitude ne marche pas parce que j'ai inventé un système qui est le suivant. J'ai un système dans lequel il y a un ressort. Voilà, il faisait toujours des trucs comme ça. Et ici, qu'est-ce qu'on a ? Ici, on a une horloge. D'accord ? Donc, on a une horloge. Et puis, cette horloge, elle a un petit coucou, quoi. De temps en temps, il va émettre un photon. D'accord ? Bon. Alors, quel était le raisonnement d'Einstein ? Le principe d'incertitude dit que $\Delta E \Delta T$ est toujours supérieur ou égal à \hbar . C'est ça que dit le principe d'incertitude de Heisenberg parce qu'il dit que, justement, le temps et l'énergie sont des variables conjuguées, qui ne commutent pas. Alors, qu'a dit Einstein ? Einstein a dit : "Moi, je peux faire une expérience dans laquelle \hbar ne peut pas apparaître. Pourquoi ? Parce que je vais mettre la gravitation. Qu'est-ce que je vais faire ? Je vais faire mon truc et à une heure vraiment précise, donc le temps sera connu vraiment précisément, il y a un photon qui va être émis." Bien sûr, on ne connaît pas l'énergie de ce photon. Donc, on peut me dire, ΔE est énorme. Comment je vais mesurer l'énergie de ce photon ? Je vais peser la balance. Je vais peser ce truc-là avant, c'est-à-dire je mets un pointeur ici qui va me dire le poids exact du truc puisqu'il y a le ressort et puis je vais la peser après. Je vais faire la différence entre les deux poids et ça va me donner l'énergie du photon puisque $E = mc^2$. Alors, il a parlé avec Bohr et il y a une photo merveilleuse dans laquelle on voit Einstein qui sort comme ça, d'accord, et on voit Bohr... Mais Bohr n'a pas abandonné. Il n'a pas dormi de la nuit. Il n'a pas dormi de la nuit et quand il est revenu le lendemain matin, il a montré qu'Einstein avait tort avec ses propres armes. C'est-à-dire, il a dit à Einstein la chose suivante. Il a dit à Einstein : "Mais c'est vous, monsieur Einstein, qui nous avez dit que la vitesse avec laquelle le temps passe dépend du potentiel newtonien, dépend de là où on est dans l'espace. Et si on fait le calcul, la constante de gravitation apparaissait dans le calcul d'Einstein donc il paraissait impossible que la constante \hbar apparaisse, elle s'élimine parce qu'elle apparaît une fois, elle apparaît deux fois et elle s'élimine et il reste exactement le \hbar de Heisenberg. Et à ce point, je veux dire, ce principe d'incertitude de Heisenberg, c'est quelque chose qui a résisté à une quantité incroyable de réfutations expérimentales, etc. Et c'est quelque chose qui est parfaitement établi. Donc la signification physique, c'est qu'on ne peut pas mesurer simultanément des variables qui ne commutent pas. C'est tout.

UNE INTERVENANTE : *Bonjour. En fait, moi, c'était juste pour revenir sur le Lagrangien de la physique standard.*

ALAIN CONNES : D'accord.

UNE INTERVENANTE : *Ce que je comprends, c'est que vous dites que vous arrivez à travers la géométrie non commutative et une description d'espace sans non commutatif à retrouver ce Lagrangien combiné avec le Lagrangien de la relativité.*

ALAIN CONNES : C'est au niveau classique.

UNE INTERVENANTE : *Oui, mais c'est en quoi... Parce que je sais que vous avez fait beaucoup de travaux avec des théoriciens de gravitation quantique. Mais ça, ce n'est pas quantique, justement.*

Vous n'apportez rien de quantique.

ALAIN CONNES : Non, je vais vous expliquer. On a un Lagrangien comme celui-là au niveau classique. La difficulté, c'est qu'on se dit : "Mais si on ne comprend même pas ce truc-là au niveau classique, on n'a aucune chance de le comprendre au niveau quantique".

UNE INTERVENANTE : *Donc, en gros, vous le définissez juste indépendamment du fond.*

ALAIN CONNES : Non, non, ce n'est pas ça. Ce n'est pas qu'on le définisse indépendamment du fond, non. C'est qu'on obtient cette formule. On ne peut pas dire que cette formule soit simple. D'accord ? Même si je vous écris le Lagrangien d'Einstein qui est pour la gravité seule. Bon, ce n'est pas ça. Le Lagrangien d'Einstein, c'est ce qu'on appelle l'intégrale de la courbure scalaire fois $\sqrt{gd4x}$. C'est ça, le Lagrangien d'Einstein. Dans le Lagrangien d'Einstein, il y a ce qu'on appelle la courbure scalaire. Moi, je prends un critère pour la simplicité. Mon critère pour la simplicité, c'est l'homme de Néandertal. Je sais que je ne pourrais pas expliquer ça à l'homme de Néandertal. Et je ne pourrais même pas lui expliquer ça. D'accord ? Par contre, si je lui dis mon élément de longueur, il a des raies spectrales. Ah, mais je lui montre. Je lui montre, il voit quand même. Je lui montre ça, d'accord ? Et je lui dis, le Lagrangien qui est là, il s'obtient en comptant les raies spectrales... J'ai mes chances. À condition qu'il sache compter, bien sûr. Il faut qu'il sache compter. Et c'est ça qu'on a fait. Ce qu'on a fait, c'est qu'on a démontré que l'élément de longueur qui est la racine carrée du ds^2 prend en compte la petite modification de l'espace-temps qui vient des matrices, etc. Et une fois qu'on fait ça, eh bien, quand on calcule le nombre de valeurs propres, justement, on obtient ce Lagrangien épouvantable. C'est ça qu'on a fait. Je suis d'accord, ce n'est pas quantique. Ce n'est pas classique. Mais ce que ça permet de penser, c'est qu'il faut repenser la géométrie déjà de manière quantique et spectrale. C'est-à-dire, il faut la voir apparaître dans les mêmes eaux que les autres eaux qui sont importantes pour le quantique. D'accord ? Et donc, pas avec les $g_{\mu\nu}$, mais avec des opérateurs, etc. Ça ne veut pas dire que le travail est fait. Ça veut dire qu'on est au point de départ et que le point de départ est quand même très, très rassurant parce que, justement, on a remplacé quelque chose qui était incroyablement compliqué au niveau du Lagrangien. Mais ça ne signifie pas qu'on a quantifié la gravité. Loin de là. D'accord ? Ça signifie qu'on a un bon point de départ. Une autre question ?

UN INTERVENANT : *Bonjour. Vous avez dit que pour résoudre les problèmes pour les nombres premiers, il fallait les transformer en géométrie. Mais elles ressemblent à quoi ?*

ALAIN CONNES : Ah, extrêmement bonne question, parce que malheureusement, je n'ai pas pu en parler parce que c'était la fin du temps imparti à mon exposé. Mais en gros, pour être assez simple, en gros, ce qui se produit, c'est qu'on a trouvé un espace qui vient de la théorie du corps de classes et qui est ce qu'on appelle l'espace... Il faut que j'y arrive. L'espace des classes d'adèles. Où est-ce qu'il est ? Ah, il est là. Voilà. Donc, on a trouvé un espace et cet espace, à condition de transposer au niveau Galois, il a toutes les chances, justement, de jouer le même rôle que joue la courbe dans la démonstration de Weil. Par contre, ce qu'il y a, c'est que cet espace, il a une subtilité nettement plus grande que dans le cas de Weil. C'est que dans le cas de Weil, quand on regarde la formule qui donnait le nombre de points de la courbe, c'était une formule, je veux dire, dans laquelle il suffisait de compter le nombre de points dans ce qu'on appelle les orbites de Frobenius. Mais dans

