Mathématiques du monde quantique

Alain Connes

Le présentateur : Alors je suis particulièrement heureux d'accueillir ce soir pour cette dernière conférence de mathématiques Alain Connes qui est né en 1947 à Draguignan. Il est ancien élève de l'École Normale Supérieure, Docteur es Sciences. Je résume brièvement son parcours : il a été stagiaire puis attaché puis chargé de recherche au CNRS puis il a été Maître de conférence et Professeur à Paris VI, Directeur de recherche au CNRS en 1981. Et il est devenu en 1984 Professeur au Collège de France, titulaire de la Chaire d'Analyse et de Géométrie, ce qu'il est actuellement. Il exerce aussi à l'Intitut des Hautes Études Scientifiques dont nous avons reçu Jean-Pierre Bourguignon, le Directeur, il y a deux jours. Je mentionnerai parmi ses prix une distinction très importante, puisque c'est l'équivalent, dit-on d'habitude, pour donner une idée, du prix Nobel pour les mathématiques : il a reçu en 1982 la médaille Fields. Il a publié *Matière à pensée* chez Odile Jacob en 1980, et il publie *Triangle de pensées* en 2000 chez Odile Jacob toujours. Je lui donne la parole pour 50 minutes et ensuite, il répondra à vos questions.

Alain Connes : Merci bon, je vais prendre la transition directement : je vais commencer par ce qui est la couverture du livre chez Odile Jacob, d'accord, qui s'appelle *Triangle de pensées*. L'idée de l'appeler *Triangle de pensées*, c'était qu'il y a les *Pensées* de Pascal et le triangle de Pascal, et puis l'idée aussi, c'était qu'on était trois auteurs ; donc il y avait trois sommets du triangle, et en fait, donc, l'illustration de couverture de ce livre, c'est un fameux théorème de mathématiques qui est un théorème de géométrie euclidienne et c'est un théorème qui est assez fameux parce que c'est très difficile de trouver en géométrie euclidienne des résultats que les Grecs ne connaissaient pas, et vers 1899, un mathématicien anglais, Frank Morley, a découvert un théorème qu'effectivement les Grecs ne connaissaient pas et qui est le suivant... Donc je vais parler de géométrie euclidienne au début, hein, je veux dire, le but de mon laïus, c'est de vous donner une idée de ce que c'est qu'une nouvelle géométrie, qui provient en particulier de la mécanique quantique, en particulier de la physique, qui s'appelle la géométrie non commutative. Mais comme c'est un sujet très difficile, je vais essayer de vous montrer comment, donc, pénétrer dans ce sujet, évidemment sans les détails techniques puisqu'il faut, si on veut comprendre les maths, il faut vraiment en faire, je veux dire qu'il faut vraiment en faire soi-même. Mais donc, je vais essayer de vous donner un aperçu de cette théorie. Alors donc ce théorème de Morley, c'est un théorème de géométrie euclidienne du plan, d'accord. Et que dit ce théorème ? Donc il dit que si vous prenez un triangle, prenez le triangle qui est sur la couverture du livre chez Odile Jacob. Donc on prend les trois angles du triangle et on trisecte les angles. Alors les Grecs n'aimaient pas faire ça parce qu'ils savaient qu'on ne pouvait pas, enfin, ils doutaient qu'on puisse faire la trisection d'un angle à la règle et au compas. Donc on découpe les angles en trois morceaux égaux par exemple l'angle du sommet A, on le découpe en trois morceaux égaux a, a, a, et on obtient comme ça, en prenant les intersections des trisecteurs consécutifs, on obtient trois points, voyez, le point α qui est ici, le point β qui est ici et le point γ

Référence : cette conférence *Perspectives sur les mathématiques actuelles* est l'une des conférences de l'Université de tous les savoirs qui ont été données en l'an 2000. Elle est visionnable sur la chaîne Canal U.
Adresse (url) de la vidéo : https://www.canal-u.tv/chaines/utls/perspectives-sur-les-mathematiques-actuelles.
doi : https://doi.org/10.60527/qv6f-cf36.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, avril 2025.

qui est ici. Et ceci, quel que soit, bien sûr, le triangle ABC dont on parte. Alors que dit le théorème de Morley, qui date donc de 1899 ? Il dit la chose remarquable suivante qui est que quel que soit le triangle ABC dont on est parti, si vous voulez, ce triangle n'a aucune symétrie, il est complètement arbitraire, eh bien, le petit triangle du milieu $\alpha\beta\gamma$, il est équilatère. C'était une raison de plus pour le mettre dans le livre chez Odile Jacob parce que le symbole des éditions Odile Jacob, c'est un triangle équilatère. Alors il y a, si vous voulez, si vous donnez un tel théorème, ce qu'il faut comprendre, c'est que ce théorème fait appel pour sa perception aux aires du cerveau qui sont les aires visuelles, et ce sont des aires extrêmement riches, et donc, ça veut dire qu'on peut avoir, sans comprendre la démonstration du théorème, on peut avoir une perception directe du résultat. Ce résultat, il signifie qu'à partir de quelque chose qui n'a rien de symétrique, c'est-à-dire un triangle quelconque, on obtient comme par miracle quelque chose qui a une symétrie cubique, euh, alors par contre, si vous me demandez de démontrer ce théorème, eh bien, en fait le mathématicien Paul Erdös avait écrit qu'il n'y a pas de bonne démonstration de ce théorème et une des raisons si vous voulez c'est que... euh... bon, on s'aperçoit si on essaie de le démontrer comme ça en géométrie euclidienne, ça n'a pas l'air de marcher très bien. Alors maintenant, je vais essayer bien sûr. Il est vrai qu'il y a une démonstration, mais elle n'est pas... On ne peut pas dire qu'elle soit conceptuelle ou esthétique. Alors maintenant, je vais écrire un autre théorème. Donc je vais mettre, si vous voulez, un autre résultat et qui est un résultat qui lui est d'une nature complètement différente parce qu'au lieu de faire appel aux aires visuelles du cerveau, il fait appel, si vous voulez, aux aires du langage ; c'est un résultat d'algèbre et que dit ce résultat d'algèbre ? Il dit quà chaque fois qu'on prend un corps, alors qu'est-ce que ça veut dire un corps, eh bien ça veut dire quelque chose dans lequel on peut additionner, multiplier, et dans lequel tout élément qui n'est pas nul a un inverse. D'accord. Et puis on a les règles habituelles comme on fait avec les nombres habituels. Alors ce que dit ce théorème, c'est que quel que soit le corps K (donc ça veut dire qu'en fait, ça va être simple à démontrer quand c'est vrai dans une grande généralité, un résultat mathématique, c'est plus simple à démontrer), on a en fait l'équivalence entre deux équations. Alors la première équation, c'est l'équation $f^3g^3h^3 = 1$ et la deuxième équation, c'est qu'il y a un élément j, ce qui veut dire qu'on a une racine cubique de l'unité et la deuxième condition, c'est que $1 + pj + qj^2 = 0$. Seulement il faut simplement savoir où sont f, g et h. Alors f, g, h, ce ne sont pas des éléments du corps, mais si vous voulez, ce sont des... ce qu'on appelle des matrices, c'est-à-dire que ce que vous prenez, ce sont des matrices qu'on appelle des matrices 2×2.

Mais le calcul pour les matrices est quelque chose de très, très simple. Si vous prenez deux matrices, pour les multiplier, comment faire ça ? Donc qu'est-ce que ça veut dire, ça veut dire que si on contemple ce résultat, le théorème 2 et si on le compare au théorème 1, eh bien, il y a quelque chose de très frappant qui est la chose suivante : c'est que le théorème 2 n'est pas difficile, c'est-à-dire que le théorème 2, vous pouvez le donner à un élève de Terminale et il fera la démonstration. Pourquoi ? Parce qu'en quoi consiste la démonstration ? Elle consiste simplement à vérifier que les deux côtés donnent le même résultat. Et ça, ça ne peut pas être difficile. C'est d'autant plus clair que ça va être facile que l'énoncé est valide pour tout corps, d'accord. Donc c'est ça la différence entre les deux, si vous voulez : c'est que d'un côté, vous avez un résultat qui est simple à appréhender dans son énoncé et de l'autre côté, vous avez un résultat algébrique et ce résultat algébrique, donc, comme je le disais, il fait appel à quelque chose de totalement différent ; c'est-à-dire que quand un algébriste travaille en mathématiques, il ne regarde pas, il ne pense pas avec ses aires visuelles, non, il fait des calculs, et en fait ces calculs, comme Hamilton le disait, ces calculs, ils sont basés vraiment sur le temps ; c'est le déroulement du temps, ce n'est pas du tout l'espace, c'est le déroulement du temps. Alors maintenant, il y a une chose qui est tout à fait étonnante, si vous voulez, c'est que bien que ce théorème 2 soit infiniment simple, parce que c'est un calcul très simple, en fait, ça prend quelques lignes pour vérifier cette propriété. Eh bien maintenant, il y a un miracle qui se produit : c'est qu'on peut, et je vais dire pourquoi, on peut vérifier immédiatement que le théorème 2, en fait, il implique le théorème 1. C'est-à-dire qu'il donne une démonstration du théorème de Morley, d'accord, et je vais vous dire quelle est la démonstration. Eh bien, qu'est-ce qu'on fait ? Alors au début, quand je vous disais, pour tout corps, vous voyez, le corps auquel vous pensez le plus, bien sûr, c'est le corps des nombres rationnels, par exemple, ou bien le corps des nombres réels. Mais il se fait que quand les gens on cherché à résoudre les équations, par exemple, lorsqu'on a voulu résoudre l'équation du 3e degré, on s'est aperçu que même pour écrire des racines réelles d'une équation du 3e degré, il fallait inventer des nombres qu'on appelle les nombres imaginaires, ou les nombres complexes, et que même pour écrire des résultats qui n'impliquaient que les nombres réels, il fallait, en fait, introduire des nombres complexes. Alors ici, il y a une chose remarquable et incroyablement simple qui se produit ; c'est que si vous introduisez des nombres complexes, vous voyez, c'est-à-dire si à ce moment-là, vous pensez au plan, non pas comme à l'espace euclidien à deux dimensions ; mais si vous pensez à la droite complexe, eh bien à ce moment-là, ce qui se produit, c'est qu'à chacun des sommets est associé un élément comme l'élément f par exemple, au sommet A est associée la rotation de centre A et d'angle deux fois petit a. Donc vous prenez la rotation de centre A et d'angle 2 fois petit a. Au sommet B est associée la rotation de centre B et d'angle deux fois petit b et de manière similaire, pour le sommet C, vous prenez la rotation de centre C et d'angle deux fois petit c. Eh bien, qu'est-ce qui se produit, c'est qu'alors, vraiment, là, c'est un enfantillage, ça vient du fait que c'est la définition d'un triangle, qui est que la somme des angles d'un triangle vaut π. Eh bien, vous vérifiez qu'on a l'équation $f^3g^3h^3$ est égal à 1. Si donc on pose $f =$ cette rotation, $g =$ celle-là, et $h =$ cette troisième, alors qu'est-ce qu'on en déduit : à cause du théorème 2, eh bien, on en déduit qu'en fait, on a bien sûr l'autre formulation, la formulation qui est équivalente. Et qu'est-ce qu'elle dit, cette formulation, elle dit que $\alpha + j\beta + j^2\gamma$ est égal à 0. α, c'est le point fixe de fg, β, c'est le point fixe de gh et γ, c'est le point fixe de hf. Si vous revenez au triangle, vous vous apercevez tout de suite que α, c'est exactement le point fixe du produit de ces deux rotations : ça vient du fait que quand vous faites la première rotation, vous allez l'envoyer de l'autre côté de la droite (AB) mais quand vous allez faire la deuxième rotation, il va revenir exactement là où il était. Donc α est le point fixe de fg, β, de la même manière, est le point fixe de gh et γ est le point fixe de hf. Mais maintenant, qu'est-ce qu'on a ? Eh bien, on en déduit quelque chose qui n'était pas du tout donné au départ : on en déduit que $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$. Eh bien, quand on était en classe, je me souviens "de mon temps" comme on dit, hein, quand on était en seconde ou en première, on apprenait cette condition comme une caractérisation d'un triangle équilatère, on apprenait que trois points dans le plan complexe α, β, γ sont les sommets d'un triangle équilatère si et seulement si on a l'équation $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ où j est une racine cubique de l'unité. Alors, vous voyez, ce qui se produit dans ce cas-là, il se produit quelque chose de très étrange : on a au départ un résultat qui est extrêmement simple à comprendre, à appréhender géométriquement, mais pas simple à démontrer. Bon alors, ce qu'on fait, c'est qu'on le traduit algébriquement ; quand il est traduit algébriquement, il devient ce théorème. Mais maintenant, ce théorème, il a une puissance bien plus grande que l'énoncé géométrique de Morley. Pourquoi ? Parce que ce théorème, il a l'avantage maintenant d'être vrai pour n'importe quel corps. Par exemple, vous prenez le corps à quatre éléments, qui est utile quand les gens font de la cryptographie, ou des choses comme ça ; vous prenez le corps à 4 éléments. Eh bien vous allez avoir l'analogue du théorème de Morley, qui est cette égalité, et qui va être valide sur le corps à quatre éléments. Alors que si vous prenez le corps à quatre éléments, il n'y a pas d'angle et il n'y a pas de notion de triangle équilatère qui soit évidente. Alors c'est exactement ce procédé, si vous voulez, de traduction entre d'un côté les aires géométriques, les aires visuelles du cerveau, et de l'autre côté, le langage, c'est-à-dire l'algèbre, qui est à la base de tout ce que je vais expliquer. Et si voulez, c'est une chose ancienne en mathématique, c'est ce qui est à la racine de ce qu'on appelle la géométrie algébrique : c'est le fait que, très souvent, il y a un gain extraordinaire à faire, si vous voulez, une traduction, entre d'un côté, une manière de penser qui est géométrique, et qui en fait, sans doute, implique le cerveau droit, les aires du cerveau droit, si vous voulez, qui sont plus intuitives etc. et d'un autre côté, une manière de penser, une manière d'avancer, qui est algébrique et qui du fait qu'elle est algébrique, implique le langage. Alors, donc, le premier exemple que je vous ai donné, c'est un exemple qui impliquait la géométrie euclidienne.

