Extrait du livre de Jean-Claude Carrega sur les points constructibles à la règle accompagnée, ici à la règle accompagnée du bissecteur

Chapitre IX : La règle accompagnée

Nous présentons dans ce chapitre les types de constructions les plus classiques utilisant conjointement la règle et un autre instrument ou procédé de construction. Les éléments que nous adjoindrons à la règle sont les suivants :

- L'équerre traceuse de parallèles
- L'équerre
- Un cercle donné dans le plan
- Le bissecteur
- Le transporteur de distance.

[...Sections 1 à 4...]

5. Règle et bissecteur. Pliages

5.1. Points constructibles à la règle et au bissecteur

Supposons que l'on dispose en plus de la règle, d'un instrument permettant de construire la bissectrice de n'importe quel angle donné. Un tel instrument est appelé *bissecteur*. Nous ne nous attarderons pas sur la réalisation technique d'un tel instrument car l'utilisation d'une règle et d'un bissecteur est en fait équivalente à l'utilisation des *pliages* effectués sur une feuille de papier :

- *pliage de première espèce*, effectué pour représenter par un pli la droite qui joint deux points donnés de la feuille.
- *pliage de seconde espèce*, par lequel on fait coïncider les deux côtés d'un angle. Le pli obtenu représente alors la bissectrice de l'angle.

Remarquons que si A est un point d'une droite D, la bissectrice de l'angle plat de sommet A porté par D est en fait la perpendiculaire en A à la droite D. Celle-ci peut donc être obtenue par le bissecteur ou les pliages.

Donnons nous deux points O et I d'un plan euclidien P et cherchons l'ensemble des points du plan P que l'on peut construire à partir de O et I à l'aide de la règle et du bissecteur.

Nous allons tout d'abord construire un repère du plan P. On trace la droite OI, puis les perpendiculaires en O et I à la droite OI. La bissectrice d'un angle droit de sommet I permet d'obtenir

Référence : *Théorie des corps, la règle et le compas*, Hermann, collection formation des enseignants, nouvelle édition, 1989, p. 140 et p. 156 à 163.
Avant la table des matières du livre nous est fournie la biographie très résumée de Jean-Claude Carrega : né en 1944 à Montélimar, il est agrégé de mathématiques ; il est maître de conférences à l'Université Claude-Bernard, Lyon I où il effectue, en outre, des recherches au Laboratoire de logique mathématique.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, novembre2025.

un point J de la perpendiculaire en O à la droite OI tel que $OI = OJ$. On obtient de même un point K tel que $OIKJ$ soit un carré. (O, I, J) est un repère orthonormé du plan P. Les côtés du carré $OIKJ$ nous fournissent deux couples de droites parallèles. Nous savons alors, d'après la construction C2 donnée en VIII.3, construire à la règle la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Nous savons que cette construction nécessite parfois l'emploi de points arbitraires (catalyseurs) qui ne sont ni des points de base ni des points déjà obtenus. Nous acceptons dans cette étude ce procédé de construction que nous limiterons à la construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

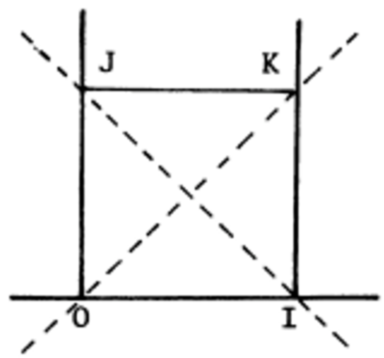

Fig. 98

Il est facile de deviner ce que nous appelons *point constructible et droite constructible à partir des points de base O et I à la règle et au bissecteur*. Donnons simplement la définition abrégée suivante :

- Un point constructible est un point d'intersection de deux droites constructibles.
- Une droite constructible est une droite d'un des trois types suivants :
  1) droite passant par deux points qui sont des points constructibles ou des points de base,
  2) droite passant par un point de base ou constructible et parallèle à une droite constructible,
  3) bissectrice d'un angle formé par deux droites constructibles.

Dans cette définition les droites du type 2) sont introduites pour tenir compte de l'utilisation de la construction C2.

Théorème 1. *L'ensemble des coordonnées dans (O, I, J) des points du plan P constructibles à la règle et au bissecteur à partir des points de base O et I est un corps. Ce corps est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ qui soit pythagoricien.*

Précisons tout de suite qu'un *sous-corps* L de $\mathbb{R}$ est dit *pythagoricien* si quels que soient u et v dans L, $\sqrt{u^2 + v^2}$ est dans L. Notons l'ensemble des coordonnées dans (O, I, J) des points du plan P constructibles à la règle et au bissecteur à partir des points de base O et I.