le cas de la fonction ζ de Reimann, ce n'est pas le cas et il y a ce qu'on appelle des facteurs de transversalité dans le théorème de Lefschetz. Et qu'est-ce que ça signifie ? Ça signifie que la courbe n'est pas isolée mais qu'elle est immergée dans un espace non commutatif. Et donc, ça, ça rend les choses beaucoup plus difficiles. Mais on s'est aperçu récemment que le système de mécanique statistique quantique, qui joue un rôle essentiel, dans lequel il y a une brisure spontanée de symétrie, en fait, ce système de mécanique statistique quantique est relié à toute la théorie de Witt et donc ça montre qu'il y a un lien incroyablement étroit avec la théorie des nombres. Donc, en fait, on approche d'un support géométrique qui permettrait de penser beaucoup plus géométriquement, comme le faisait Weil. Qu'est-ce que ça veut dire ? En tout cas, en gros, ce qui se produit, c'est que très grossièrement, au-dessus de chaque nombre premier, il y a un cercle de longueur, le log du nombre premier en question, donc ce sont des orbites périodiques, mais ces orbites périodiques ne sont pas du tout isolées, elles sont plongées dans quelque chose qui est beaucoup plus riche et qui les enrobe, qui donne la structure globale. Ce qui se produit dans le cas de Weil, c'est qu'au-dessus de chaque plaque, ce qui remplace les nombres premiers, il y a une orbite du Frobenius qui a un certain nombre de points et ce nombre de points remplace le logarithme du nombre premier dans la formule qui est là. Mais bon, donc on voit qu'il y a une structure... Ce qu'il faut bien comprendre, par exemple pour l'hypothèse de Riemann, pas pour la gravité quantique, mais pour l'hypothèse de Riemann, bien sûr, on aimerait bien résoudre le problème, mais d'un autre côté, c'est un problème qui est un moteur de découverte et un moteur de pénétration de structure qui est absolument incroyable. C'est-à-dire que ce serait terrible si quelqu'un arrivait à résoudre ce problème par une astuce. Ce qu'on espère, justement, c'est même si ce problème était résolu par une astuce, tant qu'on n'aurait pas vraiment compris la structure sous-jacente aux nombres premiers, on n'arrivera pas à maîtriser l'hypothèse de Riemann. Et dans la structure de l'ensemble des nombres premiers, par exemple, la construction de Witt est quelque chose d'incroyablement puissant et qui donne des relations, des interactions entre différents nombres premiers, etc. Mais il y a toutes sortes de choses qui sont reliées à ça. Bon, je veux dire, ça mériterait des heures et des heures d'explications.

UNE INTERVENANTE : *Oui, donc ma question, ça concerne la fonction ζ ... En fait, si j'ai bien compris, en gros, c'est voir les entiers comme une courbe sur \mathbb{F}_1 qui permettrait d'utiliser ça. Et je me demandais si cette approche pouvait servir pour n'importe quelle fonction L de Dirichlet.*

ALAIN CONNES : Tout à fait. Ça marche pour les fonctions L abéliennes. C'est-à-dire que, en fait, lorsqu'on fait la formule... Je vais vous montrer la formule tout de suite. Par exemple, lorsqu'on calcule la trace de l'action, lorsqu'on écrit la formule explicite de Riemann-Weil comme une formule de trace, en fait, ça implique tous les zéros de toutes les fonctions L avec *größencharakter*⁸. Donc, elles sont mises ensemble. C'est extrêmement important, ça, parce que sinon, on sait qu'il y a des contre-exemples. C'est-à-dire, on sait que si on prend des fonctions qui vérifient l'équation fonctionnelle et la produit eulérien, mais qui n'ont pas les twists qui sont encore avec les mêmes propriétés, ça ne marche pas. Donc, c'est extrêmement important, ça, bien sûr.

UNE INTERVENANTE : *Bonsoir. Vous avez parlé tout à l'heure du fait que la variabilité était inhérente à la solution initiale, et qu'on n'a jamais le même résultat. Ça veut dire que c'est impossible qu'on ait le même résultat ou ça veut dire qu'il y a très peu de probabilité qu'on ait le même résultat ?*

8. i.e. à caractère de Hecke.

ALAIN CONNES : Disons que ce qui est reproductible, c'est la courbe de probabilité du résultat. Ça, c'est reproductible. Mais le résultat lui-même n'est pas reproductible. Donc, il y a une espèce de variabilité incroyable, inhérente au quantique, qui est beaucoup plus forte que la variabilité classique. Et ce qui est étonnant, justement, c'est que c'est ça qui sert de racine à la notion de variable.