Passons maintenant à la géométrie non euclidienne. Alors, vous savez, justement, quand on était en classe "dans le temps", la géométrie non euclidienne paraissait très bizarre. Mais en fait, il y a un modèle qui est dû à Klein, de la géométrie non euclidienne, et qui est simplement compréhensible, si vous voulez, et c'est le suivant : dans ce modèle-là, les points de la géométrie sont les points du plan mais qui sont à l'intérieur d'une ellipse, c'est-à-dire que vous excluez tous les points qui sont en dehors, d'accord, alors si vous me posez la question, maintenant, les droites sont les intersections des droites ordinaires avec l'intérieur de l'ellipse ; donc une droite, c'est une droite ordinaire sauf qu'on enlève tous les points qui sont en dehors de l'ellipse, d'accord ; bon, alors maintenant, vous posez la question "est-ce que le 5e postulat d'Euclide est vrai ?" C'est-à-dire est-il vrai que par un point extérieur à une droite, par exemple par ce point-là, on peut faire passer plusieurs parallèles à une droite donnée ? Eh bien, la réponse est oui parce que regardez : si je prends cette droite-là, elle ne va pas rencontrer la droite dont je suis parti ; il n'y a aucun point commun puisqu'on a justement exclu tous les points qui n'étaient pas à l'intérieur de l'ellipse. Et si je prends cette droite-là, elle est également sans point commun avec la droite de départ. Donc vous voyez bien que vous avez plusieurs droites parallèles à une droite donnée passant par un point donné. Alors en fait, on peut aller plus loin : on peut aussi définir la congruence des segments, ce n'est pas très difficile, et la congruence des angles, comme celle des angles qui sont ici. Et la chose extraordinaire que Gauss, Bolyai, et Lobatchevski avaient trouvée, c'est si vous voulez qu'en fait, tous les axiomes d'Euclide sont vérifiés, sauf l'axiome de l'unique parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Et au départ, quand Gauss avait trouvé ça, il n'avait pas publié parce qu'il pensait que c'était quelque chose d'ésotérique, et c'était un exemple qui n'était pas vraiment important, pas vraiment intéressant ; c'était plus un contre-exemple que vraiment un exemple. Alors on s'est aperçu qu'en fait, c'est un objet d'une importance colossale en mathématique et après qu'on ait compris cela, les mathématiciens, si vous voulez, ont essayé justement de comprendre la géométrie non pas d'Euclide, mais en général, de comprendre ce que la géométrie a à dire. Quand on parle de géométrie, c'est un concept beaucoup plus large et il y a eu deux tentatives, il y a eu deux directions, qui ont été la continuation directe de la découverte de la géométrie non euclidienne ; la première direction, c'est celle qui est due à Klein et qui a conduit à ce qu'on appelle le programme d'Erlangen si vous voulez, et à ce qu'on appelle les groupes de Lie. Et cette notion est simple à comprendre en ce sens que l'idée qui est sous-jacente, c'est qu'en fait, ce qui fait de cette géométrie quelque chose de beau, et non pas un contre-exemple, c'est le fait qu'en fait, exactement comme dans le cas de la géométrie euclidienne, vous pouvez transporter n'importe quel point en un autre point par ce qu'on appelle un automorphisme de la géométrie, c'est-à-dire quelque chose qui ne va rien changer à la géométrie. Et ça, ça a donné naissance (ici, ce sont les transformations projectives qui préservent l'ellipse ; elles vont être des automorphismes de la géométrie, elles forment un groupe de Lie, et elles ont la propriété d'agir transitivement, c'est-à-dire que le mouvement d'un corps rigide est possible dans une telle géométrie).

Alors en fait, Riemann a proposé un point de vue totalement différent qui est qu'en fait, un espace géométrique, et c'était dans la leçon inaugurale qu'il a donnée dans la première moitié du 19e siècle ; donc, le point de vue de Riemann est très différent justement. Riemann s'est attaché à considérer des espaces dans lesquels le mouvement d'un corps rigide n'est pas possible, c'est-à-dire que contrairement à la géométrie euclidienne, à l'espace euclidien, dans lequel vous pouvez prendre un triangle qui a des sommets et qui a des distances, des longueurs, des côtés qui sont d'une longueur donnée, des angles d'une valeur donnée, si vous prenez la géométrie de Riemann, en général, vous ne pouvez pas déformer un triangle, vous ne pouvez pas le balader, d'accord, si vous le baladez, il va se déformer. Alors l'idée de Riemann, donc, contenait deux choses essentielles : la première idée de Riemann, c'était qu'il fallait comprendre ce que c'est qu'un espace, vous voyez, quand vous faites de la géométrie, même cette géométrie non euclidienne, vous avez un espace qui est formé de points et il fallait arriver à comprendre ce que c'est qu'un espace mais de manière suffisamment flexible pour que, par exemple, on ne soit pas seulement en train de parler d'un espace des points, mais on soit aussi en train de parler par exemple de l'espace des couleurs ou, vous voyez, donc, on a une notion beaucoup plus flexible de ce que c'est qu'un espace. Donc ça, il a réussi à le définir et ça a donné ce qu'on appelle la notion de variété différentiable. Donc c'est la première grande chose dans son article, et la deuxième chose très importante, c'est que Riemann a donc eu l'idée de ce que c'était qu'une géométrie et du fait qu'elle était donnée par l'élément de longueur. Alors l'élément de longueur pour Riemann, c'est si vous voulez une toute petite règle, une toute petite unité de longueur, ds que vous avez et que vous pouvez transporter d'un point à un autre et ce que Riemann a observé, donc, c'est que si vous exprimez le carré de cette longueur dans ce qu'on appelle des coordonnées locales, si vous exprimez ça dans des coordonnées locales, eh bien, à ce moment-là, on va avoir une formule qui est cette formule $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Laissez-moi vous raconter une histoire sur cette formule, si vous voulez. Une des grandes choses de la théorie de Riemann, une des grandes victoires de la théorie de Riemmann sur la théorie de Klein, c'est qu'en fait, on a découvert, donc avec Einstein, qu'en fait, le vrai modèle, non pas de l'espace, mais de l'espace-temps, c'est un espace de Riemann. Et alors ça, ça a engendré ce qu'on appelle la théorie de la relativité générale. Et une fois, le physicien Feynman avait été invité à une conférence à Chicago mais en arrivant (c'était une conférence sur la relativité générale) mais en arrivant à Chicago, comme beaucoup de gens distraits, il avait oublié les papiers qui disaient dans quelle université, à quel endroit, quelle était l'adresse, et donc, il était à l'aéroport, et bon, il était plutôt embêté, parce qu'il devait donner une conférence, peut-être 2 ou 3 heures après, donc il était assez embêté. Et il ne savait pas, il avait un grand choix possible d'itinéraires, et alors à ce moment-là, il a eu l'idée suivante, il est allé dans la file de taxis et il a demandé à chacun des conducteurs de taxi "Est-ce que vous avez conduit récemment des gens qui n'arrêtaient pas de dire $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ et alors il se fait qu'il est tombé dans le mille, d'accord, il a eu exactement la bonne idée, et il a trouvé un taxi qui avait conduit des gens et il lui a demandé : "conduisez-moi au même endroit".