- *$\mathscr{C}_b$ est un corps.* Puisque nous disposons de la construction C2, nous pouvons tracer à la règle la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Nous pouvons alors reproduire les constructions qui ont permis de démontrer en IX.1 que $\mathscr{C}'_R$ est un corps. On obtient alors que :

- $\mathscr{C}_b$ est l'ensemble des abscisses des points constructibles de la droite OI.
- $\mathscr{C}_b$ est un corps (sous-corps de $\mathbb{R}$).
    - *$\mathscr{C}_b$ est pythagoricien.* Soient u et v dans $\mathscr{C}_b$. Nous allons démontrer que $\sqrt{u^2+v^2} \in \mathscr{C}_b$. On peut supposer $v \neq 0$. On a alors $\dfrac{u}{v} \in \mathscr{C}_b$ et $\dfrac{u}{v}$ est alors l'abscisse d'un point constructible de la droite OI. En traçant une parallèle à la droite OJ passant par ce point, on construit un point M de la droite JK d'abscisse $\dfrac{u}{v}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{IOM}$ coupe la droite IK en N. On note $\alpha = \widehat{ION}$, on a alors : $\overline{IN} = \operatorname{tg}\alpha, \overline{JM} = \operatorname{cotan} 2\alpha = \dfrac{u}{v}$. Mais $2\alpha = \dfrac{1-\tan^2 \alpha}{2\tan \alpha}$, d'où :

    $$\tan^2 \alpha + 2\frac{u}{v}\tan \alpha - 1 = 0$$

    et

    $$\begin{aligned} \tan \alpha \quad &= -\frac{u}{v} \pm \sqrt{\frac{u^2}{v^2}+1} \\ &= -\frac{u}{v} \pm \frac{1}{|v|}\sqrt{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

    $\tan \alpha$ est point constructible N d'où $-\dfrac{u}{v} \pm \dfrac{1}{|v|}\sqrt{u^2+v^2} \in \mathscr{C}_b$ et comme $\mathscr{C}_b$ est un corps contenant u et ν, on a aussi $\sqrt{u^2+v^2} \in \mathscr{C}_b$.

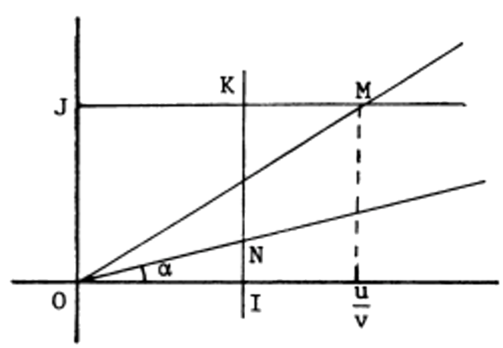

FIG. 99

- *$\mathscr{C}_b$ est le plus petit sous-corps pythagoricien de $\mathbb{R}$.*

    Soit L un sous-corps pythagoricien de $\mathbb{R}$. Nous allons démontrer que $\mathscr{C}_b \subset L$.

    Pour cela, il suffit de démontrer que toute droite constructible a une équation à coefficients dans L ; ce qui se fait par récurrence :

- La droite OI a bien sûr une équation ($y = 0$) à coefficients dans L.
- Soit D une droite constructible, supposons par hypothèse de récurrence que les droites construites antérieurement à D ont des équations à coefficients dans L.

  Les points construits antérieurement à D ont alors des coordonnées dans L et il en résulte que si D est du type 1 ou 2, elle a une équation à coefficients dans L.

  Si D est du type 3, elle est bissectrice d'un angle formé par deux droites D_1 et D_2 qui ont des équations à coefficients dans L et dont le point d'intersection A a ses coordonnées dans L.

  - Si $D_1 = D_2$, D est la perpendiculaire en A à D_1, qui a une équation à coefficients dans L.
  - Si $D_1 \neq D_2$, notons $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs des demi-droites portés par D_1 et D_2 et qui sont les côtés de l'angle dont D est bissectrice. Puisque D_1 et D_2 ont des équations à coefficients dans L, on peut choisir $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ avec des composantes dans L :

$$\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{vmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{vmatrix}$$

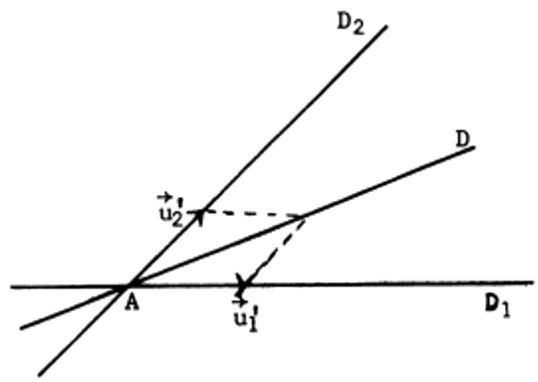

FIG. 100

Les vecteurs unitaires correspondant sont alors

$$\overrightarrow{u_1}' = \frac{\overrightarrow{u_1}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{u_2}}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$$

Comme L est pythagoricien, ces vecteurs ont des composantes dans L ; il en est de même du vecteur $\overrightarrow{u_1}' + \overrightarrow{u_2}'$ qui est vecteur directeur de la bissectrice D. Il en résulte que D, qui passe d'une part par le point A à coordonnées dans L, a une équation à coefficients dans L.

Remarques. 1) Le théorème se généralise au cas de constructions avec plus de deux points de base. Si on désigne par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées dans (O, I, J) des autres points de base, on obtient que $\mathscr{C}$ est le plus petit sous-corps pythagoricien de $\mathbb{R}$ contenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

2) On a bien sûr $\mathbb{Q} \subset \mathscr{C}_b$. On peut mettre en évidence d'autres éléments de $\mathscr{C}_b$, par exemple, $\sqrt{2}$ car $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ et par récurrence sur n, $\sqrt{n} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{n-1})^2}$.

3) Il est intéressant de comparer le corps $\mathscr{C}_b$ au corps des nombres constructibles à la règle et au compas introduit au chapitre II. C'est ce que nous faisons dans l'étude suivante.

5.2. Comparaison Règle-compas et Règle-bissecteur

Il est clair que $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}$. Cela se voit géométriquement car la règle et le compas permettent de construire la bissectrice d'un angle ; cela se retrouve algébriquement car le corps $\mathscr{C}$, qui est stable par racine carrée, est a fortiori pythagoricien.

Le problème qui se pose alors est de savoir si les corps $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}$ coïncident ou bien si l'inclusion $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}$ est stricte.

On pense que l'inclusion est stricte car a priori, $\mathscr{C}_b$ n'est stable que pour certaines racines carrées, celles qui portent sur une somme de carrés.

En fait comme D. Hilbert l'a démontré l'inclusion est bien stricte. Cela résultera immédiatement d'une propriété du corps $\mathscr{C}_b$ que nous allons maintenant établir.

Proposition 1. *Si $\alpha \in \mathscr{C}_b$ et si $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$, toutes les racines de $P(X)$ sont dans $\mathscr{C}_b$.*

Soit β une autre racine de $P(X)$. On a a priori $\beta \in \mathbb{C}$, on va démontrer que $\beta \in \mathscr{C}_b$.

D'après X.2.2. théorème 3, il existe un isomorphisme de corps σ de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur $\mathbb{Q}(\beta)$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$.

D'après X.2.3. théorème 2, l'isomorphisme σ, que l'on peut considérer comme un isomorphisme de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathscr{C}_b$ [1] se prolonge en un isomorphisme $\overline{\sigma}$ de $\mathscr{C}_b$ dans $\mathbb{C}$. Considérons alors l'ensemble $\overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b) = \{x \in \mathscr{C}_b \ / \ \overline{\sigma}(x) \in \mathscr{C}_b\}$. On a $\overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b) \subset \mathscr{C}_b$; il est facile de démontrer que $\overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b)$ est un corps, c'est même un corps pythagoricien. En effet, si u et v sont dans $\overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b)$, posons $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, on a

$$\overline{\sigma}(w^2) = \overline{\sigma}(w)^2 = \overline{\sigma}(u)^2 + \overline{\sigma}(v)^2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\sigma}(w) = \pm\sqrt{\overline{\sigma}(u)^2 + \overline{\sigma}(v)^2}.$$

Comme $\overline{\sigma}(u)$ et $\overline{\sigma}(v)$ sont dans $\mathscr{C}_b$ qui est pythagoricien, on a $\overline{\sigma}(w) \in \mathscr{C}_b$ et ainsi $w \in \overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b)$.

Comme $\overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b) \subset \mathscr{C}_b$ et que $\mathscr{C}_b$ est le plus petit sous-corps pythagoricien de $\mathbb{R}$, on a $\overline{\sigma}^{-1}(\mathscr{C}_b) = \mathscr{C}_b$.

Il en résulte que $\beta = \sigma(\alpha) = \overline{\sigma}(\alpha) \in \mathscr{C}_b$.

1. mal lisible.

Théorème 1. *Les corps $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_b$ sont distincts.*

La proposition précédente nous permet facilement de mettre en évidence des éléments de $\mathscr{C}$ qui ne sont pas dans $\mathscr{C}_b$.

Par exemple si $\alpha = \sqrt[4]{2}$, on sait que $\alpha \in \mathscr{C}$. Il est facile de voir que le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ est $X^4 - 2$ (voir les critères d'irréductibilité en X.1.3.).

Les racines dans $\mathbb{C}$ de ce polynôme sont $\pm\sqrt[4]{2}$ et $\pm i\sqrt[4]{2}$, ces racines, qui ne sont pas toutes réelles, ne peuvent pas être toutes dans $\mathscr{C}_b$; la proposition précédente permet alors de dire que $\alpha = \sqrt[4]{2} \notin \mathscr{C}_b$.

Il est bien sûr facile de donner d'autres exemples : $\sqrt[4]{3}, \sqrt{\sqrt{2}-1}$, etc.