La revanche d'un théorème oublié

Philippe Pajot

Entre 1950 et 1955, le mathématicien Alexandre Grothendieck a établi un théorème sur les espaces de fonctions. Sorti de l'oubli, il a des connexions inattendues avec l'informatique théorique.

Alexandre Grothendieck, mort en 2014 à l'âge de 86 ans dans un petit village des Pyrénées, restera dans tous les esprits le refondateur de la géométrie algébrique. Sa vision de la géométrie, inspirée par son obsession de repenser la notion d'espace, a bouleversé la manière de faire des mathématiques. Toujours à la recherche de la généralité maximale, il a introduit des notions qui sont aujourd'hui encore au cœur de la géométrie algébrique [1]. S'il est considéré comme un génie des maths qui a transformé ce domaine, peu de gens connaissent, même au sein de sa communauté, les travaux qu'il a menés avant cet "âge d'or" de la géométrie algébrique.

Dans la première partie de sa période de production mathématique, entre 1950 et 1955, Grothendieck s'est consacré à l'analyse fonctionnelle, le domaine de l'analyse qui étudie les espaces de fonctions. L'un de ses résultats les plus connus est ce qu'on nomme "le théorème de Grothendieck", qui peut s'exprimer sous la forme d'une inégalité entre deux nombres calculés à partir d'une matrice. Longtemps oubliée, on s'aperçoit aujourd'hui que cette inégalité peut se comprendre comme un problème de calculabilité en informatique. Et qu'elle est aussi en lien avec le monde physique à travers les inégalités de Bell de la mécanique quantique. Non seulement ses travaux d'analyse fonctionnelle ont profondément remodelé le domaine, mais ils entrent aujourd'hui en résonance avec les travaux d'informatique théorique les plus récents...

Étude à contre-courant

Avant d'aborder son travail fondateur, il faut nous replonger dans le contexte d'après-guerre. Les mathématiques françaises, passablement réduites par les affres de l'Occupation, redémarrent doucement. Beaucoup de grands noms liés à Bourbaki[1] se sont réfugiés à Nancy. C'est le cas de Jean Dieudonné (1906-1992) et de Laurent Schwartz (1915-2002) qui y enseignent. C'est là qu'en octobre 1949, ils font la connaissance de Grothendieck, jeune diplômé de l'université de Montpellier. Né en 1928 à Berlin d'un père anarchiste russe et d'une mère allemande, il a fui en France, en 1939, avec sa famille avant que son père ne soit déporté à Auschwitz en 1942, dont il n'est pas revenu. Intuition et travail personnel lui ont forgé une personnalité pleine de confiance. Grothendieck a poursuivi des études de mathématiques à Montpellier, puis à Paris.

À l'époque où il arrive à Nancy, l'analyse fonctionnelle à la mode est l'étude des espaces localement convexes. Avant-guerre, une école polonaise, sous la houlette de Stefan Banach (1892-1945), a étudié les espaces dans lesquels on peut définir une norme (une distance), et qui sont devenus les espaces de Banach. Ces derniers généralisent les espaces de Hilbert qui, eux-mêmes, généralisent la notion d'espace euclidien qui nous est familière. Les espaces de Hilbert sont des espaces vectoriels

---

Transcription en LaTeXde l'article du magazine La Recherche de juillet-août 2015, libre de droit ici https://www.larecherche.fr/node/35231

Denise Vella-Chemla, juin 2023

[1] Bourbaki, nom donné à un groupe de mathématiciens français formé en 1935 qui a pour objectif de reconstruire les mathématiques de manière formelle.

normés pour lesquels la norme est issue d'un produit scalaire[2]. Sur les espaces de Banach, la norme est quelconque, de sorte qu'ils sont plus délicats à étudier. Toutefois, à cette époque, les espaces de Banach sont supposés bien compris et ceux qui sont étudiés sont plutôt les espaces localement convexes.

D'où vient cette vogue pour ces espaces ? De Schwartz, qui avait introduit la notion de distribution qui généralise celle de fonction. Or les espaces dans lesquels "vivent" les distributions sont des objets plus compliqués encore que les espaces de Banach : ce sont des espaces dans lesquels il y a une famille de normes, et non plus une seule norme. Autrement dit, l'équipe de Nancy s'efforce de dépasser les espaces de Banach pour en construire des plus généraux. Dieudonné et Schwartz organisent même un séminaire sur les espaces localement convexes.

