Sur le fondement logique des mathématiques
Henri Cartan

Notre but est de montrer comment la logique peut servir de base à tout l'édifice des mathématiques, contrairement à l'opinion des intuitionnistes. Qu'il soit bien entendu, dès le début, que nous nous plaçons ici uniquement au point de vue du mathématicien qui désire savoir si les fondements de sa science sont assurés et cherche à prendre une conscience exacte de la nature et de la portée des démarches qu'il accomplit lorsqu'il fait des mathématiques. Nous laisserons donc de côté les problèmes de logistique, ne mentionnant que les définitions et résultats essentiels à l'intelligence du sujet.

La tendance évidente du dernier demi-siècle a été de ramener peu à peu toutes les théories mathématiques à reposer, en définitive, sur la théorie des ensembles. Signalons, par exemple, que la théorie des entiers naturels, si intuitive et considérée longtemps comme le point de départ nécessaire de toute théorie mathématique, peut aujourd'hui être traitée comme un chapitre de la théorie des ensembles ; dans cette manière de faire, la notion de *fini* ou d'*infini* n'est plus admise a priori, elle est au contraire définie à partir des notions générales de la théorie des ensembles [1] (la première tentative dans ce sens remonte à DEDEKIND). Cette tendance à tout ramener à la théorie des ensembles, cet effort vers la recherche d'une base première, d'un point de départ assuré, ne sont-ils pas voués à l'échec ? