L'espace du mathématicien

Alain Connes

Introduction

Comment se représenter l'espace ? Question d'apparence naïve tant le sens de la vue nous en donne une perception immédiate.

L'abstraction mathématique, outil de représentation mentale d'une rigueur et d'un raffinement difficiles à égaler, nous permet en fait d'explorer l'espace bien au-delà de ce stade préliminaire.

Ce court texte se propose de guider le lecteur à travers un bref parcours initiatique, qui n'a bien entendu aucune prétention à l'exhaustivité et est le reflet des préoccupations de son auteur.

Le repère cartésien permet de représenter un point du plan (ou de l'espace) par deux (ou trois) nombres réels $x^\mu \in \mathbb{R}$. Cette irruption du nombre dans la géométrie apparaît d'emblée comme un acte de violence fait à la géométrie pensée comme un édifice synthétique.

Cet acte de violence pose dès le départ le contraste entre l'œil du géomètre et le langage de l'algébriste, lequel s'inscrit dans le temps, dans la durée, par opposition à l'immédiat de l'intuition visuelle.

Nous commencerons par rappeler brièvement deux exemples de cette dualité entre géométrie et algèbre, si féconde quand elle n'est point considérée comme une opposition, mais quand l'œil du géomètre et le langage de l'algébriste s'allient pour mieux comprendre.

Le premier exemple est celui de la géométrie projective, de Desargues et Pascal, en passant par Monge et les points cycliques. Le second est celui du théorème de Morley.

La découverte au début du XIXe siècle de la géométrie non euclidienne libère les concepts de la géométrie dont le cadre s'ouvre dans deux directions distinctes.

La première ouverture est intimement liée à la notion de symétrie et à la théorie des groupes de Lie. La seconde est la géométrie des espaces courbes de Gauss et Riemann et, pour autant que nos idées géométriques restent intimement reliées à notre modèle de l'espace[1], la relativité générale d'Einstein en est une validation éclatante.

L'irruption du quantique par la découverte due à Heisenberg de la non commutativité des coordonnées sur l'espace des phases d'un système microscopique entraîne une évolution radicale des concepts géométriques vers une nouvelle géométrie qui s'appelle la géométrie non commutative.

Extrait du livre d'Alain Berthoz et Roland Recht, *Les espaces de l'Homme*, Odile Jacob, 2005.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, juillet 2025.

[1] ici de l'espace-temps.

Mon but est d'en donner une brève introduction sans entrer dans les détails techniques.

J'expliquerai en particulier comment le passage pour la mesure des distances de la géométrie riemannienne à la géométrie non commutative est l'exact reflet de l'évolution (1960) de la définition du mètre dans le système métrique.

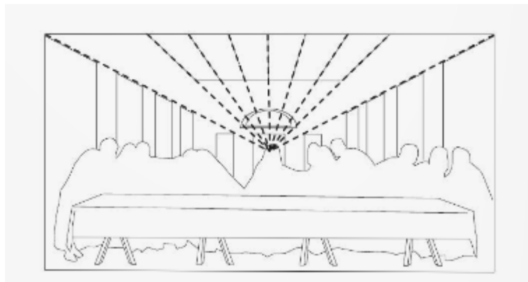

FIGURE 1 : La Cène de Léonard de Vinci

Au milieu du XVIIe siècle, G. Desargues, cherchant à donner un fondement mathématique aux méthodes de la perspective utilisées par les peintres et les architectes élabore la géométrie projective (plane) réelle. Le plan projectif de Desargues est l'espace $P_2(\mathbb{R})$ des droites passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$. Cela rajoute au plan une droite à l'infini.

En fait le résultat suivant de Desargues est à la base de l'axiomatisation de la géométrie projective.

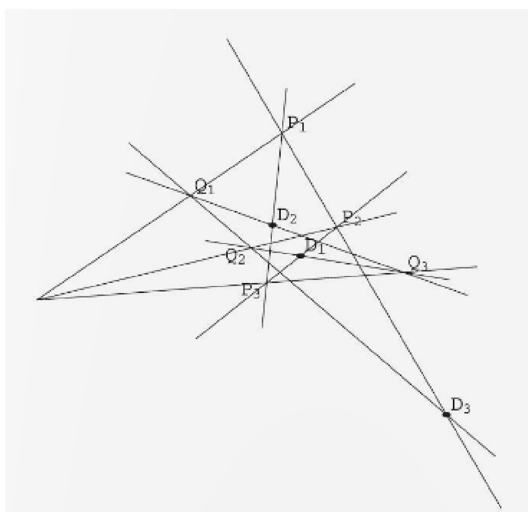

FIGURE 2 : Théorème de Desargues.

Soient P_j et Q_j, $j \in \{1, 2, 3\}$ des points tels que les trois droites (P_j, Q_j) soient concourantes. Alors les trois points $D_j = (P_k, P_l) \cap (Q_k, Q_l)$ sont alignés.

Il résulte en dimension $n > 2$ des quatre axiomes, extrêmement simples, qui définissent la géométrie projective. Ils expriment les propriétés de la relation d'appartenance "$P \in L$" entre points P et droites L. La plus simple est : Il existe une et une seule droite contenant deux points distincts donnés (Axiome I)[2].

[2] L'axiome II dit que deux droites définies par quatre points coplanaires (situés sur deux droites qui se rencontrent)

Pour $n = 2$, le théorème de Desargues n'est pas conséquence des axiomes, et l'on parle de géométrie non desarguienne quand il n'est plus vrai. Les géométries desarguiennes sont exactement les espaces projectifs $P_n(K)$ d'un corps K (non nécessairement commutatif).

Qu'est-ce qu'un corps ? C'est un ensemble de nombres que l'on peut additionner, multiplier et dans lequel tout élément non nul a un inverse de sorte que les règles familières du calcul sont valables. On pense bien sûr aux nombres rationnels, mais il y a bien d'autres exemples de corps comme le corps à deux éléments ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Le corps des quaternions de Hamilton est un bel exemple de corps non commutatif.

La géométrie projective complexe (celle de $P_n(\mathbb{C})$) est apparue sous sa forme définitive dans *La Géométrie* de Monge en 1795.

La présence des points complexes simplifie considérablement la théorie et donne une harmonie rare aux énoncés par leur simplicité et leur généralité.

Par exemple, tous les cercles du plan passent par les deux points cycliques[3], de sorte que, de même que deux coniques arbitraires, deux cercles quelconques ont quatre points communs. La nécessité d'utiliser les nombres complexes même pour résoudre des problèmes dont la formulation est purement réelle était en fait déjà apparue dès le XVIe siècle à propos de la résolution par radicaux de l'équation du troisième degré publiée par Girolamo (Jérôme) Cardano en 1545 dans les chapitres 11 à 23 de son livre *Ars magna sive de regulis algebraicis*[4]. En effet, même dans le cas où les trois racines sont réelles, il faut passer par les nombres complexes pour résoudre l'équation par radicaux.

L'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre

Il n'y a pas un ange de la géométrie en rivalité avec le diable de l'algèbre, mais une connivence fructueuse entre les aires visuelles du cerveau, qui décèlent d'un coup d'œil l'harmonie d'une configuration, et celles du langage qui la distillent en écritures algébriques.

J'en viens à un autre exemple de cette connivence en évoquant le théorème de Morley. Il constitue également un domaine où les symétries, concrètes d'origine géométrique et abstraites et algébriques quand on le regarde sous un nouvel angle se conjuguent de façon forte et laissent une réelle impression de beauté. Le mathématicien britannique Frank Morley fut l'un des premiers enseignants des universités américaines.

C'est au tournant du siècle précédent qu'à l'occasion de recherches sur les familles de cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle donné, il dégagea la propriété suivante: les trois trisectrices intérieures de ses trois angles (c'est-à-dire des droites qui découpent ces angles en trois angles égaux, à la manière des bissectrices bien connues) se coupent en trois points qui forment un triangle équilatéral.

---

se coupent en un point, l'axiome III que toute droite contient au moins trois points et l'axiome IV que la dimension est finie, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de points qui engendrent tout l'espace en itérant l'opération "deux points donnent une droite".

[3]Points complexes situés à l'infini introduits pur Poncelet.

[4]Mais probablement anticipée par Scipione del Ferro et Tartaglia.

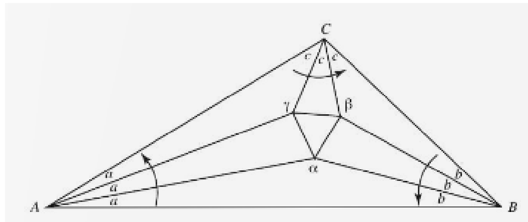

Figure 3 : Le théorème de Morley

La démonstration originale, assez difficile, est basée sur d'ingénieux calculs à base de géométrie analytique superbement maîtrisée. Il existe de nombreuses preuves de ce résultat, ainsi que des généralisations portant jusqu'à dix-huit, voire vingt-sept (et même davantage) triangles équilatéraux que l'on peut dégager à partir des cent huit points d'intersection des dix-huit trisectrices obtenues à partir des trisectrices intérieures par des rotations d'angle $\pi/3$. Parmi ces preuves, il en existe par le calcul trigonométrique, mais aussi par la géométrie pure, comme celle qu'a donnée Raoul Bricard en 1922[5].

Il en existe une de tout autre nature, qui l'éclaire sous un angle intéressant puisqu'elle permet d'étendre ce résultat a priori fortement euclidien à la géométrie de la droite affine sut un corps K arbitraire. Le résultat d'algèbre pure qui contient (et étend) la propriété des trisectrices est d'une telle généralité que sa démonstration devient une simple vérification (un énoncé très général est souvent plus simple à démontrer qu'un cas particulier car le nombre d'hypothèses que l'on doit utiliser est d'autant plus restreint). Il s'énonce ainsi :

Si G est le groupe affine d'un corps commutatif K (c'est-à-dire des applications g de K dans K qui peuvent s'écrire sous la forme $g(x) = ax + b$, où a, note $\delta(g)$, est non nul), alors pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de G tels que $j = \delta(fgh) \neq 1$ et que fg, gh et hf ne soient pas des translations, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- $f^3g^3h^3 = 1$ (transformation identique),
- $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, où α est l'unique point fixe de fg, β celui de gh et γ celui de hf.

Reste à montrer comment cette propriété algébrique très abstraite permet de mieux comprendre (et de prouver par la même occasion) le théorème de Morley. Nous prendrons pour K le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour lequel le groupe affine est celui des similitudes directes, et dont un sous-groupe est celui des rotations (il faut et il suffit que a soit de module 1 pour que g soit une rotation). Nous prendrons pour f, g, h les trois rotations autour des trois sommets du triangle et dont les angles sont les deux tiers des angles au sommet. Ainsi f est la rotation de centre A d'angle $2a/3$, g celle de centre B et d'angle $2b/3$ et h celle de centre C et d'angle $2c/3$. Il est immédiat que le produit des cubes $f^3g^3h^3$ est égal à 1, car f par exemple est le produit de deux symétries par rapport aux côtés de l'angle en A de sorte que ces symétries se simplifient deux à deux dans le produit fgh.

L'équivalence ci-dessus montre donc que l'on a $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, où α, β, γ sont les points fixes de fg, gh et hf et où le nombre $j = \delta(fgh)$ est la première racine cubique de l'unité. La relation $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ est une caractérisation bien connue des triangles équilatéraux. (Elle peut encore

[5] *Référence : https://www.numdam.org/item/NAM_1922_5_1__254_1.pdf.*

s'écrire sous la forme $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = -j^2$ qui montre que l'on passe du vecteur $\overrightarrow{\beta\gamma}$ au vecteur $\overrightarrow{\beta\alpha}$ par une rotation d'angle $\pi/3$.)

Une très vieille recette, bien connue des personnes ayant reçu une forte imprégnation de géométrie classique, montre que le point α défini par $f(g(\alpha)) = \alpha$ n'est autre que l'intersection de la trisectrice issue de A et de la trisectrice issue de B les plus proches du côté AB. Le lecteur pourra s'en persuader en vérifiant que la rotation g de sommet B et d'angle $2b/3$ transforme ce point d'intersection en son symétrique par rapport au côté AB, et que la rotation f de sommet A et d'angle $2a/3$ le remet exactement à sa place. Il en va de même pour β et γ.

Nous avons donc démontré que le triangle dont les sommets sont les intersections des trisectrices est équilatéral. Nous voyons même en prime que, dans cet ordre, il est décrit dans le sens positif (opposé à celui des aiguilles d'une montre). Cette preuve s'applique tout autant aux autres triangles équilatéraux de Morley : les dix-huit trisectrices obtenues à partir des trisectrices intérieures par des rotations d'angle $\pi/3$ permettent de modifier f, g et h sans changer le produit de leurs cubes et donnent de nouvelles solutions de a) et autant de triangles équilatéraux !

Géométrie non euclidienne

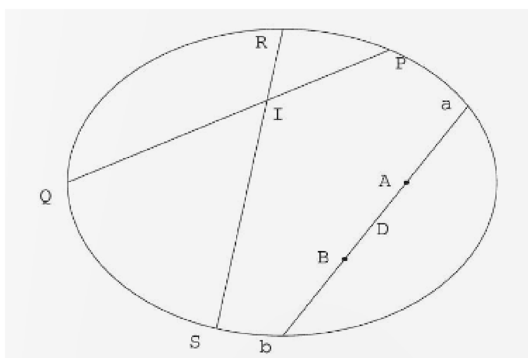

FIGURE 4 : Modèle de Klein.

Passons maintenant à la géométrie non euclidienne. Un modèle particulièrement simple, dû à Klein, de la géométrie non euclidienne est le suivant. Dans ce modèle-là les points de la géométrie sont les points du plan qui sont à l'intérieur d'une ellipse. On exclut tous les points qui sont à l'extérieur de l'ellipse. Les droites sont les intersections des droites ordinaires avec l'intérieur de l'ellipse. Maintenant, il est évident dans ce modèle que le cinquième postulat d'Euclide, que l'on peut reformuler comme l'unicité de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné, n'est pas valable. En effet, par un point (par exemple le point I de la figure) extérieur à une droite (la droite AB de la figure), on peut faire passer plusieurs droites $L = PQ$ et $L' = RS$ qui ne la rencontrent pas. Se donner les points et les droites ne suffit pas pour spécifier la géométrie d'Euclide[6]. Il faut pour cela spécifier la relation de congruence entre deux segments AB et CD, ou plus simplement spécifier la longueur d'un segment AB. En l'occurrence, dans le modèle de Klein, cette longueur est donnée par le logarithme du bi-rapport des quatre points $(A, B\,; b, a)$, où a et b sont les points d'intersection de la droite AB avec l'ellipse, on spécifie de manière analogue les angles entre deux

[6]Les axiomes de la géométrie euclidienne sont sensiblement plus compliqués que ceux de la géométrie projective que nous évoquions plus haut.

droites $L = PQ$ et $L' = RS$.

Tous les axiomes d'Euclide sont vérifiés par cette géométrie sauf le cinquième axiome. Cette géométrie a été découverte[7] au début du XIXe siècle après bien des essais infructueux pour démontrer le cinquième axiome comme conséquence des autres axiomes d'Euclide. Il est frappant de constater l'extraordinaire fécondité de cette question qui aurait pu naïvement apparaître comme un pinaillage de mathématicien.

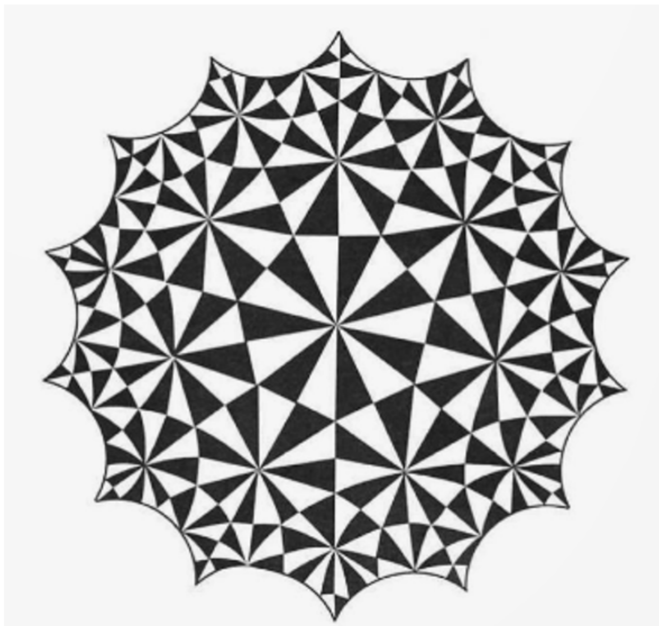

FIGURE 5 : Polygone dans le modèle de Poincaré.

Gauss avait fait cette découverte indépendamment mais ne l'avait pas publiée. Loin d'être un simple contre-exemple ésotérique, il s'agissait en fait d'un objet d'une très grande richesse et fécondité, qui a conduit les mathématiciens à sortir du cadre traditionnel de la géométrie euclidienne. La découverte de cette nouvelle géométrie a engendré deux ouvertures conceptuelles dont nous discuterons brièvement ci-dessous.

Symétries

La première direction est basée sur les symétries et les groupes de Lie, formalisée dans le programme d'Erlangen de Félix Klein. Elle attribue la beauté de la géométrie non euclidienne à l'existence d'un groupe de symétries qui permet de déplacer arbitrairement une figure rigide. En l'occurrence dans le modèle de Klein ce groupe est le groupe des transformations projectives du plan qui préservent l'ellipse.

La théorie des groupes de Lie a connu et connaît encore un succès considérable et constitue l'un des acquis les plus solides des mathématiques du XXe siècle. Il n'est pas question, faute de place, d'en parler ici, mais le lecteur friand de groupes testera ses connaissances en déterminant les groupes (discrets ou continus) impliqués dans chacune des figures 1 à 7.

[7] Par Lobachevski et Bolyai.

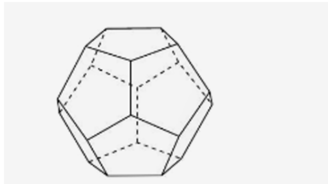

FIGURE 6: Dodécaèdre

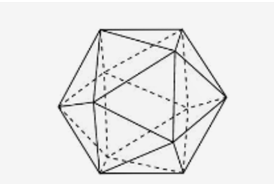

FIGURE 7 : Icosaèdre.

Unité de longueur et géométrie de Riemann

En fait, Riemann a proposé un point de vue totalement différent. II s'est attaché à considérer des espaces plus généraux, dans lesquels les mouvements d'un corps rigide ne sont pas nécessairement possibles. En général, par exemple, dans la géométrie de Riemann on ne peut pas déplacer un triangle sans en déformer les longueurs et les angles. La première idée de Riemann, c'est qu'il fallait comprendre ce qu'était un espace, dans un sens beaucoup plus large que celui qui était utilisé jusqu'alors. C'est ce qui a engendré la notion de variété différentielle qui permet de modéliser la notion de grandeur variable pluridimensionnelle. Les exemples les plus simples sont l'espace des paramètres d'un système mécanique, l'ensemble des couleurs, l'espace des positions d'un corps solide, etc.

La deuxième idée de Riemann, c'est de définir la mesure des longueurs comme intégrale d'un élément de longueur infinitésimal "ds' qui peut être exprimé en coordonnées locales, sous la forme $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Une des grandes victoires du point de vue de Riemann sur celui de Klein, due à la flexibilité considérable dans le choix des $g_{\mu\nu}$, c'est le rôle qu'elle joue dans la relativité générale d'Einstein. On peut facilement comprendre pourquoi la flexibilité introduite grâce à l'arbitraire du choix des $g_{\mu\nu}$ (ce qui en général rend le déplacement d'un corps rigide impossible) permet un contact direct avec les lois de la physique. En effet. parmi les concepts de la géométrie euclidienne qui s'adaptent facilement au cas riemannien, le plus simple est celui de droite. L'analogue d'une droite dans la géométrie de Riemann s'appelle une géodésique et est déterminé par une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}).\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt}$$

où les $g_{\alpha\nu,\rho}$, sont les dérivées partielles des $g_{\alpha\nu}$.

Un des moteurs de la relativité générale, antérieur à la découverte des équations d'Einstein, est l'identité entre l'équation des géodésiques et l'équation de Newton de la chute des corps dans un potentiel V. Ainsi, si dans la métrique de l'espace-temps de Minkowski, qui modélise la relativité restreinte, on remplace le coefficient du temps dt^2 en lui rajoutant le potentiel newtonien, l'équation des géodésiques devient comme par miracle l'équation de Newton. Ainsi, en altérant non la mesure des longueurs mais la manière dont le temps s'écoule, on peut modéliser la chute des corps par des droites de l'espace-temps et exprimer géométriquement le principe d'équivalence grâce à l'incroyable fécondité de la généralisation de la géométrie obtenue par Riemann. Il convient de citer explicitement le texte de Riemann pour bien comprendre à quel point celui-ci était conscient à la fois du lien entre les concepts qu'il développait et la physique, ainsi que des limites naturelles que les connaissances de la physique à son époque impliquaient sur la validité de son point de vue. Voici donc un extrait du texte de Riemann dans *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* :

> La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée avec la question du principe intime des rapports métriques dans l'espace. Dans cette dernière question, que l'on peut bien encore regarder comme appartenant à la doctrine de l'espace, on trouve l'application de la remarque précédente, que, dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que, dans une variété continue, ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui. La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels. Ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la physique, où l'objet auquel est destiné ce travail ne nous permet pas de pénétrer aujourd'hui.

Bien sûr, Riemann ne pouvait, pas plus que Hilbert dans sa fameuse liste de vingt-trois problèmes, anticiper l'autre découverte majeure de la physique du XXe siècle qu'est la mécanique quantique. Comme nous allons le voir, cette découverte montre clairement les limites de la notion de variété proposée par Riemann.

Le microscopique et ses surprises, le quantique

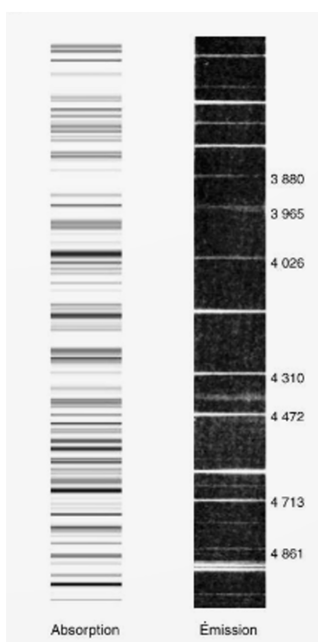

FIGURE 8 : Spectres d'absorption et d'émission.

Considérons la lumière provenant d'une étoile lointaine et faisons-la traverser un prisme. On obtient ainsi un certain nombre de raies qu'on appelle les raies spectrales, qui se distinguent les unes des autres par leurs longueurs d'onde.

Il y a deux types de raies, celles qui sont dues à des phénomènes d'absorption et les autres qui sont des raies d'émission (figure 8). Les spectres d'émission des éléments simples du tableau de Mendeleïev constituent une véritable signature de ces éléments. Ainsi, la signature d'un corps simple est un ensemble de nombres réels, que l'on appelle son spectre de fréquences[8]. Cette signature permet d'identifier sa présence dans n'importe quel composé. Ce spectre S admet une structure remarquable qui a été découverte expérimentalement, c'est en fait un ensemble de différences $\nu_1 - \nu_2$ où ν_1 et ν_2 sont les éléments d'un ensemble plus simple X, formé lui aussi de nombres réels (fréquences). Voilà un principe expérimental appelé principe de composition de Ritz-Rydberg qui ne dépend pas du degré de précision avec lequel les expériences ont été faites : lorsqu'on a refait ces expériences de manière plus précise, ce même principe a continué d'être vérifié. À partir de ce fait expérimental, Heisenberg a découvert la mécanique sous-jacente de la manière suivante. Partons de la mécanique classique comme modèle de la physique microscopique : le système que constitue l'atome lui-même est un système mécanique et, en tant que tel, il obéit aux lois de la mécanique classique. On peut le modéliser par un espace de phases et une fonction sur cet espace, l'hamiltonien. L'espace de phase est un espace symplectique, et l'hamiltonien H mesure l'énergie, et fait tourner les quantités observables avec son crochet de Poisson. Lorsqu'on fait interagir ce système simple avec l'électromagnétisme, on utilise la théorie de Maxwell qui permet de calculer la radiation émise par le système. Cette radiation est obtenue sous forme de superposition d'ondes planes qui correspondent à une certaine observable vectorielle qu'on appelle le moment dipolaire. Ce dernier a trois composantes $X(t), Y(t)$ et $Z(t)$[9] sur les trois axes de coordonnées et, lorsqu'on décompose leur évolution dans le temps en série de Fourier, on obtient les composantes des ondes planes émises par le système. Si l'on fait ces calculs de mécanique classique, on s'aperçoit que les fréquences émises ont une propriété très importante : elles ne sont pas indexées par des couples (i, j) mais par un groupe commutatif qui est exactement le groupe dual du tore dans lequel les variables d'angles tournent en fonction du temps, l'existence de ce tore découlant de l'intégrabilité du système mécanique. Cela implique que, étant donné deux fréquences quelconques observées, leur somme doit encore être une fréquence observée, qu'elle va être indexée par la composition des éléments du groupe, et qu'en fait on va retrouver le système dynamique en question en prenant le dual du groupe des fréquences observées. L'algèbre des quantités observables est l'algèbre de convolution du groupe des fréquences observées. Celui-ci nous permet de retrouver le système dynamique, nous en donne le spectre, mais il nous permet aussi de reconstituer l'évolution dans le temps, puisque la manière dont ce groupe s'inscrit dans la droite réelle nous dit comment le système tourne en fonction du temps. Mais ce résultat du formalisme de la mécanique classique est en contradiction flagrante avec les observations expérimentales !

Expérimentalement, ce que l'on constate, c'est le principe de composition de Ritz-Rydberg qui remplace la loi de composition du groupe prévue par la théorie classique. Ce genre de contradiction entre une théorie (en l'occurrence la mécanique classique couplée à la théorie de Maxwell) et les

[8]La structure du spectre est plus facile à comprendre quand on utilise les fréquences plutôt que les longueurs d'onde.

[9]dépendant du temps t.

résultats expérimentaux (en l'occurrence ceux de la spectroscopie) est ce que l'on peut rêver de mieux pour faire progresser la physique. Qu'a fait Heisenberg ? Il est simplement parti de ce que donnait l'expérience. Dans le cas classique, on peut reconstruire l'algèbre des quantités physiques observables (on dit plus brièvement des observables) du système à partir du groupe des fréquences. Il suffit d'exprimer une observable comme la somme de ses composantes de Fourier. Elle apparaît alors simplement comme une fonction sur le groupe des fréquences et le produit de deux observables est le produit de convolution.

Peu importe la formule exacte de ce produit, tout ce qui compte, c'est qu'elle n'utilise que la structure de groupe de l'ensemble des fréquences. De la même manière, l'évolution dans le temps de ces observables s'écrit simplement à partir de la valeur numérique des fréquences. Dans le cas quantique, les fréquences observées sont indexées non par un groupe, mais par l'ensemble des couples (i, j). Heisenberg pose alors en principe qu'il faut remplacer, partout où il apparaît dans la théorie classique, le groupe des fréquences par son avatar quantique, c'est-à-dire l'ensemble des couples (i, j).

Il en résulte immédiatement que les quantités observables sont simplement des tableaux de nombres A_{ij} indexés par les couples (i, j). De plus, le produit de deux observables est obtenu très simplement en remplaçant dans la règle de convolution pour un groupe, la loi de groupe par la loi de Ritz-Rydberg. Et l'on obtient une algèbre bien connue des mathématiciens : l'algèbre des matrices, dont le produit s'écrit,

$$(AB)_{i,k} = \sum_j A_{i,j} B_{j,k}$$

Heisenberg ne savait pas que cette algèbre était déjà bien connue des mathématiciens. Il s'est dit : "postulons que nous avons affaire à des quantités observables qui se composent de cette manière, qui s'additionnent en ajoutant les composantes du tableau qui ont les mêmes indices, et faisons évoluer en fonction du temps les observables en utilisant les valeurs numériques des fréquences". Il a fait des calculs et s'est aperçu que ces objets ne commutent pas entre eux. Le produit de deux matrices AB n'est pas le même que BA, la règle de composition des matrices n'est pas commutative. Contrairement aux quantités observables auxquelles nous sommes habitués, par exemple la position et la vitesse d'une planète qui sont données par six nombres réels, c'est-à-dire des quantités qui commutent, les quantités observables de la mécanique quantique de Heisenberg ne commutent pas. Ainsi, si l'on considère l'espace des états possibles du système mécanique formé par un atome, on ne peut plus prendre pour modèle de cet espace une variété au sens de Riemann car la non commutativité invalide la procédure donnée par Riemann pour paramétrer les points par un nombre fini de nombres réels.

La procédure imaginée par Riemann consiste à mesurer d'abord une première coordonnée, puis une deuxième et ainsi de suite. Ce que montre la découverte de Heisenberg, c'est que, pour l'espace des états d'un système atomique, dès la première mesure, il devient impossible de mesurer de manière cohérente d'autres coordonnées qui ne commutent pas avec la première. On peut parler bien sûr de principe d'incertitude, mais ceci cache, en gardant un langage classique, la nouveauté fondamentale mise en évidence par Heisenberg et qui a trait à de nouveaux espaces dont les coordonnées forment une algèbre non commutative. Bien entendu, de telles algèbres restent associatives, ce qui correspond à l'écriture du langage où $(AB)C = A(BC)$.

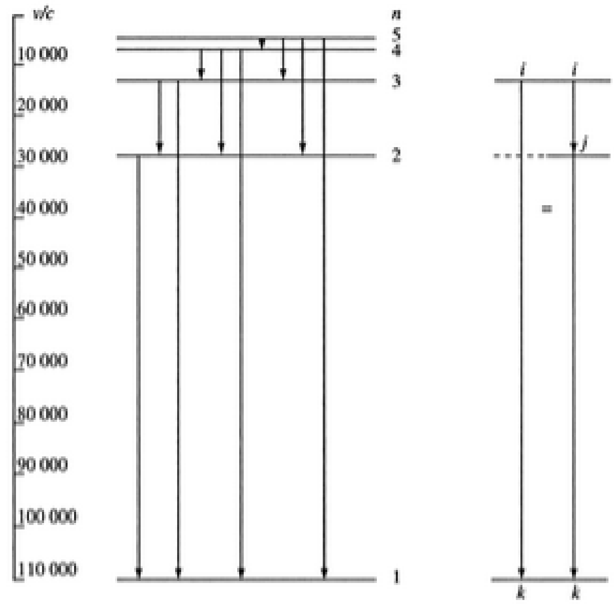

Figure 9 : Loi de Ritz-Rydberg.

Géométrie non commutative

La découverte de la mécanique quantique et de la non commutativité des coordonnées sur l'espace des phases d'un système atomique montre les limites des concepts classiques de la géométrie. Le point de départ de la géométrie algébrique est la dualité entre d'un côté un espace géométrique et de l'autre l'algèbre des coordonnées sur cet espace. Mais les algèbres considérées étaient toujours des algèbres commutatives.

Le point de départ de la géométrie non commutative est l'existence d'espaces naturels jouant un rôle essentiel aussi bien en physique qu'en mathématiques pour lesquels l'algèbre des coordonnées n'obéit plus à la règle de commutativité. L'existence et le bien-fondé de tels espaces remontent sans aucun doute à la découverte de Heisenberg, mais il y a un principe mathématique général qui montre que, même au sein des mathématiques, il est essentiel d'étendre tout l'arsenal géométrique à des espaces non commutatifs, c'est-à-dire à des espaces qui correspondent à une algèbre de coordonnées non commutative. Ce principe de construction est le suivant : si l'on pense à la plupart des espaces qui nous intéressent, il est bien rare qu'on puisse en épeler les éléments un par un. En général, un élément d'un espace est défini comme une classe. En fait, on part d'un espace Y beaucoup plus grand que celui, X, qui nous intéresse et X est obtenu à partir de Y en identifiant entre eux des éléments de Y. On dit que X est un quotient de Y. Soient a et b deux points de Y que l'on veut identifier. La première méthode pour y parvenir en langage algébrique consiste à ne considérer que les fonctions sur Y dont les valeurs en a et b sont les mêmes. Il est clair que l'on obtient ainsi l'algèbre des fonctions sur X comme une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions sur Y et que la commutativité est ainsi héritée par l'algèbre des coordonnées sur X, on ne sort pas du cadre général des algèbres commutatives. Dès que l'on considère des situations un peu délicates, ce procédé ne donne rien, l'algèbre commutative obtenue est souvent triviale et ne décrit pas bien le quotient X. Il y a heureusement une autre façon de procéder qui est beaucoup plus fidèle aux subtilités de l'opération de quotient et qui est calquée sur l'idée d'Heisenberg. Elle consiste à garder toute l'algèbre des fonctions sur Y mais à introduire l'identification des points a et b entre eux simplement en leur donnant la possibilité de communiquer grâce aux éléments hors diagonaux des matrices deux fois deux indexées par a et b. L'on obtient ainsi une algèbre non commutative qui va coder l'opération de quotient de manière beaucoup plus fidèle et souple que l'opération brutale qui conservait la commutativité. La théorie a démarré il y a une vingtaine d'années à partir d'exemples. Une théorie mathématique intéressante n'est pas basée sur des généralisations abstraites, mais se nourrit d'exemples. Dans le cas qui nous intéresse, il y a quantité d'exemples provenant non seulement de la physique mais aussi de la géométrie. L'exemple subtil le plus simple est le suivant. On part de l'équation différentielle de $dx = \theta dy$ sur le tore obtenu en identifiant les bords opposés du carré (figure 10).

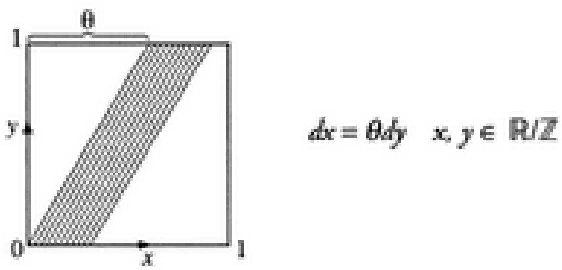

Figure 10 : Tore.

Soit X l'ensemble des solutions de cette équation différentielle. Si l'on essaye de décrire X par les moyens classiques, de le décrire par une algèbre de coordonnées commutative, on trouve un résultat décevant. On trouve (pour θ irrationnel) qu'il n'y a aucune fonction non constante sur X. Ainsi X ne se distingue pas d'un point.

En fait, si l'on utilise l'autre manière de décrire le quotient X grâce au non commutatif, l'on obtient une algébre extrêmement intéressante, l'algèbre des coordonnées sur le tore non commutatif T^2_θ. Cet espace non commutatif a une histoire intéressante. Il est apparu dans deux domaines totalement distincts de la physique. D'une part, dans l'effet Hall quantique grâce aux travaux de Jean Bellissard qui a relié la formule de la conductivité Hall à des invariants topologiques que j'avais introduits en 1980, et dont l'intégralité est reliée à l'intégralité observée expérimentalement sur les plateaux de conductivité.

La seconde apparition du tore non commutatif en physique est beaucoup plus récente et date de 1997. Il apparaît naturellement dans ce qu'on appelle actuellement la théorie des cordes et une théorie un peu plus élaborée, la théorie M. Les physiciens ont trouvé pour des raisons qui ne sont pas du tout évidentes qu'en fait le même objet mathématique, le tore non commutatif, apparaissait dans leur théorie sans qu'on ait besoin de l'introduire de manière artificielle et depuis il y a plus d'un millier d'articles qui sont parus sur ce sujet. Je vais tenter de vous donner une idée intuitive de ce qu'est le tore non commutatif. C'est très bizarre. Si vous essayez de le projeter sur un espace à une dimension vous obtenez un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un ensemble totalement discontinu (quand θ est irrationnel). Au départ, cela apparaît comme un objet totalement ésotérique. Ce qui a vraiment fait démarrer la géométrie non commutative, c'est que le même genre de théorèmes qui sont vrais en géométrie ordinaire comme celui de Gauss-Bonnet, les théorèmes d'intégralité, continuent à être vrais dans cette géométrie. Pour comprendre ces espaces géométriques, il faut plus ou moins réécrire tout ce qu'on connaît en mathématiques. Il faut commencer par la théorie de la mesure. On prend un espace et on ne regarde que la quantité d'éléments qu'il y a dedans. Si vous permutez ces éléments, rien ne changera. Dans le commutatif, la théorie de la mesure, c'est la théorie de Lebesgue, du début du XXe siècle. Ce n'est pas très varié car tous les espaces continus sont les mêmes du point de vue de cette théorie de la mesure. La surprise qui au départ a fait démarrer la géométrie non commutative, c'est un phénomène tout à fait étonnant, c'est que, même du point de vue de la théorie de la mesure, on s'aperçoit qu'un espace non commutatif tourne alors qu'un espace classique ne bouge pas. Un espace non commutatif évolue avec le temps, il tourne avec le temps. Il hérite comme par miracle d'une évolution dans le temps qui est complètement canonique modulo les automorphismes intérieurs. Cette évolution est reliée très profondément à la mécanique quantique. Une fois acquise la théorie de la mesure, on a ensuite développé l'analogue de la topologie différentielle grâce à la cohomologie cyclique (1981) qui a eu de nombreuses applications. Il restait pour atteindre le stade de la géométrie une difficulté essentielle : pour développer la géométrie des espaces courbes, Riemann avait utilisé de manière cruciale le calcul infinitésimal. Je vais essayer de vous expliquer ce qu'est l'analogue du calcul infinitèsimal en géométrie non commutative en vous racontant une histoire. Quand j'étais à l'École normale dans les années 1966-1967, j'avais été fasciné par un livre qui s'intéressait à ce qu'on appelle l'analyse non standard et qui cherchait à donner une version rigoureuse de la notion d'infinitésimal. C'est une notion intuitive et ce livre voulait en donner une formulation rigoureuse. Il partait de la question naïve suivante concernant le jeu de fléchettes. Soit x un point de la cible, la question est : Quelle est la probabilité $dp(x)$ pour que la fléchette arrive exactement au point x ?

Il est facile de diviser la cible en deux parties égales de sorte que, le point x se trouvant dans l'une des deux, l'on en déduise que $dp(x) < 1/2$. En itérant ce procédé on obtient $dp(x) < 1/4$, et en fait $dp(x) < \varepsilon$ pour tout ε strictement positif. Si l'on admet que dp(x) est un nombre positif, on en déduit que $dp(x) = 0$. Ce résultat n'est manifestement pas satisfaisant car chaque fois qu'on la lance sur la cible la fléchette va bien atterrir quelque part. Un mathématicien bien éduqué peut évidemment penser qu'il connaît la bonne réponse, à savoir une 2-forme sur la cible (ou une mesure) mais il sera bien en peine de donner une réponse valable si on lui demande alors de calculer par exemple l'exponentielle de $-1/dp(x)$. Ce livre sur l'analyse non standard proposait comme solution un nombre non standard qui provenait de notions assez compliquées de logique mathématique.

Au bout de six mois d'études sur la logique, je me suis rendu compte que la solution proposée n'était pas satisfaisante, car elle utilisait exactement ce que Lebesgue avait exclu dans sa théorie de l'intégration, à savoir les fonctions non mesurables. On peut déduire des résultats de Lebesgue et de résultats plus récents de logique dus à Paul Cohen et à Solovay qu'en fait jamais personne ne pourra nommer un tel nombre non standard. La théorie proposée est ainsi une théorie complètement virtuelle qui manipule des objets chimériques. Je me suis interrogé pendant plusieurs années pour savoir si l'on pouvait donner une réponse satisfaisante à la question initiale et j'ai finalement compris que la mécanique quantique donnait une réponse simple et très utile qui a permis de développer l'analogue du calcul infinitésimal en géométrie non commutative. Pour la trouver, il suffit de regarder plus en détail le dictionnaire qui met en regard le classique et le quantique. Une quantité observable classique prend des valeurs réelles, c'est une variable réelle. En mécanique quantique, c'est un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert[10]. À ce propos il est d'ailleurs étonnant qu'Hilbert ait défini dès les années 1910 le spectre d'un opérateur bien avant que l'on sache que

[10] espace à la fois complexe et de dimension infinie.

cette notion allait coïncider avec celle de la spectroscopie expérimentale. Mais la terminologie était la même ! Le spectre de l'opérateur est l'ensemble des valeurs possibles de la variable. Lorsque l'opérateur est auto-adjoint, la variable est réelle. Une variable peut prendre plusieurs fois la même valeur, ce qui correspond à la multiplicité spectrale, etc. Ce qui est remarquable, c'est qu'il y avait dans le dictionnaire de la mécanique quantique exactement la place qu'il fallait pour les infinitésimaux. En mécanique quantique il existe des opérateurs T, non nuls, mais dont la taille est inférieure à ε pour tout ε strictement positif ! En fait, la condition correcte est quel que soit strictement positif, on peut conditionner l'opérateur, c'est-à-dire trouver un nombre fini de conditions linéaires, de manière à rendre sa taille plus petite que ε. Dans le quantique il y a exactement les objets qu'il faut pour formaliser et comprendre la notion intuitive d'infinitésimal. Dans la théorie classique une telle notion n'existe pas car les variables à spectre continu ne peuvent coexister avec les infinitésimaux que si elles ne commutent pas. On peut alors définir ce qu'est la différentielle d'une variable. Elle est donnée par un commutateur d'opérateurs de la même manière que les crochets de Poisson de la mécanique classique cèdent la place aux commutateurs dans le quantique. L'intégrale est une notion beaucoup plus délicate qui provient de la découverte par J. Dixmier de traces qui sont nulles sur les infinitésimaux d'ordre supérieur à 1. Il est d'ailleurs étonnant que cette découverte ait été au départ motivée par la recherche d'un contre-exemple à l'unicité de la trace usuelle des opérateurs. Dans l'exemple de la cible, la réponse est donnée par l'inverse du laplacien de Dirichlet. Cette réponse dépend de manière subtile de la forme de la cible, le calcul de l'intégrale redonne la probabilité usuelle, mais l'on peut faire des calculs qui étaient impossibles auparavant comme celui de l'exponentielle de $-1/dp(x)$.

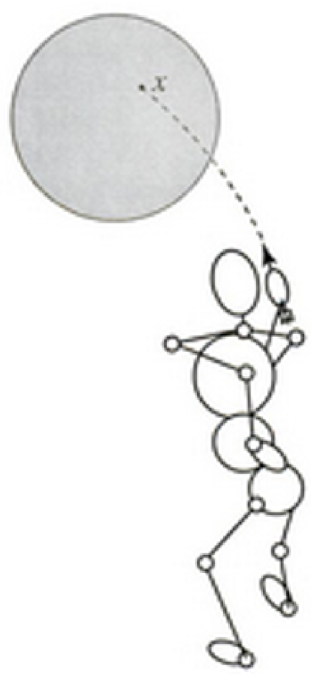

Figure 11 : Jeu de fléchettes

J'en viens pour terminer à l'analogue des deux notions clefs de la géométrie riemannienne, celle de variété différentiable et celle d'unité de longueur infinitésimale "ds". Les variétés ordinaires sont définies en donnant une recette de cuisine qui permet de recoller entre eux des domaines de coordonnées locales, mais les mathématiciens ont réussi à comprendre quelles étaient les propriétés conceptuelles importantes des espaces ainsi obtenus. La dualité de Poincaré est l'une d'entre elles mais il est nécessaire de la renforcer considérablement en remplaçant l'homologie ordinaire par une théorie plus fine appelée K-homologie. Ce n'est qu'à ce prix par exemple que l'on appréhende les classes de Pontrjagin qui sont des invariants fondamentaux des variétés. Ainsi, une des caractéristiques essentielles d'une variété est de posséder un cycle fondamental en K-homologie. L'une des pierres angulaires de la géométrie non commutative est la découverte due à M. F. Atiyah (1968) qui permet d'interpréter les cycles en K-homologie comme des représentations de l'algèbre des coordonnées dans la scène quantique décrite plus haut. En particulier toute trace du commutatif a disparu et de nombreux résultats, notamment en topologie des variétés non simplement connexes, ont amplement montré que le cadre non commutatif était idéal pour traiter de la K-homologie. Il restait à comprendre comment adapter le "ds" de Riemann et c'est ici qu'il suffisait à nouveau de feuilleter des ouvrages de physique contemporaine pour y trouver la réponse.

Le diagramme ci-dessous se rencontre couramment en électrodynamique quantique et décrit l'émission d'un photon par un électron au point x et sa réabsorption au point y. Le pas suivant consiste à interpréter le segment (x, y) décrit par le fermion comme un élément de longueur infinitésimal "ds".

Or la théorie des champs associe à (x, y) un opérateur qui est le propagateur pour les fermions, c'est-à-dire l'inverse de l'opérateur de Dirac D. Nous définirons donc l'élément de longueur infinitésimal "ds" en géométrie non commutative, comme étant l'inverse

$$d = D^{-1}$$

de l'opérateur de Dirac. Ceci permet de s'affranchir du cadre riemannien et de définir plus généralement une géométrie non commutative par une représentation irréductible dans l'espace de Hilbert H, non seulement de l'algèbre A des coordonnées sur l'espace géométrique, mais aussi de l'élément de longueur $ds = D^{-1}$. Elle est entièrement décrite par le triplet spectral (A, H, D).

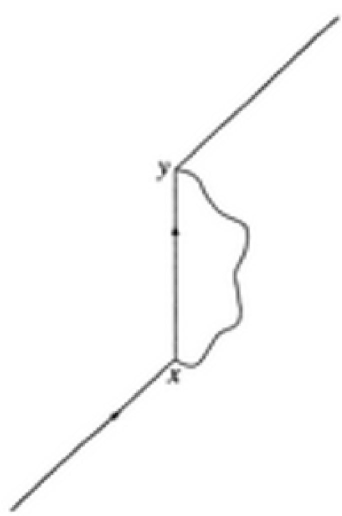

FIGURE 12

On en arrive ainsi à la notion fondamentale de triplet spectral, notion très versatile qui n'est plus restreinte au cas commutatif, s'adapte parfaitement à la dimension infinie, à la géométrie fractale, aux groupes quantiques, et joue un rôle intéressant dans la réalisation spectrale des zéros des fonctions L de la théorie des nombres. De plus ce nouveau paradigme permet de modéliser l'espace-temps[11] de telle sorte que la seule gravité incorpore automatiquement les forces du modèle standard, y compris les bosons de Higgs. Il permet également d'incorporer les corrections quantiques de la géométrie en modifiant l'élément de longueur ds par habillage du propagateur des fermions.

Pour terminer, je voudrais expliquer comment le passage de la mesure des distances en géométrie riemannienne à la mesure des distances en géométrie non commutative est l'exact reflet de l'évolution (1960) de la définition du mètre dans le système métrique.

La définition originale du mètre vers la fin du XVIIe siècle était basée sur une fraction (1/40 000 000) de la plus grande longueur directement mesurable, à savoir la circonférence terrestre. De plus cette unité de longueur a été concrètement réalisée en 1799 comme mètre des archives sous la forme d'une barre de platine déposée au pavillon de Breteuil près de Paris. Le prototype international était une copie plus stable de ce mètre étalon qui servait à définir l'unité de longueur dans le système métrique.

Un changement radical s'est produit en 1960, le mètre a été redéfini comme un certain multiple de la longueur d'onde d'une raie spectrale orange de l'isotope 86 du krypton. Plus récemment, en 1983, la définition actuellement en vigueur a été arrêtée, elle utilise une transition hyperfine dans l'atome de césium[12].

Les avantages du nouveau système d'unités sont évidents, il n'est plus nécessaire de comparer au mètre des archives qui était localisé. La précision est de l'ordre de 10^{-15}. De plus pour les applications un rayon de césium disponible dans le commerce donne une précision largement suffisante. Enfin l'on pourrait, s'il y avait moyen de communiquer, uniformiser le système d'unités dans la galaxie, vu l'universalité du tableau périodique, et ceci sans obliger les extraterrestres à venir sur terre pour faire une mesure de longueur !

Eh bien, la mesure des longueurs en géométrie non commutative est précisément basée sur le spectre de l'élément de longueur "ds", qui n'est autre que le propagateur des fermions ou, en d'autres termes, l'inverse de l'hamiltonien de Dirac.

[11] en temps euclidien.

[12] Et s'exprime en unités de temps en utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion.

Ajoutées par la transcriptrice (DV) : deux illustrations, l'une d'une œuvre d'Escher, l'autre de la première page d'un article de Lemoine au Congrès international des mathématiciens de Chicago en 1893. Effectivement, l'œil saisit immédiatement la figure, tandis que le cerveau analyse plus lentement le texte écrit de la démonstration algébrique (voir le livre Preuves sans mots de Roger B. Nelsen, ou, en version originale, Proofs without words). Mais cette saisie immédiate, par le parcours par l'œil de la figure, n'est effective que si la figure géométrique est simple et si les inférences qui doivent être effectuées, par l'œil via le cerveau, sont simples. Dès que la figure géométrique est complexe, le cerveau doit effectuer, sur la figure, les inférences qui sont le pendant des inférences algébriques, et l'appréhension du résultat est moins immédiate. C'est ce qu'explique l'article de Lemoine au Congrès de Chicago de 1893, et dont on a scanné la première page.

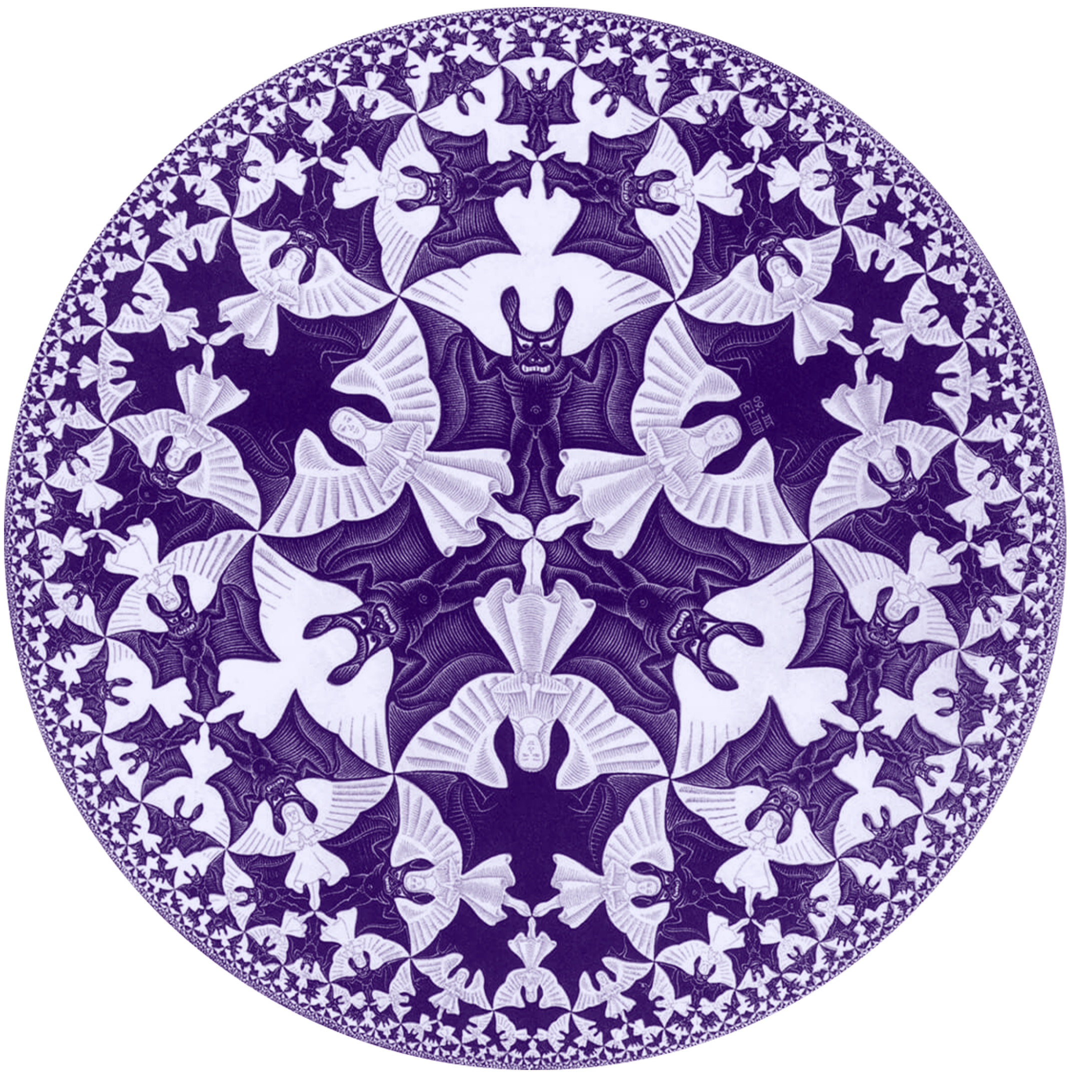

FIGURE 13 : *Anges et démons*
de Maurits Cornelis Escher, un pavage du plan hyperbolique.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA MESURE DE LA SIMPLICITÉ DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET APPLICATION À L'ÉVALUATION THÉORIQUE DE LA SIMPLICITÉ DES TRACÉS GÉOMÉTRIQUES, OU GÉOMÉTROGRAPHIE.

PAR

ÉMILE LEMOINE À PARIS.

I. UNE vérité mathématique n'est ni simple ni compliquée en soi, elle est. Ce qui nous fait la regarder comme simple ou comme compliquée, c'est le chemin court ou long que notre esprit, en partant de vérités expérimentales, de notions élémentaires ou d'axiomes admis—dénominations qui, au fond, à mon avis, représentent exactement la même chose—a dû parcourir pour y arriver. Il me semble qu'il serait fort intéressant d'étudier ces voies et d'évaluer la longueur de celle qui est nécessaire, à un moment du développement scientifique de l'esprit humain, pour arriver à la connaissance d'une vérité mathématique quelconque. Le moyen que nous allons indiquer pour cela, est facile à employer, mais l'œuvre exigerait un travail considérable, si l'on voulait qu'elle soit achevée; nous nous proposons, dans ce travail, d'appliquer l'idée théorique qui nous guide à un petit domaine de la connaissance: *l'étude des tracés géométriques* et de montrer l'importance et *l'inattendu* des résultats *pratiques* qui sortiront d'une étude toute spéculative. Avant d'aborder notre sujet nous voulons cependant exposer brièvement quelques considérations générales.

Soient A, B, C, etc. les *vérités expérimentales* ou *notions élémentaires* admises comme base d'une science mathématique déterminée, laquelle doit s'en déduire ensuite par raisonnements. Tous les théorèmes qui constituent cette science se déduiront de $A, B, C, \ldots$ par voie syllogistique, voie qui, débarrassée de l'appareil de la logique scolastique du moyen âge, est la seule admise dans une science *mathématique*.

FIGURE 14 : première page d'un article de Lemoine au Congrès international des mathématiciens à Chicago en 1893..