LA MÊME INTERVENANTE : *Si on fait une infinité d'expériences avec les mêmes connaissances initiales, ça veut dire qu'à un moment, on ne pourra plus faire cette expérience ?*

ALAIN CONNES : Non, on pourra, mais on obtiendra toujours avec une certaine probabilité un résultat. On ne saura jamais prédire le résultat, jamais.

LA MÊME INTERVENANTE : *D'accord ? Merci.*

UN AUTRE INTERVENANT : *Oui, moi, j'aimerais savoir quelle est vraiment votre ambition maintenant ? Vous avez fait tant de choses. Qu'est-ce que vous aimeriez trouver ?*

ALAIN CONNES : Disons que ce qu'on essaye de faire, justement, en collaboration avec Consani, on essaye de déchiffrer cette courbe mystérieuse, extrêmement mystérieuse, et déchiffrer, justement, ce qui joue le rôle de \mathbb{F}_q pour $q = 1$. C'est un objet vraiment incroyablement mystérieux. Et au fur et à mesure qu'on essaye de découvrir des choses, on trouve toutes sortes de choses annexes, mais bien sûr, on aimerait savoir ce que c'est. Pour le moment, c'est ça. Ça change, évidemment. Et puis, il faut aussi savoir une chose, c'est qu'en général, le chercheur ne sait pas ce qu'il va trouver. Et je dois dire que c'est exactement ce qui s'est passé l'an dernier quand j'ai fait mon cours. C'était tout à fait hallucinant. C'est-à-dire que peut-être un mois avant de faire mon cours au Collège de France, je ne savais pas vraiment ce dont j'allais parler. Et les choses se sont accélérées, etc. Et on a trouvé, justement, avec Consani, on a trouvé un lien avec toute une littérature allemande qui avait été complètement oubliée de géomètres allemands après la guerre et qui résolvait exactement les problèmes qu'on avait rencontrés. Et il y a aussi cette chose merveilleuse qui est que de temps en temps, on trouve un filon qui n'a absolument pas... Les gens ont fait le boulot, etc. Mais ce n'était pas la mode. Donc, bon, ça a été perdu comme ça. Donc, pour moi, c'est une des choses qui me fait le plus plaisir, ça. Lorsque j'arrive à faire ressusciter les travaux de gens qui ont été incompris à un moment donné. Un exemple : il s'agit d'un grand mathématicien français qui s'appelle Marc Krasner. Et l'an dernier, justement, dans mon cours, on s'est aperçu que Marc Krasner avait, dans le même volume que le volume où Jacques Tits avait défini \mathbb{F}_1 , il avait donné une définition provocatrice de \mathbb{F}_1 , eh bien, dans le même volume, il y avait un article complètement oublié de Marc Krasner dans lequel, en fait, il donnait les outils pour résoudre le problème posé par Tits. Pour moi, je trouve ça merveilleux. Je trouve ça merveilleux parce que ça veut dire que l'histoire revit et ça fait revivre toutes sortes de choses qui... C'est une des merveilles des mathématiques, ça. C'est que, justement, dans la mathématique, rien n'est jamais fini. Certains domaines puisse se réunifier, certains questionnements peuvent ressurgir.

UNE INTERVENANTE : *Bonsoir. Donc, vous nous avez dit qu'à la fin du XIXe, au début du XXe siècle, on pensait que la physique était terminée. Depuis, on a beaucoup travaillé et aujourd'hui, on essaie de réunifier la physique à tous les niveaux. Est-ce que vous pensez qu'un jour, on arrivera à unifier la physique au point où elle serait finie ?*

ALAIN CONNES : Je vais répondre en disant la chose suivante, vous savez il y a des gens qui posent la question, c'est un peu farfelu, qui posent la question : "Qu'est-ce qu'il y avait avant le Big Bang ?" ou des choses comme ça. Ce qui est très bien c'est qu'on peut répondre n'importe quoi parce que personne n'était là avant. Donc je ne pense pas que le moment où la physique serait finie soit proche du tout. Je veux quand même vous raconter une petite histoire là dessus qui est qu'Einstein a dit "The Lord is subtle but not malicious" et une fois, il y a eu des gens à Harvard, des élèves qui traditionnellement se moquent de leurs profs, et donc ces élèves avaient organisé une petite comédie pour se moquer des gens qui font de la théorie des cordes et donc ils avaient fait une petite pièce de théâtre, quoi, pour se moquer de ça. Et à la sortie de cette pièce de théâtre un physicien bien connu, Sidney Coleman, qui est mort malheureusement avait dit "It was malicious but not subtle". Donc il faut bien comprendre, je pense, si vous voulez, qu'il y a une réserve de subtilité, qui à mon avis n'est pas inépuisable, je n'irai pas jusque là, mais c'est incroyable, quoi, dans la nature et dans la physique.