Alors donc si vous voulez, cette théorie de Riemann est basée sur les $g_{\mu\nu}$ et elle a deux forces très importantes, cette théorie : la première, c'est que l'idée d'une droite continue à avoir un sens et ça, c'est quelque chose de très important ; quand vous généralisez une théorie, il ne suffit pas de dire "j'obtiens une théorie qui est plus générale que l'ancienne théorie" ; il faut que les concepts dominants de l'ancienne théorie continuent à avoir un sens. Alors parmi ces concepts dominants, il y a bien sûr l'idée de droite dont on parlait tout à l'heure, eh bien, Riemann a été capable, donc, de généraliser cette idée de droite, et ça l'a conduit, bien sûr, à la définition de la distance entre deux points qui est écrite là-haut : la distance entre deux points, c'est la plus petite longueur d'une corde que vous pouvez tendre entre les deux points. Mais ça l'a aussi conduit à ce qu'on appelle l'équation des géodésiques, qui est écrite ici ; alors le grand miracle qui fait que cette théorie a un lien avec la physique, vous devez le retenir sous la forme suivante : vous voyez, ce que vous faites, c'est simplement, donc, que vous prenez l'espace, mais pas l'espace seul, vous prenez l'espace-temps, alors on savait depuis la relativité restreinte qu'en fait dans l'espace-temps, si vous voulez, il y a un coefficient c'est-à-dire que les g^μ qui sont ici, ils s'écriront sous la forme moins le temps au carré dans l'espace qu'on appelle espace de Minkowski plus dx^2 plus dy^2 plus dz^2. C'est-à-dire que c'est une métrique qui est un peu étrange, parce que le coefficient du temps c'est -1, bon mais ça, ce n'est pas grave, d'accord, on s'habitue à ça, ce n'est pas grave. Alors par contre, ce qui est tout à fait extraordinaire, c'est que ce qu'Einstein a trouvé avant même d'avoir les équations de la relativité générale, ce qu'il a trouvé, c'est la chose suivante : c'est qu'en fait, il suffit que vous fassiez la chose suivante ; il suffit que vous preniez le potentiel qui est une fonction de x, y, z qui est n'importe quelle fonction, ça peut être quelque chose de très bizarre, comme le crochet de Poisson, mais c'est une fonction arbitraire, par exemple le champ gravitationnel dans cette pièce, alors la grande chose, c'est que si vous changez non pas le coefficient de dx, mais si vous changez la mesure des distances dans l'espace, i.e. si vous changez la manière dont le temps passe, c'est-à-dire si devant dt^2, vous mettez non pas -1, comme on avait avant mais -1 plus 2 fois le potentiel newtonien V de x, y, z, eh bien, l'équation des droites qui est l'équation des géodésiques va vous donner exactement l'équation de Newton pour la chute des corps dans le potentiel newtonien. Et ça, c'est quelque chose de fantastique, parce que ça vous dit que justement, comme le potentiel newtonien, c'est quelque chose qui est très variable, ça justifie entièrement la variabilité des $g_{\mu\nu}$ dans la théorie, si vous voulez. C'est ça qui a été la victoire principale du point de vue de Riemann, par rapport à un point de vue entièrement homogène, selon lequel vous diriez "mais je ne m'intéresse qu'aux géométries qui sont vraiment belles, c'est-à-dire qui sont parfaitement homogènes". Si vous faisiez ça, vous excluriez toutes les applications à la relativité générale, dont Thibault Damour parlera, je pense, dimanche, et qui sont basées entièrement sur ce point. D'accord, c'était un des grands miracles qui s'est produit, si vous voulez, au début du 20e siècle, pas du 21e. C'est que, justement, on a les physiciens et les mathématiciens Poincaré, Hilbert, Einstein, Minkowski etc. qui ont compris qu'en fait la géométrie de Riemann était exactement ce qu'il fallait pour faire de la physique. Mais alors, à ce moment-là, il y a eu autre chose et si vous voulez, il y a une autre grande découverte absolument majeure dans le siècle. Et cette découverte, c'est la découverte de la mécanique quantique. Et d'ailleurs, il y a un épisode très amusant que je raconte dans le dernier livre que nous avons fait publier par Odile Jacob, qui est *Triangle de pensées*, qui est qu'Einstein essayait toujours d'invalider la mécanique quantique. Et une fois, il avait essayé d'invalider la mécanique quantique en utilisant, je ne vais pas montrer de transparent, je vais simplement raconter (c'est bien expliqué dans le livre) ; il voulait utiliser ce qu'on appelle une expérience de pensée dans laquelle il voulait contredire le principe d'incertitude, qui dit que l'incertitude sur le temps fois l'incertitude sur l'énergie est bornée inférieurement par ce qu'on appelle la constante de Planck. Alors il avait imaginé tout un système, et c'était au Congrès Solvay en 1930 et bon, ils étaient là et l'argument d'Einstein était que comme son système pour contredire le principe d'incertitude utilisait la constante de gravitation, il était impossible de retrouver la constante de Planck à partir de la constante de gravitation. Et Bohr avait été médusé, et il y a une photo très parlante dans laquelle on voit Bohr qui suit Einstein exactement comme... vous voyez... il le suit, derrière... Bon donc on voit bien que là, Einstein avait gagné, et alors pendant toute la nuit, Bohr n'a pas dormi. Il a essayé de comprendre pourquoi le principe d'incertitude est valide et en fait, sa démonstration, c'est pour ça que je veux le mentionner, elle utilise exactement cette formule. C'est-à-dire qu'il a utilisé, pour démontrer qu'Einstein avait tort, la formule fondamentale d'Einstein, c'est-à-dire que ce qu'il a démontré, c'est qu'en fait, le système d'Einstein, c'était un système de pesée mais quand la chose se promenait dans le champ de gravitation, à cause de cette formule, il y avait une incertitude sur le temps qui en découle automatiquement.

Alors donc, je viens à la mécanique quantique. Alors la mécanique quantique, si vous voulez, c'est aussi un point de coïncidence, même au départ, absolument incroyable entre les mathématiques et la physique. Et donc, pour comprendre la mécanique quantique, c'est essentiellement une théorie qui au départ est venue des observations de spectres, de choses spectrales. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que par exemple, vous prenez la lumière qui nous vient d'une étoile très lointaine, vous la faites passer à travers un prisme, et à ce moment-là, il va y avoir un certain nombre de lignes caractéristiques, de raies spectrales caractéristiques, qui vont être présentes sur le spectre projeté. Alors il y a deux types de raies spectrales : il y a ce qu'on appelle les raies d'absorption, qui viennent du fait qu'il y a des éléments chimiques dans l'atmosphère de l'étoile qui vont absorber certaines fréquences, et il y a aussi ce qu'on appelle des raies d'émission ; ces raies d'émission, ça veut dire que vraiment, c'est un élément chimique qui va émettre une raie spectrale d'accord. Alors il y a une chose qui est fabuleuse, là, c'est que les éléments chimiques, une fois qu'on a atteint le tableau de Mendeleiev, c'est-à-dire une fois qu'on a formé les éléments simples, eh bien, leur spectre, lorsqu'on les chauffe, lorsqu'on les rend à incandescence, et qui donne par exemple un spectre d'émission comme celui qui est ici, eh bien leur spectre est leur signature : c'est-à-dire que vous avez le spectre de l'hydrogène, vous reconnaissez que c'est de l'hydrogène, vous avez le spectre de l'hélium, vous avez le spectre de l'oxygène, etc. et ça veut dire, c'est formidable bien sûr, ça veut dire qu'on arrive à savoir la composition chimique de ces objets très lointains simplement en regardant leur spectre. Bon, alors bien sûr, les physiciens, au début du 20e siècle, ont essayé de comprendre ces spectres et ils ont essayé de les comprendre avec les outils qu'ils avaient, c'est-à-dire avec la mécanique classique. Alors qu'est-ce qu'ils faisaient pour comprendre ces spectres ? Eh bien, ils prenaient un modèle, un modèle qui est le modèle de l'atome, si vous voulez, où vous avez au milieu un noyau, et puis, vous avez, par exemple, des électrons qui tournent autour, bon, etc. Et alors, ils avaient un noyau, par exemple, et donc si vous voulez, ils essayaient de faire des calculs de mécanique classique pour arriver à prédire, à partir de ces calculs de mécanique classique, ce que devait être le spectre.

Rien ne marchait. Rien ne marchait, parce que si vous faites des calculs de mécanique classique, vous vous apercevrez que normalement, ce qui devrait se produire et ce qui n'est pas du tout le cas, c'est que si vous regardez les fréquences spectrales, elles devraient se rajouter les unes aux autres ; or ce n'est pas du tout ce que les physiciens expérimentaux dont Ritz, Rydberg, etc. avaient observé ; ils avaient observé une règle très bizarre qui est la suivante : c'est une règle de spectroscopie expérimentale ; ils avaient observé la règle suivante, qui est que si vous regardez donc ce qu'on appelle le spectre, il y a une règle extraordinaire qui est ce qu'on appelle la règle de composition de Ritz-Rydberg, et qui dit la chose suivante : c'est qu'en fait les raies spectrales, donc les raies que l'on voit, elles sont paramétrées par des couples, ce ne sont pas forcément des couples de nombres (i, j) ; ça peut être des couples de ce que vous voulez, des lettres grecques, des couleurs, des joueurs de football, tout ce que vous voulez, d'accord, ce sont simplement des couples. Bon, et alors ce qui est extraordinaire, c'est qu'en général, c'est faux que la somme des raies spectrales est encore une raie spectrale, mais c'est vrai à chaque fois que le j qui est ici coïncide avec le j qui là, la première lettre de l'autre couple. C'est-à-dire que si vous prenez un couple comme celui-là (i, j), qui correspond à une transition qui est observée comme ça, et si vous prenez un couple (j, k), eh bien, il y aura une autre raie spectrale qui aura pour fréquence, c'est cette fréquence-là ; ce ne sont pas les longueurs d'onde qui interviennent. Donc la fréquence sera exactement la somme des fréquences précédentes. Alors qu'a fait Heisenberg : Heisenberg a dit la chose suivante : "faisons table rase de la mécanique classique, sauf de l'unique fait suivant qui était que si la mécanique classique avait été vraie, on aurait pu reconstruire les quantités observables à partir de la règle de composition des raies spectrales, qui aurait été simplement l'addition. Donc ce qu'a dit Heisenberg, mais c'est un pas fabuleux, si vous voulez, mais c'est un pas qui est basé sur le concret, parce qu'il est basé sur l'observation expérimentale. Donc le pas qu'il a fait, c'est la chose suivante : il a dit "Bien, comme la seule règle qui existe entre les raies spectrales observées non pas en théorie, ce n'est pas une fantaisie, c'est quelque chose d'observé, comme la seule règle de composition qui existe, c'est la règle que (i, j) composé avec (j, k) doit être égale à (i, k), eh bien, on va décréter que cette règle va entraîner la règle de composition, la règle de produit pour les quantités observables du système physique.

Et il a décrété la règle suivante qui est que AB, le produit de deux quantités observables, va être donné par la somme des $a_{ij}b_{jk}$, où les deux indices sont comme je l'ai dit tout à l'heure, ça peut être des lettres, ça peut être n'importe quoi, d'accord. Alors ce qui est incroyable, ce sont des choses que les mathématiciens connaissaient depuis le XIXe siècle, ce qu'on appelle des matrices. Heisenberg ne savait pas ce qu'étaient les matrices, il a retrouvé les matrices parce que cette règle de composition, c'est ce qu'on appelle la règle de composition des matrices. Donc il a retrouvé les matrices ; ce n'est pas lui qui a trouvé que ça s'appelle des matrices : ce sont Born et Jordan qui lui ont dit que c'étaient des matrices. Mais il y a une transition extraordinaire qui se produit à ce moment-là, c'est que contrairement aux quantités observables auxquelles vous êtes habitué, par exemple, si je vous dis la position et la vitesse d'une planète, bon, eh bien, ce sont des nombres réels, ce sont deux quantités et ce sont deux quantités qui commutent ; ça veut dire que si je vous donne la position avant de vous donner la vitesse, ou si je vous donne la vitesse avant de vous donner la position, rien ne va changer, d'accord. Par contre pour les quantités observables de Heisenberg, c'est-à-dire les quantités de la mécanique quantique, ça fait une différence : c'est-à-dire que le produit de deux matrices, si vous le faites dans l'ordre AB, ça ne va pas être la même chose que dans l'ordre BA.

Alors, j'ai l'habitude d'essayer d'illustrer ça de manière assez concrète, si vous voulez, et d'écrire (donc j'espère que le micro ne va pas tomber) mais d'écrire, donc, cette équation $AB \neq BA$. Alors c'est important, bien sûr, d'écrire cette équation, d'accord, mais c'est aussi important de la comprendre concrètement. Et pour la comprendre concrètement ; on va prendre un exemple, on va prendre donc l'opération A qui consiste à prendre la bouteille d'eau et à verser l'eau dans le verre, d'accord, et l'opération B qui consiste à porter le verre à ma bouche. Bon alors maintenant, je vais le faire dans l'autre sens, d'accord, donc je vais d'abord faire l'opération B et maintenant je vais faire l'opération A, d'accord, bon, il est clair qu'il y a une différence, d'accord, j'espère que vous avez compris. Alors ce qui est assez incroyable, si vous voulez, c'est qu'en fait, le langage écrit, la manière dont nous écrivons, c'est quelque chose de merveilleux parce que c'est quelque chose qui est exactement adapté à ce qu'on appelle la non commutativité, c'est-à-dire le fait que AB soit différent de BA. Mais par contre, il y a une règle qui reste présente, qui est énormément importante, c'est que vous pouvez très bien faire d'abord AB, et puis multiplier par C, ou faire d'abord BC, et puis multiplier à gauche par A, ça, ça donnera le même résultat. Mais ce qui est extraordinaire, c'est que les mots, la manière dont nous écrivons le langage, c'est exactement ça, donc si vous voulez la manière dont nous écrivons dans le langage écrit, dont nous écrivons, en fait, elle code ça exactement. Donc c'est ce qu'a découvert Heisenberg, il a découvert qu'en fait, si vous voulez, les quantités observables de la physique, dès que l'on va dans le microscopique, dès que l'on va dans le suffisamment petit, eh bien, elles n'obéissent plus à cette commutativité qui rend les choses très simples, d'accord, mais elles ont cette subtilité qui est que AB est différent de BA. Alors ça, ça a eu quantité de conséquences, mais malheureusement, historiquement, il y a eu une espèce de retour en arrière, je dirais, qui est que Schrödinger, très vite, moins d'un an après la découverte de Heisenberg, a réécrit si vous voulez la mécanique de Heisenberg sous forme du langage qui était commun et courant au XIXe siècle, qui était le langage des équations aux dérivées partielles, et à ce moment-là, il y a eu un retour en arrière parce que les physiciens ont oublié le message, qui était un message extrêmement important de Heisenberg, et qui consistait à dire que même les espaces de Riemann les plus simples, même l'espace le plus simple, c'est-à-dire ce qu'on appelle l'espace des phases, qui est l'espace des paramètres, qui paramétrisent un système mécanique, ne seront plus des espaces ordinaires ; ce seront des espaces non commutatifs au sens où l'algèbre des coordonnées sur ces espaces fera qu'elles ne commuteront plus. Alors, c'est ça qui qui est le sujet principal de mon exposé, si vous voulez, ça s'appelle la géométrie non commutative, et donc c'est basé sur l'observation suivante, qui est qu'en fait... Donc je vais expliquer en quelques détails, je vais essayer surtout de vous donner une espèce d'impression un peu surréaliste de ce que c'est, parce qu'il est clair que je ne peux pas expliquer cela dans tous les détails. Je vais essayer de vous donner des principes fondamentaux. Donc le premier principe fondamental, c'est que ça n'est pas une découverte en l'air, ce qu'a fait Heisenberg, c'est quelque chose qui venait du concret, et qui venait de l'expérience. Mais alors, ce qui est extraordinaire, c'est que la géométrie algébrique a été pendant des années, pendant des siècles, développée, mais avec comme thème fondamental que l'algèbre qui était faite du côté droit, c'est-à-dire quand vous traduisez des images géométriques, quand vous passez des aires visuelles du cerveau aux aires du langage, eh bien l'algèbre qui était faite du côté droit, elle était commutative, c'est-à-dire que vous aviez toujours $AB = BA$. Ce qu'a dit Heisenberg, c'est "Non ! Ce n'est pas assez ! Les mathématiciens n'ont pas assez travaillé, il faut qu'ils travaillent plus et il faut qu'ils comprennent les espaces dans lesquels les algèbres de coordonnées ne vont pas être commutatives, c'est-à-dire celles dans lesquelles on ne va pas avoir $AB = BA$". Alors si ça avait été seulement en provenance de la physique, bon, ça n'aurait sans doute pas été suffisamment convainquant pour les mathématiciens, qui en général sont assez conservateurs. Mais ce qui est extraordinaire, si vous voulez, c'est qu'il y a un principe mathématique qui montre que la même chose arrive en mathématique. Et quel est ce principe de construction, qui est un principe complètement peu connu.

Je peux peut-être l'expliquer au tableau. En fait, l'algèbre des espaces qui nous intéressent, il faut que vous puissiez en donner les éléments un par un. Par exemple, en général, un espace, un ensemble qui nous intéresse, il n'est pas donné en épelant un par un ses éléments ; ses éléments sont définis par des classes ; par exemple vous prenez un mot, comme une *chaise*, il est bien clair que cette chaise n'est pas *la* chaise d'accord, on a une classe d'équivalence, une chaise, c'est une classe d'équivalence, alors en fait, donc, ce qui se produit, c'est que vous avez un ensemble qui est beaucoup plus grand que l'ensemble qui vous intéresse, mais dans cet ensemble qui est beaucoup plus grand, vous voulez, et c'est un peu l'idée des concepts etc., vous voulez *identifier* des points. Donc vous voulez pouvoir dire que le point A, c'est la même chose que le point B. Alors ce que les gens faisaient, avant, c'était que lorsqu'ils voulaient identifier le point A au point B, ils prenaient des coordonnées, donc des fonctions si vous voulez, c'est-à-dire l'algèbre, la position algébrique. Ils disaient "ne prenons que les fonctions qui sont telles que $f(a)$ soit égal à $f(b)$", c'était ça leur méthode, et si vous faites ça, vous allez obtenir une algèbre de fonctions qui va être commutative, bon. Mais il se fait qu'il y a une autre manière de faire, et qui est beaucoup plus fidèle à ce qui se produit, et cette autre manière de faire, elle est calquée sur l'idée d'Heisenberg, et elle consiste à dire : si je veux dire que A est équivalent à B, il y a une manière beaucoup plus intéressante de le faire, qui consiste à prendre des matrices, et ces matrices vont avoir la forme suivante : elles vont avoir des éléments diagonaux, qui sont comme les valeurs de la fonction au point A, et les valeurs de la fonction au point B, sauf que maintenant, elles ne sont pas égales ; mais on va permettre à ces deux points de se parler, et ils vont se parler par les éléments en dehors de la diagonale des matrices, qui sont les éléments $f(AB)$ et $f(BA)$. Alors si vous faites ça vous obtenez une algèbre non commutative et ce qui est formidable, si vous voulez, c'est que cette nouvelle algèbre non commutative, elle va coder l'opération de quotient de manière beaucoup plus fidèle et beaucoup plus proche de ce qui se passe que la première manière : la première manière est très brutale, la deuxième ne l'est pas.

Alors maintenant, la théorie a démarré il y a pas mal de temps, bien une vingtaine d'années si vous voulez, à cause d'exemples, parce qu'une théorie mathématique n'est pas une théorie basée sur des généralisations abstraites ; c'est toujours une théorie qui doit être nourrie par des exemples. Alors, il se fait que là, il y avait dans ce cas-là énormément d'exemples qui ne provenaient pas seulement de la physique, donc pas seulement de Heisenberg, mais qui provenaient également de la géométrie et donc, si vous voulez, l'exemple le plus simple, enfin, disons, l'exemple subtil le plus simple, d'accord, c'est le suivant : c'est, vous voyez, vous prenez ce qu'on appelle en mathématiques une équation différentielle, donc vous prenez l'équation la plus simple que vous puissiez imaginer, vous prenez par exemple l'équation $dx = \theta dy$. On va dire que c'est compliqué, d'accord, mais au lieu de regarder cette équation dans le plan, vous la regardez dans le tore. Alors qu'est-ce ça veut dire, que vous la regardez dans le tore, eh bien ça veut dire, si vous voulez, que vous allez identifier ce côté-ci avec ce côté-là, et ça, ça va déjà vous donner comme un ruban, et ensuite, vous allez identifier ce côté-là et ce côté-là, et ça va vous donner un tore, c'est-à-dire exactement l'image géométrique qui est donnée ici. Bon. Alors, il se fait que si vous prenez ce tore, et si vous essayez de le comprendre par les moyens classiques, c'est-à-dire si vous essayez de le décrire avec une algèbre de coordonnées qui est formée par des fonctions ordinaires, eh bien, vous trouvez une chose qui est assez bizarre, vous trouvez qu'il n'y a aucune fonction non constante sur ce tore. Donc, ce serait un point. Mais ça, c'est complètement contre-intuitif, si vous voulez, ce n'est pas un point, d'accord, c'est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle dont je parle. Alors en fait, ce qu'on démontre, c'est que si on regarde selon l'autre point de vue, c'est-à-dire par ce point de vue qui est basé sur l'idée de Heisenberg, eh bien, on obtient, du point de vue algébrique, une algèbre qui n'est pas du tout triviale, qui n'est pas du tout réduite à ce qui correspondrait à un point, et ça engendre un objet qui s'appelle le tore non commutatif. Et cet objet a une histoire très intéressante, au sens où quand il a été découvert, on a commencé par travailler dessus en tant qu'objet mathématiquement intéressant, on n'était pas vraiment motivés par autre chose. Mais ça, je vais en parler tout de suite, cet objet, il est apparu ensuite pour des raisons complètement disjointes, complètement différentes : il est apparu dans deux domaines tout à fait distincts de la physique : le premier domaine, c'est l'effet Hall du domaine quantique, et le second domaine, c'est dans ce qu'on appelle la théorie des cordes actuellement, et dans une théorie un peu plus élaborée qu'on appelle M-théorie. Eh bien, ce que les physiciens ont découvert, les physiciens, donc, par exemple Witten, Seiberg etc. ont écrit un article là-dessus : ils ont trouvé pour des raisons qui ne sont pas du tout évidentes qu'en fait exactement le même objet non commutatif, le même objet mathématique, qui est le tore non commutatif, apparaissait dans leur théorie, sans qu'on ait à l'introduire de manière artificielle. Alors si vous voulez, donc, la géométrie non commutative, je peux vous donner une idée intuitive, de ce que c'est que cette géométrie non commutative ; c'est très bizarre parce que si vous essayez de le regarder par exemple, c'est-à-dire si vous essayez de le projeter sur un espace à une dimension, eh bien vous allez obtenir quelque chose de très bizarre, vous allez obtenir que sa projection c'est-à-dire son nombre, si vous voulez, sur un espace à une dimension, eh bien, ça va vous donner un ensemble de Cantor. Ça va vous donner un ensemble totalement discontinu, donc, quand θ est un nombre irrationnel, quand θ n'appartient pas aux nombres rationnels. Donc au départ, ça apparaît comme un objet extrêmement ésotérique, mais ce qui a fait vraiment démarrer la géométrie non commutative, c'est qu'en fait, si vous voulez, il y a le même genre de théorèmes que les théorèmes qui sont vrais en géométrie ordinaire comme le théorème de Gauss-Bonnet, des théorèmes d'intégralité continuent à être vrais dans cette géométrie. Alors de toute manière, si vous voulez, je ne vais pas vous expliquer le dictionnaire, mais en gros, disons qu'il faut, pour comprendre ces espaces géométriques, il faut en gros réécrire tout ce qu'on connaît en mathématiques, c'est-à-dire qu'il faut commencer par ce qu'on appelle la théorie de la mesure ; la théorie de la mesure, ça veut dire qu'on prend un espace et qu'on ne regarde que la quantité d'éléments qu'il y a dedans, c'est tout. Et si vous permutez ses éléments, si vous faites ce que vous voulez, ça ne changera rien ; bon, alors il se fait que quand on est dans le commutatif, la théorie de la mesure, bon c'est quelque chose qu'il faut apprendre, c'est la théorie de Lebesgue, qui date du début du XXe siècle mais je veux dire, ce n'est pas quelque chose de très difficile au sens où tous les espaces sont les mêmes du point de vue de cette théorie de la mesure ; tous les espaces continus sont les mêmes. Alors la chose qui a fait au départ démarrer la géométrie non commutative donc c'est le fait qu'il y a un phénomène tout à fait étonnant ; c'est que même du point de vue de la théorie de la mesure, on s'aperçoit qu'un espace non commutatif, il tourne, alors qu'un espace classique, il reste le même ; un espace non commutatif, il évolue avec le temps ; il tourne avec le temps, je n'aurai pas le temps de décrire ça ; je vous donne simplement une idée un peu surréaliste de ça. Mais il y a une chose tout à fait extraordinaire, si vous voulez, c'est qu'un espace non commutatif, il hérite comme par miracle d'une évolution dans le temps, qui est complètement canonique modulo ce qu'on appelle les automorphismees intérieurs, et qui fait qu'il y a une évolution ; et cette évolution, elle est incroyablement reliée de manière très profonde avec la mécanique quantique.

Bon alors la deuxième chose, donc, c'est que, bien sûr, si vous avez la théorie de la mesure, après vous pouvez faire ce qu'on appelle de la topologie différentielle vous pouvez faire de la topologie etc. Mais vous vous heurtez vraiment à une difficulté essentielle à un moment donné, qui est que pour développer la géométrie, Riemann avait utilisé de manière essentielle ce qu'on appelle le calcul infinitésimal. Donc je veux simplement vous expliquer, c'est un peu surréaliste, comme je le disais, mais ça ne fait rien, ce qui est l'analogue du calcul infinitésimal en géométrie non commutative, en vous racontant une histoire là-dessus : donc quand j'étais à l'École Normale, dans les années 66-67, j'avais été, au début de mon séjour à l'École Normale, fasciné par un livre et ce livre s'intéressait à ce qu'on appelle l'analyse non standard. L'auteur s'intéressait à donner une version rigoureuse de ce qu'on appelle les infinitésimaux. Les infinitésimaux, c'est une notion un peu intuitive, et ce livre voulait en donner une formulation qui ne soit pas intuitive, mais qui soit rigoureuse, et il partait du problème suivant. J'espère que vous voyez ça, d'accord, donc il y a un bonhomme, ok, qui joue à un jeu, et ce jeu, c'est un jeu de fléchettes, c'est-à-dire qu'il va envoyer la fléchette sur la cible, d'accord, et la question posée est la suivante : la question posée, c'est une question intuitive, il faut toujours se poser des questions intuitives très simples ; la question posée était "quelle est la probabilité, si on prend un point x de la cible,..." ; d'accord, je prends un point x particulier, dans la cible et la question posée, c'était : "quelle est la probabilité pour qu'en lançant la fléchette, elle tape juste au point x ?". Bon alors, ce n'est pas difficile de dire que vous pouvez diviser la cible en deux parties égales et que le point x, il va se trouver d'un côté ; donc cette probabilité, elle est plus petite que $1/2$; d'accord donc cette probabilité $P(X)$ est plus petite que $1/2$; vous pouvez continuer à découper la cible encore en deux parties égales, ou ce qui reste en deux parties égales, et vous en déduirez que la probabilité $P(X)$ est plus petite que $1/4$, bon il est clair que vous allez pouvoir continuer comme ça indéfiniment, et que vous démontrerez que $P(X)$ est plus petit que ε pour tout ε positif.

Alors vous en conclurez, si vous pensez que $P(X)$ est un nombre réel, que $P(X)$ est égal à 0. Mais ça, c'est évidemment faux, puisqu'à chaque fois, vous enlevez, et là, vous envoyez la fléchette, elle tape bien quelque part, d'accord, donc c'est évidemment faux, alors donc ce livre sur l'analyse non standard proposait une solution qui provenait de la logique, qui prenait des choses très compliquées en logique, et j'ai passé 6 mois à étudier, donc, la logique etc. et au bout de 6 mois, je me suis aperçu que la solution qui était donnée, en fait, ne tenait pas, parce que ça utilisait exactement ce que Lebesgue avait exclu dans sa théorie, c'est-à-dire qu'on pouvait déduire des résultats de Lebesgue qu'en fait, jamais personne ne pourrait nommer un tel infinitésimal ; jamais personne ne pourrait vous dire "eh bien, voilà un infinitésimal." Donc c'est une théorie qui est complètement virtuelle. Alors j'ai passé des années et des années sans vraiment m'attacher essentiellement à ce problème, mais à être un peu fasciné par ce problème-là, est-ce qu'on peut donner vraiment une réponse à cette question, et ce qui a fait démarrer la géométrie non commutative, si vous voulez, l'analogue du calcul infinitésimal en géométrie non commutative, c'est une réponse à cette question. Mais le miracle c'est que cette réponse, elle vient de la mécanique quantique, et la réponse, elle est donnée par un dictionnaire, et ce dictionnaire je vais de manière très simple vous en parler, si vous voulez.

Donc c'est un dictionnaire dans lequel vous avez, du côté gauche, tout ce qui va être classique et vous allez avoir, du côté droit, tout ce qui va être quantique. Alors ce dont vous vous apercevez, mais ça, les physiciens avec Heisenberg s'en étaient aperçus, c'est la grande découverte de Heisenberg, c'est que ce qui va remplacer une observable, une une quantité observable, c'est une quantité qui va prendre des valeurs réelles, c'est une variable, si vous voulez ; parfois, elle ne prend que des valeurs entières ; parfois elle ne prend que des valeurs entre 0 et 1 si c'est une probabilité, etc. Bon c'est ce qu'on appelle une variable ; quand vous faites de la mécanique quantique, vous vous apercevez qu'une variable, ce n'est pas ce qu'on prend d'habitude. C'est un opérateur dans ce qu'on appelle l'espace de Hilbert. D'ailleurs à ce propos, je veux signaler quand même une chose très importante, c'est que Hilbert avait inventé le spectre d'un opérateur dans les années 1910, bien avant que l'on sache que ça coïnciderait avec les spectres qu'on voyait des étoiles. Mais la terminologie était la même, c'est ça qui est quelque chose d'extraordinaire, d'accord, c'est-à-dire qu'il parlait de spectre d'un opérateur, et ici, le spectre de l'opérateur, c'est quoi ? C'est l'ensemble des valeurs possibles de la variable. Alors une variable est réelle lorsque l'opérateur est ce qu'on appelle un opérateur auto-adjoint, bon, tout ça, ça va très bien, mais alors ce qui est fantastique, si vous voulez, c'est qu'il y avait en fait, dans le dictionnaire de la mécanique quantique, exactement la place qu'il fallait pour les infinitésimaux, c'est-à-dire qu'en mécanique quantique, en fait, il y avait des opérateurs qui étaient tels qu'en fait, ils étaient plus petits que ε pour tout ε positif sans être nuls alors, c'est un peu subtil parce que quand on dit qu'ils sont plus petits que ε quel que soit ε, il faut faire attention à la manière dont on met les quantificateurs et la condition réelle, c'est donc que quel que soit ε positif, on peut comme on dit *conditionner l'opérateur*, c'est-à-dire qu'on peut trouver un nombre fini de conditions linéaires qui font décroître la norme de l'opérateur, la taille de l'opérateur, à quelque chose qui est plus petit que ε. Et alors, si vous voulez, donc, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait dans le quantique, il y avait exactement les objets qu'il fallait pour comprendre et formaliser cette notion d'infinitésimaux, alors que ces objets ne sont pas présents dans la théorie classique. Dans la théorie classique, ils n'existent pas. Alors, il se fait qu'on peut ensuite mieux comprendre ce qu'on appelle la différentielle d'une variable, et que la différentielle est exactement comme Heisenberg et Dirac l'avaient dit : ils avaient remplacé les crochets de Poisson de la mécanique par des commutateurs et la différentielle est, elle aussi, donnée par un commutateur d'opérateurs. Donc c'est quelque chose de très concret, l'intégrale est quelque chose de beaucoup plus compliqué, qui vient de ce qu'on appelle la trace de Dixmier, et qui est quelque chose de très, très délicat, et assez intéressant à définir, mais ce qui est très, très intéressant, c'est que finalement, si on revient à l'exemple de tout à l'heure, donc si on revient à l'exemple de la cible ici, eh bien, on s'aperçoit donc qu'on a un infinitésimal qui correspond exactement à cette situation, et que cet infinitésimal, c'est ce qu'on appelle l'inverse du laplacien de Dirichlet pour la cible et que maintenant, il est infiniment subtil au sens où si vous changez un peu la forme de la cible, eh bien, vous allez pouvoir calculer de quelle manière cet infinitésimal va être modifié et vous allez pouvoir faire des calculs que vous ne pourriez pas faire autrement. Par exemple, vous allez pouvoir prendre la fonction exponentielle de -1 sur l'infinitésimal, qui est une fonction comme la fonction exponentielle, $\exp(-\frac{1}{x})$ qui a un développement de Taylor qui est nul ; eh bien, cette fonction ne pourrait absolument pas se définir dans les autres calculs. Donc on a à notre disposition maintenant ce nouveau calcul, si vous voulez, et à partir de là, je veux simplement faire une petite parenthèse pour relier mon propos à la conférence d'hier, qui était la conférence de Mandelbrot, c'est que ce calcul, il s'applique à énormément de cas ; il s'applique au cas non commutatif en général, il s'applique à ce tore non commutatif, à tous ces exemples, mais il s'applique aussi aux fractals, c'est-à-dire que si vous prenez, par exemple, une courbe fractale comme celle dont Mandelbrot a parlé, eh bien, ce calcul différentiel qui vient de la mécanique quantique s'applique merveilleusement, et, par exemple, il permet de donner un sens à l'intégrale sur la courbe d'une fonction, mais multiplié par la variable dz, mais maintenant qui est élevé à une puissance qui est la dimension de Hausdorff de la courbe, d'accord. Donc si vous voulez, même si on regarde ce calcul du point de vue des mathématiques classiques, on obtient des résultats nouveaux, même sur les choses qu'on pourrait penser comme étant commutatives. Ça, c'est une chose très importante.

Alors une deuxième des choses vraiment importantes, si vous voulez, qui sort donc de cette théorie, c'est qu'en fait, ce tore non commutatif dont je parlais tout à l'heure, qui est le premier exemple un peu délicat d'espace non commutatif, en fait il apparaît très naturellement à partir de la physique et il apparaît donc dans ce qu'on appelle l'effet Hall quantique. Dans l'effet Hall quantique, qui est donc l'un des phénomènes qui sort de la mécanique quantique, si vous voulez, qui est très, très surprenant, donc le phénomène, c'est... on prend une plaque métallique par exemple une très fine couche d'or, et on la soumet à un champ électromagnétique perpendiculaire extrêmement fort. Et alors, à ce moment-là, ce qui se produit, c'est que les électrons de conductivité dans le métal vont avoir un courant transverse qui est ce qu'on appelle le courant d'effet Hall. Et ce courant va exister dans le domaine quantique c'est-à-dire à très, très basse température. Alors les physiciens Pepper, Dorda, et von Klitzing se sont aperçus que lorsqu'on fait la courbe de ce qu'on appelle la conductivité, en fonction de ce qu'on appelle l'énergie de Fermi, eh bien, on obtient un phénomène qui est vraiment étonnant, c'est que cette courbe, elle admet des plateaux c'est-à-dire qu'il y a des endroits dans lesquels cette variable qui est la conductivité, au lieu de se mettre à varier continuement lorsque vous faites varier ce qu'on appelle le niveau de Fermi, elle va garder la même valeur. Alors, il est évident que quand une variable a cette propriété de stabilité, on a envie de savoir ce qu'elle vaut, parce que ce ne sont pas n'importe quelles valeurs, si vous voulez, ce sont des plateaux, et sur ces plateaux, elle devrait prendre des valeurs très, très particulières.

Alors là, chose étonnante, c'est qu'en fait ces plateaux sont des multiples d'une certaine constante qui est reliée à la constante de structure fine, et ce qui est vraiment étonnant, c'est qu'une démonstration de cette propriété qui a été faite par Jean Bellissard vient exactement de la géométrie non commutative, et du fait qu'en géométrie non commutative, on a l'analogue du théorème de Gauss-Bonnet, qui dit qu'on a des théorèmes topologiques, qui peuvent compter par exemple le nombre de trous des surfaces, et que ce nombre de trous sera un entier mais que cet entier, il sera écrit, comme dans la conférence de Jean-Pierre Bourguignon, à partir de l'intégrale de la courbure de la surface. Vous voyez, si vous prenez la surface, elle va avoir une certaine courbure, et si par exemple vous donnez un coup de poing dans la surface, ça va creuser un trou dans la surface, et ce trou il va autant contribuer par de la courbure négative que par de la courbure positive ; c'est hallucinant, ça, c'est quelque chose d'étonnant, d'accord. Eh bien, le même fait, lorsqu'on le comprend algébriquement, il engendre ce qu'on appelle la cohomologie cyclique et cette cohomologie cyclique, elle explique non seulement le cas classique, mais elle explique aussi le cas quantique avec cette conductivité.

La deuxième chose importante qui est apparue, c'est en fait, si vous voulez, que donc ce nouveau modèle de la géométrie, donc ce que je suis en train de proposer, c'est un nouveau modèle de la géométrie, ce qu'on appelle la géométrie non commutative. Après un moment, on comprend comment formuler tous les éléments de la géométrie, y compris la métrique ; la notion de métrique est une notion spectrale. On a une algèbre qui représente l'espace ; elle est bien sûr représentée dans l'espace de Hilbert, comme je le disais, en mécanique quantique, mais ce qui est étonnant, si vous voulez, c'est que l'élément de longueur ds, ce que les physiciens appellent le propagateur dans les diagrammes de Feynman, alors là, il y a aussi quelque chose qui est incroyablement étonnant, c'est que les physiciens ont une notation pour ce propagateur, et que leur notation, c'est un tout petit segment, c'est un tout petit segment, et là, la seule contribution de la géométrie non commutative, c'est de dire que ce tout petit segment, c'est l'élément de longueur, d'accord, donc c'est quelque chose d'extrêmement intuitif. Alors maintenant, ce qui se produit, c'est qu'en fait à travers l'information que l'on a sur l'espace-temps, quelle est l'information concrète que l'on a sur l'espace-temps, à partir de la physique. Cette information concrète, en fait, elle est contenue dans ce qu'on appelle le lagrangien de la relativité générale, qui contient la théorie d'Einstein, et toute l' information que l'on a sur la nature des particules élémentaires, les quarks, les leptons, etc. En fait, elle est contenue dans un autre terme, dans le lagrangien, qu'on appelle le lagrangien du modèle standard. Donc en fait, si vous voulez, toute l'information que l'on a sur l'espace-temps, ce n'est pas qu'on va projeter que cet espace-temps, c'est un espace géométrique au sens classique, etc. Non, cette information, elle est contenue dans un certain nombre de formules de physique, qui contiennent à la fois la relativité générale, et à la fois, si vous voulez, ce que l'on sait sur les particules élémentaires. Et tout ce que l'on sait sur les particules élémentaires, ça se résume dans le lagrangien du modèle standard, qui est extrêmement compliqué à écrire, que je n'écris pas, d'accord.

Alors maintenant, il y a une chose étonnante et qui fait le lien avec la géométrie non commutative, c'est qu'en fait, si vous regardez le groupe de symétrie de ce lagrangien, vous vous apercevez que, bien sûr, il devrait avoir les symétries du lagrangien d'Einstein, c'est-à-dire les difféomorphismes de la variété d'espace-temps, bon, mais comme c'est le lagrangien du modèle standard, il doit aussi avoir les symétries du modèle standard et ça, c'est ce qu'on appelle le groupe de jauge de deuxième espèce. Alors ça, c'est un groupe qui est le groupe des applications de M dans un certain groupe de Lie, d'accord, donc les applications, si vous voulez, de M dans un certain groupe de Lie. Et alors, après, vous vous apercevez qu'en fait, le groupe de symétrie total du lagrangien, ça n'est pas le produit de ces deux groupes, ce serait trop simple, mais parce que le groupe des difféomorphismes va permuter les transformations de jauge, le groupe des symétries, ça va être ce qu'on appelle le produit semi-direct : c'est un groupe G qui est ce qu'on appelle le produit semi-direct du groupe de jauge par le groupe des difféomorphismes. Alors ça, c'est bon, c'est bien, mais je veux dire, c'est ce qu'on trouve par l'expérience. Mais maintenant, on peut se poser la question "serait-il possible qu'il existe un espace X tel que ce groupe de symétrie soit simplement les difféomorphismes de X, les transformations géométriques de l'espace X, c'est tout ?". D'accord, vous cherchez l'espace X parmi les espaces géométriques ordinaires, vous ne pouvez pas le trouver parce qu'il y a des théorèmes de mathématiques qui vous disent que le groupe des difféomorphismes, c'est toujours un groupe simple, c'est-à-dire que c'est un groupe qui ne peut pas avoir de sous-groupe normal.

Alors maintenant, la chose étonnante, c'est que quand vous allez dans le non commutatif, dans le non commutatif, il y a des automorphismes qui sont spéciaux, comme on dit, intérieurs, qui ne se voient pas, ils ont exactement cette propriété que devraient avoir les transformations de jauge, c'est-à-dire de former un sous-groupe, comme on dit, normal, à l'intérieur. Alors maintenant, la chose étonnante, donc, c'est qu'il existe un espace non commutatif X tel que son groupe de difféomorphismes soit exactement le groupe d'invariance du lagrangien de la physique, et qu'après, quand vous étudiez cet espace X, vous vous apercevez que les données de la physique, par exemple, ce qu'on appelle la matrice de Yukawa, la matrice de couplage de Yukawa, eh bien, en fait, elle vous donne la métrique de cet espace. Mais comme une métrique au sens non commutatif, donc vous voyez qu'en fait, c'est une théorie qui cadre très, très exactement avec à la fois les espaces que l'on rencontre dans les modèles de l'espace des phases, bien entendu, dans les modèles de la mécanique quantique, comme dans l'effet Hall quantique, mais aussi, c'est un type d'espace géométrique qui est extrêmement proche et naturel, pour pouvoir être un modèle plus efficace, beaucoup plus efficace, que le modèle que l'on a d'habitude de l'espace-temps, parce qu'il colle beaucoup mieux avec le côté expérimental.

Alors il y a une dernière chose que je vais mentionner, je finis là-dessus ; c'est simplement le lien avec la théorie des nombres. Il se fait... je vais simplement mettre une formule, mais je ne vais pas vous expliquer cette formule d'accord. Il se fait, si vous voulez, que les espaces non commutatifs sont exactement adaptés pour donner un modèle d'un espace qui va donner une réalisation spectrale, pour ce qu'on appelle les zéros de la fonction zeta, qui va permettre si vous voulez, d'avancer, non pas d'arriver du tout au bout du problème, si vous voulez, mais d'avancer dans la compréhension de la structure géométrique de l'ensemble des nombres premiers. L'ensemble des nombres premiers, c'est un ensemble, mais en fait, il hérite de l'arithmétique d'énormément de structure, et cette structure, elle se manifeste de manière spectrale. Ça, c'est ce que Riemann a découvert et la fonction que vous avez ici, c'est le nombre de zéros de la fonction zeta de Riemann entre 0 et E. Eh bien, il se fait qu'il y a une coïncidence absolument incroyable, à nouveau, qui a été découverte récemment entre la géométrie non commutative et la géométrie que l'on attend d'avoir, pour faire la théorie qui correspond à la théorie de Riemann pour la théorie des nombres, et que ça correspond exactement, le passage au non commutatif, au passage qu'il y a dans la théorie d'Artin, entre la loi de réciprocité de Gauss, qui est formulée dans le cas des groupes de Galois abéliens, au cas des groupes de Galois non abéliens : le passage du cas abélien dans le cas de Gauss, au cas non abélien d'Artin, correspond exactement au passage du commutatif au non commutatif, ok. Donc je crois que vais m'arrêter là.

Un auditeur : Bonsoir Monsieur. Je voulais justement vous poser la question sur le lien avec la théorie des nombres, donc je vous remercie d'en avoir parlé. Oui, est-ce qu'aujourd'hui, on entrevoit le lien, via ce que vous avez dit, entre la notion de probabilité, qui est centrale en mécanique quantique, et les aspects probabilistes de la distribution des nombres premiers ?

Alain Connes : Alors ce qui se produit, c'est... Bon, ça demanderait un autre exposé, mais je peux vous résumer très simplement ce qui se produit. Donc, c'est que Montgomery avait observé que si on regarde la statistique, au niveau vraiment de la statistique, là, pas des probabilités, si on regarde la statistique des zéros de la fonction zeta de Riemann, eh bien, il s'était aperçu que cette statistique, c'est la même que ce qu'on appelle GUE, c'est-à-dire que c'est la statistique des valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne, pas d'une matrice symétrique, mais d'une matrice hermitienne, d'accord. Et alors, c'est ça qui a motivé énormément de travaux, pour justement trouver une réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann, mais ce qui est formidable, c'est que donc cette réalisation a été trouvée ; elle ne résout pas le problème de Riemann, l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction zeta de Riemann, mais ce qui est formidable, si vous voulez, c'est qu'en fait, cette réalisation, elle a un lien très fort avec la physique, parce qu'au lieu d'être une réalisation des zéros de la fonction zeta de Riemann, comme un spectre d'émission, il se fait que la clé, c'est qu'en fait, les zéros de la fonction zeta apparaissent comme un spectre d'absorption, d'accord, ça, c'est une chose extrêmement importante ; il y avait un signe moins qui apparaissait dans une formule de trace et qui dictait cette chose-là, et qui n'avait pas été remarqué avant, d'accord. Oui, monsieur, allez-y.

Un auditeur : Oui, bonjour, vous avez parlé des théories de jauge ; est-ce qu'on ne pourrait pas, justement, pour résoudre le paradoxe de la gravitation quantique, mettre justement ces théories de jauge et par exemple vous avez parlé des super-cordes, des membranes... avec un espace discret, voire un espace fractal...

Alain Connes : Bon alors là, la réponse, elle est très simple ; en fait, disons que si l'on croit à la théorie des cordes, et je n'y crois pas, vraiment, je veux dire, c'est une théorie qui pour le moment ne fait aucune prédiction qui ait été testée par l'expérience. Mais supposons que nous croyons à cette théorie, eh bien, en fait, les gens ont démontré en théorie des cordes, ça, ça a été fait par Michael Douglas, Albert Schwarz, Edward Witten, etc., en fait, ce qu'ils ont démontré, c'est que la théorie des cordes implique que l'espace-temps devient non commutatif ; ça, c'est une conséquence de ce qu'on appelle le champ de Schwarz $B_{\mu\nu}$. Donc en fait, ce n'est pas tellement un espace discret, parce qu'un espace discret, il a un énorme désavantage, c'est qu'il a un très petit groupe de transformations naturel, alors qu'un espace non commutatif, il peut avoir une algèbre de fonctions qui est de dimension fini, comme les matrices, mais avoir un très large groupe de symétrie, d'accord. Donc ça irait plutôt dans la direction de ça, il y a quantité d'articles, je veux dire maintenant pratiquement, tous les jours, sur ce qu'on appelle sur internet, sur ce qu'on appelle `hep-th`, il y a des articles sur la géométrie non commutative et la théorie des cordes, ou sur la théorie M, c'est-à-dire que c'est la dernière théorie à la mode. La seule critique que je fais, si vous voulez, c'est que je n'ai rien contre ce développement, au contraire, j'en suis très heureux ; par contre, ce qui est un peu embêtant, c'est que la théorie des cordes pour le moment n'est pas encore une théorie qui a vraiment fait un contact direct avec l'expérience, parce que c'est une théorie, la seule prédiction qu'elle a pour le moment, c'est la dimension de l'espace-temps, au début, c'était 26, c'était un peu loin, après c'est devenu 10, mais maintenant, c'est 11, d'accord, donc il y a un travail à faire pour que ça soit vraiment une théorie prédictive.

Un auditeur : Après ces démonstrations magiques, je ne sais pas si ma question... C'est à propos de *L'étrange histoire des quanta* [1]. Alors j'ai trouvé là-dedans que ce ne sont pas l'espace et le temps qui sont les éléments de base, mais les particules fondamentales de matière, d'énergie, elle-même (*Alain Connes approuve : "tout à fait, tout à fait".*) Et plus loin, ces électrons ainsi que les particules fondamentales n'existent pas dans l'espace-temps, ce sont l'espace et le temps qui existent en fonction d'eux. Alors ma question est "est-ce qu'on peut parler de matière, et pas de temps ?".

Alain Connes : Tout à fait, vous avez infiniment raison. Alors cette phrase, d'abord, quand vous hésitez à poser votre question, je voudrais dire... Je crois qu'il y a un proverbe qui dit la chose suivante : "si vous êtes dans une conférence, il y a deux options ; la première option, c'est *poser la question*, et la deuxième option, c'est *ne pas la poser*. Alors dans le dans le premier cas, le risque que vous courez, c'est d'avoir l'air idiot pendant 2 minutes ; dans le deuxème cas, vous êtes absolument certain de rester idiot jusqu'à la fin de..." Bon alors maintenant, pour répondre à votre question, la théorie dont je viens de parler, c'est exactement ça : c'est-à-dire que c'est une théorie qui est basée sur la matière, mais pas sur les bosons, la théorie est basé uniquement sur les fermions, c'est-à-dire sur les électrons, etc., d'accord. C'est une théorie sur les quarks, etc. et c'est une théorie qui re-

1. Livre de Banesh Hoffmann

construit l'espace-temps à partir de ces données élémentaires. Donc c'est exactement ce que vous dites, c'est exactement ça, mais par contre, ça ne considère pas les bosons, ça ne considère pas le photon, ça ne considère pas le W, ou le Z, etc. ou le X, d'accord, toutes ces quantités-là en sont déduites, elles sont déduites des fermions comme représentant la métrique sur l'espace-temps. Mais l'espace-temps est plus subtil, parce qu'il est non commutatif, d'accord.

Un auditeur : vous avez parlé de l'espace de Minkowski, qu'est-ce que c'est exactement, et quels sont éventuellement ses rapports avec les autres espaces, et avec le temps ?

Alain Connes : Bon, alors, l'espace de Minkowski, pour comprendre ce que c'est que l'espace de Minkowski, il faut... On a souvent, parce que les physiciens ont souvent une attitude un peu méprisante par rapport au mathématiciens, si vous voulez, on a souvent l'impression que Minkowski n'a fait que transformer les équations d'Einstein de la relativité restreinte en un espace, bon. Mais en fait, Minkowski était un esprit extrêmement intéressé par la physique ; et si on veut comprendre la profondeur des idées de Minkowski, il faut lire ce qu'a écrit Hilbert à la mort de Minkowski. Minkowski est mort à 41 ans d'une péritonite et Hilbert a écrit un résumé des travaux de Minkowski qui est tout à fait intéressant, et dans lequel on voit qu'en fait, Minkowski avait compris énormément d'idées mais pas seulement d'idées de relativité restreinte, mais d'idées de relativité générale. C'est-à-dire : “qu'est-ce que l'espace de Minkowski ?”. Donc, c'est l'espace-temps, mais dans cet espace-temps, on comprend le paradoxe suivant : je ne sais pas si vous connaissez ce paradoxe, enfin... un paradoxe. Si vous voulez comprendre la relativité restreinte, il faut d'abord que je vous donne un choc expérimental, d'accord. Et ce choc expérimental est le suivant : vous prenez la Terre, et vous prenez l'atmosphère autour de la Terre, la couche atmosphérique a environ 20 km de hauteur, d'accord, alors maintenant, on a des rayons cosmiques qui viennent du soleil, des particules de très haute énergie, et quand elles heurtent l'atmosphère, c'est-à-dire à 20 kilomètres de la Terre, elles provoquent des cascades de particules ; parmi ces particules, il y a des muons, d'accord ; le muon, c'est une particule qui a un temps de vie très court ; il vit environ une microseconde. Alors si vous multipliez le temps de vie du muon par la vitesse de la lumière, vous obtenez 500 mètres d'accord. C'est-à-dire que même si vous autorisez le muon à aller à la vitesse maximale qui est la vitesse de la lumière, il ne pourra pas parcourir plus de 500 mètres. Alors le paradoxe, c'est qu'on observe des muons au sol. Donc ils ont parcouru 20 kilomètres. Alors maintenant, si vous allez dans un accélérateur de particules comme le CERN, on fait vivre des muons pendant une minute. D'où ça vient, eh bien ça vient du fait qu'il y a une formule de relativité restreinte, pas de relativité générale, qui vous dit que le temps se dilate, que le temps n'est pas quelque chose d'absolu, que la vitesse avec laquelle le temps passe, d'accord, va dépendre justement du repère dans lequel on est, et ça, c'est fabuleux, c'est ce qui permet au mieux d'atteindre la terre, c'est ce qui permet au muon de vivre tout ce temps, d'accord. Donc, c'est ce paradoxe qui est complètement compris dans l'espace de Minkowski ; c'est quelque chose qui paraît bizarre, l'espace de Minkowski est quelque chose qui vous permet de comprendre conceptuellement complètement ce paradoxe, d'accord. Alors c'est un espace de Riemann avec $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Un auditeur : Le physicien Basarab Nicolescu parle de plusieurs niveaux de réalité, qu'est-ce que vous en pensez ?

Alain Connes : Oui alors, attendez, j'ai une deuxième question.

Le même auditeur : Vous avez parlé de l'antagonisme entre Bohr et Einstein.

Alain Connes : Comme je suis rentré de Boston cette nuit, il vaut mieux me poser une question à la fois, d'accord.

Le même auditeur : Mais je vous la pose quand même. Vous avez parlé d'antagonisme entre Bohr et Einstein.

Alain Connes : Oui, ce n'est pas un antagonisme, non, c'est... C'était... quand on cherche la vérité, il n'y a pas d'antagonisme : tous les deux étaient d'accord, du moment qu'on atteignait la vérité, tous les deux étaient d'accord ; ce n'est pas un antagonisme, je veux dire, si vous voulez, peut-être, bon, chacun avait son point de vue. Alors je réponds à la première question, donc les niveaux de réalité : les niveaux de réalité, bien entendu, je veux dire, la physique n'est autre chose que des modèles, et ces modèles ont une adéquation plus ou moins forte avec la réalité : le modèle de Newton du temps universel a une adéquation qui ne va pas, quand on prend l'exemple du muon ; le modèle d'Einstein de la relativité restreinte a une adéquation meilleure mais il n'a pas la bonne adéquation lorsqu'on regarde justement l'expérience dont discutaient Bohr et Einstein, et dans laquelle il y avait cette pesée dans un champ gravitationnel variable. Donc qu'est-ce qu'on fait ? En fait, ce sont des modèles, on ne peut pas dire "l'espace-temps, c'est ça" ; non ; on peut dire : "voilà mon modèle de l'espace-temps". Et bien sûr, plus un modèle a de rapport avec la réalité expérimentale, plus il a de valeur ; il est évident que si vous donnez un modèle complètement philosophique, même peut-être, je ne sais pas, je ne veux pas critiquer les philosophes, parce que j'aurais des représailles sérieuses, mais ce que je veux dire, c'est qu'il y a quand même une grande différence entre fantasmer au niveau philosophique, et se heurter au concret de la réalité expérimentale, d'accord. Bon alors maintenant, justement, quant à non pas l'antagonisme, mais cette rivalité si on peut en parler ainsi, entre Einstein et Bohr. Eh bien, ce qu'il y a, c'est qu'en fait, si vous voulez, Einstein dit lui-même qu'il a passé 1000 fois plus de temps à réfléchir à la mécanique quantique qu'à la relativité générale. Donc il a passé toute sa vie, c'est lui qui a compris l'effet photoélectrique ; donc c'était un des grands artisans de la mécanique quantique. Mais il ne s'est jamais réconcilié avec la découverte de Heisenberg, avec le formalisme tel qu'il était fait, bon, il y a sûrement du vrai dans ce qu'il dit, c'est évident, parce qu'à chaque fois qu'on dit "ah oui, mais il avait tort !", non, il n'avait sûrement pas tort ; mais on saura si oui ou non, il avait tort lorsqu'on comprendra sa pensée, plus tard, c'est tout. Mais en l'occurrence, dans cet exemple de pensée, je veux dire dans cette expérience de pensée qu'il avait proposée, il se fait que c'est Bohr qui a eu le dernier mot. Ça, c'était bien.

Le même auditeur : je peux poser ma troisième question : ce n'était pas une question ; elle est liée à l'antagonisme entre Bohr et Einstein, oui, c'est l'historienne des sciences Isabelle Stengers qui écrit un livre *Cosmopolitiques*, qui est un appel à la paix, justement, entre les sciences, qu'est-ce que vous en pensez ?

Alain Connes : Ça, c'est en dehors de mon domaine de compétence ; ce que je veux dire, c'est qu'il est clair, quand on fait des sciences, quand on passe son temps à se confronter par exemple aux mathématiques, qu'on ne passe pas assez de temps à se confronter aux choses infiniment subtiles qui sont des choses de la vie réelle. Et donc on est un peu isolé, on est certainement la dernière personne qui peut donner une réponse intelligente à cette question, bon, on va prendre encore des questions. Monsieur et Monsieur, allez-y.

Un auditeur : Je vous pose une question ; il y a très longtemps, j'ai lu le livre que vous avez écrit avec Changeux, qui s'appelait *Matière à pensée* ; je ne peux pas me rappeler complètement tout ce que j'ai lu dans ce livre : est-ce que vos positions et celles de Changeux sont restées les mêmes, avec, je dirais, non pas un antagonisme, mais disons une position très différente.

Alain Connes : Absolument, non, disons que nos positions sont restées identiques, mais ce qui est amusant, c'est que ce deuxième livre, donc, *Triangle de pensées* m'a donné l'occasion de, comment dire, de renforcer considérablement mon point de vue par la discussion avec mes deux co-auteurs qui sont André Lichnerowicz, qui est un mathématicien très célèbre, et Marco Schutzenberger, qui était à la fois un combinatoriste, mais qui était surtout un esprit très libre, et qui disait toujours ce qu'il pensait de manière très brutale, etc. Donc ce que je veux dire, c'est qu'on ne peut pas dire que nos positions ont changé, pas vraiment, mais ce qu'on peut dire, c'est qu'on a chacun apporté de l'eau à notre moulin, si vous voulez, donc on les a certainement plus affinées.

Un auditeur : Vous avez souvent employé le mot *étonnant* dans votre discours. Est-ce que cet étonnement, j'ai l'impression qu'il est souvent venu du fait que vous avez retrouvé des choses qui étaient connues par ailleurs. Et donc est-ce que ce fait qu'en explorant un domaine, on tombe sur un domaine déjà connu, est-ce que ça vous dit quand même que vous appréhendez, d'une certaine façon, le réel.

Alain Connes : Absolument, vous savez, d'abord, je vais répondre d'une autre manière, parce que par rapport au réel, si vous voulez, les mathématiques sont une science, une activité je dirais, dans laquelle le contact avec le réel est énorme. Pourquoi ? Parce que, vous savez, si je vous demande, par exemple, de... Je me souviens de mon fils qui une fois était rentré à la maison. Il m'avait dit : "le père d'un de mes copains a posé la question suivante ; il y a dans le désert deux oasis A et B qui sont distantes de 1000 km. À l'oasis A, il y a une pile de 3000 bananes et il y a un chameau et ce chameau, pour faire 1 km, il est obligé de manger une banane ; mais comme il n'est pas très costaud, il ne peut jamais porter plus de 1000 bananes sur son dos". Je ne sais pas si vous suivez, mais enfin bon, alors, la question est la suivante : la question c'est "combien le chameau peut-il porter de bananes au point B ?". Et alors bon, on avait réfléchi avec mon fils, tout ça, et puis on avait trouvé une réponse, et on avait trouvé 533, bon, alors donc mon fils est retourné en classe, et puis, il voit son son copain, et le copain lui dit "Non, mon père peut faire mieux !". Alors comme on avait bien réfléchi avec mon fils, je lui ai dit "laisse-le, laisse-le, ça va, demande-lui la solution." Bon alors euh, donc, il est retourné, il a demandé la solution. Alors son copain est revenu le lendemain, il a dit : "mon père demande une semaine de réflexion.". Alors j'ai dit "tu peux lui laisser un mois de réflexion... !". D'accord ? ! Ce qu'il faut comprendre, c'est qu'en mathématiques, on se heurte à une réalité, et qu'une fois que Galois a démontré que l'équation du 5e degré ne peut pas se résoudre par radicaux, c'est comme ça *(frappant un peu la table)*, c'est comme une table, on ne peut pas la traverser, d'accord. Et donc on se heurte à une réalité. Maintenant quand je disais *étonnant*, ce qui est étonnant, c'est la merveilleuse complexité, et les merveilleuses relations imprévisibles... Quand Hilbert a écrit ses 23 problèmes, il n'avait pas prévu ni la mécanique quantique, ni la relativité générale. Donc c'est ça qui est fascinant ; ce qui est fascinant, ce sont les choses qu'on n'aurait... que même dans le meilleur des rêves, on n'aurait même pas pu souhaiter, et que ces choses-là arrivent. Donc c'est ça que j'appelle *étonnant*, d'accord.

Un auditeur : Vous avez montré, donc, qu'avec la géométrie non commutative, on simplifie considérablement la physique d'une façon très élégante, ou donc en fait, en perdant une propriété qui paraît un peu... plutôt simple... Alors, selon la même démarche, finalement, si on se repose sur les algèbres, les nombres complexes, les quaternions et les octonions...

Alain Connes : Oui, il y a des gens qui font des travaux, je pense, pour examiner des géométries non associatives ou... Mais non, non, alors je peux vous expliquer tout de suite, d'accord, je crois d'ailleurs que je l'ai donnée, l'explication, je l'ai donnée avant. Pourquoi ? Parce que le langage est associatif, les mots sont associatifs, l'associativité, c'est quelque chose qui est essentiel pour pouvoir représenter, comme opérateur dans un espace de Hilbert, c'est quelque chose de crucial, d'accord, donc, quand j'entends géométrie non associative, j'ai exactement le même... le même... comment dire ?... la même réaction, que je pense beaucoup de mathématiciens ont par rapport à la géométrie non associative, ok, je vous remercie.

$$\mathcal{L}_{SM} =$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - M^2 W^+_\mu W^-_\mu -$$

$$\frac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \frac{1}{2c_w^2}M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) -$$

$$Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu -$$

$$W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] -$$

$$\frac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \frac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) +$$

$$g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) -$$

$$2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2\alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \beta_h\left[\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g}H +\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)\right] + \frac{2M^4}{g^2}\alpha_h - g\alpha_h M[H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \frac{1}{8}g^2\alpha_h[H^4 + (\phi^0)^4 +$$

$$4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2H^2] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \frac{1}{2}g\frac{M}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu H -$$

$$\frac{1}{2}ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \frac{1}{2}g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- -$$

$$\phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \frac{1}{2}g\frac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) + M(\frac{1}{c_w}Z^0_\mu\partial_\mu\phi^0 +$$

$$W^+_\mu\partial_\mu\phi^- + W^-_\mu\partial_\mu\phi^+) - ig\frac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_w MA_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) -$$

$$ig\frac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_w A_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \frac{1}{4}g^2 W^+_\mu W^-_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 +$$

$$2\phi^+\phi^-] - \frac{1}{8}g^2\frac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-] - \frac{1}{2}g^2\frac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) -$$

$$\frac{1}{2}ig^2\frac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \frac{1}{2}g^2 s_w A_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) + \frac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H(W^+_\mu\phi^- -$$

$$W^-_\mu\phi^+) - g^2\frac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- + \frac{1}{2}ig_s\lambda^a_{ij}(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial +$$

$$m^\lambda_e)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_\nu)\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_u)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_d)d^\lambda_j + igs_w A_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) +$$

$$\frac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \frac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \frac{ig}{4c_w}Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) +$$

$$(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(\frac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5)d^\lambda_j) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \frac{8}{3}s_w^2 + \gamma^5)u^\lambda_j)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)U^{lep}_{\lambda\kappa}e^\kappa) +$$

$$(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 + \gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu[(\bar{e}^\kappa U^{lep}_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1 + \gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1 + \gamma^5)u^\lambda_j)] +$$

$$\frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m^\kappa_e(\bar{\nu}^\lambda U^{lep}_{\lambda\kappa}(1 - \gamma^5)e^\kappa) + m^\lambda_\nu(\bar{\nu}^\gamma U^{lep}_{\lambda\kappa}(1 + \gamma^5)e^\kappa)] + + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m^\lambda_e(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1 +$$

$$\gamma^5)\nu^\kappa) - m^\kappa_\nu(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1 - \gamma^5)\nu^\kappa)] - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M}H(\bar{\nu}^\lambda\nu^\lambda) - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M}\phi^0(\bar{\nu}^\lambda\gamma^5\nu^\lambda) -$$

$$\frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda) - \frac{1}{4}\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1 - \lambda^5)\hat{\nu}_\kappa - \frac{1}{4}\overline{\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1 - \lambda^5)\hat{\nu}_\kappa} + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m^\kappa_d(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1 -$$

$$\lambda^5)d^\kappa_j) + m^\lambda_u(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1 + \lambda^5)d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m^\lambda_d(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1 + \gamma^5)u^\kappa_j) - m^\kappa_u(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1 -$$

$$\lambda^5)u^\kappa_j)] - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j)$$

Notations de Martinus Veltman :

Bosons : A_μ, W_μ, Z^0, g_μ
Quarks : u^κ, d^κ
Leptons : e^λ, ν^λ
Higgs : H, ϕ^0, ϕ^+, ϕ^-
Masses : m_d, m_u, m_e, m_h, M_W
$g = \sqrt{4\pi\alpha}$, g_s (interaction forte)
$C_{\lambda\kappa}$: matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
f^{abc} : constantes de $SU(3)$
Jauge de Feynman.
Les fantômes de Faddeev-Popov sont omis pour simplicité.