Arrivant de Paris où il a déjà acquis une réputation de rebelle parmi les enseignants, Grothendieck débarque dans le bureau des deux mathématiciens qui regardent d'un œil goguenard ce jeune homme de 21 ans. La rencontre débute par des remontrances pour ses travaux qui redécouvrent l'intégrale de Lebesgue. Laurent Schwartz raconte ce premier contact dans ses mémoires [2] : "Dieudonné, avec l'agressivité (toujours passagère) dont il était capable, lui passa un savon mémorable, arguant qu'on ne devait pas travailler de cette manière, en généralisant pour le plaisir de généraliser (l'intégrale de Lebesgue)."

Pour le tester, les deux enseignants lui signalent quatorze questions qui figurent à la fin d'un de leurs derniers articles sur les espaces localement convexes et qu'ils ne savent pas résoudre. Dans le style de l'époque, où l'on ne donne pas vraiment de sujet de thèse, ils lui demandent de choisir une question pour se faire les dents... La légende veut que, quelque temps après, Dieudonné ait interpellé Schwartz un matin du haut d'un bâtiment de la fac, agitant à la main les papiers que lui avait confiés Grothendieck, en criant : "Il a tout résolu !" En l'espace de quelques mois, le jeune rebelle rédige l'équivalent de plusieurs thèses de doctorat, ouvrant un domaine de recherche qu'il refermera lui-même assez vite.

Produits tensoriels

Durant ces quelques années à Nancy, Grothendieck poursuit ses travaux en analyse fonctionnelle. En 1953, quand vient le moment de soutenir une thèse, il n'a qu'à puiser dans ses résultats. Des six articles rédigés durant cette période, il en choisit un. "C'est une thèse spectaculaire dans laquelle il a développé les produits tensoriels et a introduit la notion d'espace nucléaire[3]", explique Gilles Pisier, professeur émérite à l'université Pierre-et-Marie-Curie, à Paris, et héritier des travaux de Grothendieck en analyse fonctionnelle. Les produits tensoriels en question sont ici des produits d'espace localement convexes. La thèse, écrite en français, est publiée comme monographie par l'American Mathematical Society (AMS) en 1955. Les couvertures des ouvrages de l'AMS étant alors rouges, la thèse sera connue comme "le petit livre rouge" auprès des spécialistes. "C'est un énorme pavé écrit dans le style de Grothendieck, un style Bourbaki très spécial, dense, avec plein de notes de bas de page et de renvois", poursuit Gilles Pisier (lire "La thèse de Grothendieck", ci

[2]Le *produit scalaire* est une opération qui associe un nombre à deux vecteurs.

[3]Un *espace nucléaire* est un espace vectoriel localement convexe de dimension infinie qui possède des propriétés analogues à celles des espaces de dimension finie.

dessous).

En 1953, le jeune homme a 25 ans. Il a obtenu des résultats spectaculaires, et s'il est reconnu par ses pairs, il peine à trouver un travail en France. Apatride par son père, il est dans l'impossibilité d'obtenir un poste permanent. Et comme il refuse de faire son service militaire qui lui permettrait d'obtenir la nationalité française, il doit partir. Grâce à l'influence de Schwartz, il s'envole pour le Brésil où il devient professeur invité à l'université de São Paulo. Durant les deux années et demie qu'il y passe, il donne un cours d'analyse fonctionnelle qu'il n'a jamais publié. Son cours circule toutefois, échangé entre les étudiants. Et surtout, il écrit un article en français intitulé "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques". Le "métrique" du titre signifie qu'on a affaire à une seule distance, c'est-à-dire à une seule norme. Il revient aux espaces de Banach, complètement à contre-courant des spécialistes qui sont alors plongés dans les espaces de distribution (avec plusieurs normes). En fait de "résumé", c'est un article d'une soixantaine de pages, très dense, rédigé dans le style Bourbaki, sans les détails des démonstrations. "Il écrit cet article dès 1953 et le passe à ses collègues qui ne le publient que trois ans plus tard, dans le bulletin de la société mathématique brésilienne", raconte Gilles Pisier. À une époque dépourvue d'Internet, s'il n'y a pas de publication en anglais dans une grande revue, la diffusion est quasiment nulle. Il donne toutefois une copie de son manuscrit au mathématicien français Pierre Cartier qui décide d'en faire un compte rendu lors d'un séminaire Bourbaki. Le texte est aussi rédigé en français et le compte rendu passe inaperçu.

Il faudra attendre quinze ans pour que ce travail soit redécouvert par l'Israélien Joram Lindenstrauss (1936-2012) et le Polonais Aleksander Pelczynski (1932-2012). Tous deux écrivent un long papier publié dans la revue Studia Mathematica qui reprend les idées de Grothendieck en les explicitant avec les démonstrations. De fait, ils se sont aperçus que le théorème principal de cet article brésilien - que Grothendieck appelait déjà "théorème fondamental" - est un point central pour mieux comprendre la structure géométrique des espaces de Banach. Et que des questions que plusieurs mathématiciens s'étaient posées entre-temps sur les espaces de Banach avaient même été résolues dans cet article ignoré...