BERNARD HELLFER Bien, il n'y a plus d'autres questions ou remarques ?

UN INTERVENANT : *En fait, c'est une question commune. On voulait savoir si vous croyez à la quantification de la gravité ou pas et pourquoi ?*

ALAIN CONNES : Eh bien, non, il s'agit pas de croire là...

UN INTERVENANT : *Oui mais pourquoi ? Ma question était surtout pour ça.*

ALAIN CONNES : Non, ce qui est sûr, c'est que la raison pour laquelle on dit qu'il faut quantifier la gravitation, c'est qu'on est certain qu'il y a ce qu'on appelle les gravitons, et ça on le voit à partir de ce qu'on appelle les pulsars binaires ; des calculs ont été faits et qui sont très, très frappants. Par contre, ce qui est vrai aussi, c'est que les régimes dans lesquels ce genre de théorie va s'appliquer, pratiquement, le seul régime véritable, c'est le régime de l'explosion initiale du big-bang, etc., donc je veux dire, on ne peut pas refaire l'expérience, et donc, comment dire, je crois qu'il est beaucoup plus important, à mon avis, de mieux comprendre le modèle standard, même au niveau classique, etc., que d'arriver à une théorie unifiée qu'on ne pourrait pas vérifier ou qui serait tellement compliquée... Si les choses ne sont pas vraiment simples, je ne vois pas l'intérêt que ça aurait ; c'est-à-dire qu'on peut fabriquer des théories, comme les épicycloïdes, etc., puis qui rendent compte de quelques expériences mais à mon avis, justement, la chose vraiment intéressante et la motivation des gens, c'est de voir qu'imaginons l'époque d'Einstein, où Einstein avait la relativité restreinte, et où il n'arrivait pas à rendre compte de la gravitation. S'il n'avait pas eu les outils mathématiques que Grossman lui a expliqués, avec la géométrie Riemannienne, etc., il n'avait aucune chance d'y arriver, mais le pas conceptuel qui a été franchi est phénoménal parce que qu'est ce qu'il a dit ? Il a dit la géométrie, mais également toutes les forces, etc. C'est phénoménal, phénoménal par rapport à l'idée qu'on avait des forces, et tout ce qui s'exerce, c'est quelque chose d'énorme. Donc là, c'est pareil ; le fait que ça ne marche pas, en général, le fait que des choses ne marchent pas, c'est quelque chose d'extrêmement fort quand on fait des maths, puis quand vous arrivez à une réponse qui est contradictoire etc., ça signifie que vous allez apprendre des choses en résolvant cette contradiction. C'est ça que ça signifie. Il ne faut pas en avoir peur, et là, c'est pareil, d'accord, et on s'en sortira

pas en disant “on n’a pas besoin de quantifier la gravitation”. D’accord il y a un vrai problème. L’exemple c’est Bohr. Quand Bohr a résolu le problème qu’Einstein le posait par rapport au principe d’incertitude, il faisait déjà quelque chose qui était un petit peu comme de la gravité avec le quantique, puisqu’il démontrait le principe d’incertitude de Heisenberg qui est quantique, en utilisant la gravitation d’Einstein donc c’est déjà un petit exemple. D’accord donc on voit bien qu’on ne peut pas dire qu’il y a une théorie qui marche dans le classique, et on n’a pas besoin de la quantifier, et puis il y a une autre théorie qui marche dans le quantique. Non, ça, ce n’est pas acceptable.

BERNARD HELLFER : D’accord. Bien, s’il n’y a plus de questions, je remercie encore Alain, et donc rendez-vous au mois de mars pour la deuxième conférence.