Espaces de dimension infinie.

Cette redécouverte permet de créer un nouveau domaine, baptisé géométrie des espaces de Banach. Il se développe d'abord essentiellement en Pologne et en Israël, de manière relativement confidentielle, un peu à contre-courant des mathématiques à la mode. "Lorsque j'ai commencé à travailler dans ce domaine, en 1972, sous la houlette de Laurent Schwartz et de Bernard Maurey, les regards n'étaient pas encourageants, se souvient Gilles Pisier. Les gens ne voyaient pas ce qu'il y avait de nouveau dans cette géométrie des espaces de Banach. Ce qui a troublé sans doute les spectateurs de ces développements, c'est que les espaces de Banach et les espaces localement convexes sont des espaces de dimension infinie. Or tous les résultats importants obtenus l'ont été en travaillant sur des espaces dont la dimension est finie. Autrement dit, les résultats les plus fins et les plus profonds ont été obtenus en attaquant la théorie par des méthodes qui sont finies dimensionnelles, mais arbitrairement grandes." Et Pierre Cartier de renchérir : "Quand vous faites de la géométrie ou des probabilités en dimension infinie, pour avancer, il faut très bien contrôler ce qui se passe en dimension finie, avec des bornes qui ne dépendent pas de la dimension : il faut comprendre la manière dont certaines quantités augmentent avec la dimension." Or, si pour des objets simples, cette augmentation est facile à appréhender - le volume de la sphère en dimension n augmente comme $\pi n/2$ quand n est grand par exemple - c'est plus délicat avec les objets qui "habitent" les espaces de Banach. Dans ces espaces, les sphères euclidiennes sont remplacées par des boules convexes de formes compliquées et dont le volume est difficile à évaluer.

Depuis les années 2000, l'état d'esprit a changé. Ce changement est essentiellement le fruit du travail du mathématicien israélien Assaf Naor, actuellement professeur à l'université de Princeton, aux États-Unis. Sous l'impulsion de Lindenstrauss, dont il a été l'élève, Assaf Naor a poussé la théorie dans un cadre métrique fini, autrement dit avec un nombre fini de points. Cela lui a permis d'appliquer les résultats de Grothendieck en informatique théorique. Et, tout à coup, une communauté de jeunes mathématiciens s'est intéressée aux espaces de Banach en dimension finie. "Ils l'ont fait sans ces préjugés que j'avais connus dans les années 1970, estime Gilles Pisier, préjugés de gens qui pensent qu'en dehors de la théorie des nombres et de la géométrie algébrique, il n'y a rien de profond."

Pour comprendre ce changement d'état d'esprit, il faut revenir au théorème principal de ce "résumé" de Grothendieck. Ce théorème peut être formulé comme une inégalité entre deux quantités, disons A et B, calculées à partir d'une même matrice : A est plus petit qu'une constante que multiplie B ($A \leq \mathrm{C}_G B$). Le nombre $\mathrm{C_G}$ - la constante de Grothendieck - est simplement une constante numérique. La constante de Grothendieck avait déjà intrigué les mathématiciens dans les années 1980, car on ne connaît pas bien sa valeur : on sait seulement qu'elle vaut autour de 1,6, mais sans qu'on puisse la calculer exactement. Il n'existe pas de série qui permette de la calculer. Tout ce que l'on peut en dire, c'est qu'il s'agit d'une constante qui minimise un certain problème variationnel[4], et qu'il y a une unique solution à ce problème, qui est un nombre. En 1979, Jean-Louis Krivine, professeur émérite à l'université Paris-Diderot a montré que ce nombre était compris entre 1,66 et 1,7. Ces limites ont été un peu améliorées depuis, mais elles restent mal connues.

Un des résultats surprenants, mis en évidence par Assaf Naor, est que cette inégalité a une interprétation en informatique théorique. Elle exprime le fait qu'une expression qui n'est pas calculable est équivalente, à la constante de Grothendieck près, à une expression qui, elle, est calculable. Autrement dit, l'inégalité nous dit que quelque chose qui n'est pas calculable équivaut, à cette constante multiplicative près, à quelque chose que l'on peut calculer en temps polynomial. "Cela aboutit à cette situation extraordinaire que la constante de Grothendieck, qui vient de cet article écrit en 1953 et qui n'a rien à voir avec la théorie de la calculabilité, devient une constante critique dans ces questionnements d'informatique théorique sur la complexité algorithmique !", s'extasie Gilles Pisier.

Généralité maximale

Beaucoup de résultats sur la dimension finie ont été adaptés par Assaf Naor et ses collègues à des résultats sur les espaces métriques finis. Et ces derniers ont potentiellement des connexions avec l'informatique. Par exemple, un des modèles de l'Internet est un arbre avec des distances entre un nombre fini de points. Les liens entre les espaces de Banach et d'autres domaines sont également

[4] Un *problème variationnel* est un problème de minimisation dans un espace de fonctions.

multiples.

Les mathématiques de l'acquisition comprimée, une révolution en traitement du signal, qui a pris son essor à partir de 2004 avec les avancées d'Emmanuel Candès et de David Donoho, tous deux de l'université Stanford, et celles de Terence Tao, de l'université de Californie à Los Angeles, sont fondamentalement liées aux probabilités en grande dimension et à des équivalences entre différentes normes qui ressemblent beaucoup à l'inégalité de Grothendieck. Ces mathématiciens ont porté un regard nouveau sur la géométrie des espaces de Banach en découvrant que des résultats réputés "abstraits" (s'inspirant de ce qui se passe en dimension infinie) avaient, une fois reformulés, des applications concrètes à des problèmes de type compression d'images. Yves Meyer, professeur émérite à l'École normale supérieure de Cachan, connu pour avoir développé la théorie des ondelettes (pour lequel il a reçu le prix Gauss 2010), voit dans cette renaissance de la théorie des espaces de Banach un exemple sidérant d'une théorie qu'on n'attendait pas et qui ressort au premier plan dans de multiples domaines des mathématiques.

Et ce n'est pas tout. Cette inégalité de Grothendieck a également une interprétation en mécanique quantique. Elle peut être alors considérée comme la différence entre un état classique et un état quantique de certaines inégalités de Bell. La constante de Grothendieck pourrait donc être mesurée par des expériences subtiles de mécanique quantique qui sont, pour le moment, hors de portée. Autrement dit, la constante de Grothendieck serait une constante fondamentale de la nature, un objet "naturel".

Tous ces résultats et ces applications sont une belle revanche pour un article qui était passé quasi inaperçu dans les années 1950. Après qu'il l'a écrit, Grothendieck lui-même, qui commençait à se tourner vers la géométrie algébrique, ne s'était pas intéressé à sa diffusion. Mais cette histoire montre bien la puissance de cet homme qui avait placé son idéal mathématique dans la généralité maximale comme il le démontrera de manière plus éclatante encore en géométrie algébrique. Elle montre également la puissance de cette généralité qui engendre quantité de rejetons aussi improbables qu'inattendus. À Dieudonné qui avait reproché initialement au jeune étudiant de "généraliser pour le plaisir de généraliser", on pourrait opposer le "simplifier en généralisant", préconisé par Poincaré. Une bonne définition du style de Grothendieck.

L'essentiel

- **Avant de refonder** la géométrie algébrique, le mathématicien Alexandre Grothendieck s'est consacré aux espaces de fonctions.

- **Ses travaux de jeunesse** ont bouleversé ce domaine.

- **L'inégalité de Grothendieck** a une interprétation en mécanique quantique.

Encart **La thèse de Grothendieck**

Dans sa thèse, qu'il soutient en 1953, Grothendieck invente la notion fondamentale d'espace nucléaire[5].

[5]Voir note de bas de page 3.

Une notion qui à la fois est inspirée des travaux de l'école mathématique soviétique autour d'Israel Gelfand (1913-2009, élève de Kolmogorov), mais qui a aussi eu en retour une influence considérable sur cette école. En 1939, Gelfand avait soutenu une thèse qui était une contribution importante à la théorie des distributions et aux mesures dans les espaces de dimension infinie. Durant la guerre, rien ne filtre de la recherche soviétique et ce n'est qu'en 1945 que les mathématiciens hors d'URSS découvrent la thèse de Gelfand. Laurent Schwartz poursuit ce travail en se fondant sur ces résultats. Et c'est l'un de ses résultats (le théorème des noyaux de Schwartz) qui inspirera les travaux de Grothendieck sur le sujet. Lorsqu'en retour, la thèse de Grothendieck parvient à Moscou, Gelfand se l'approprie et développe toutes les applications de ces espaces nucléaires, en particulier pour le calcul des probabilités en physique mathématique, applications qui n'intéressaient nullement Grothendieck (ni Bourbaki en général). Dans la série d'ouvrages écrits par Gelfand sur les distributions, un des volumes est consacré à ces applications, notamment pour la mécanique statistique et la théorie quantique des champs.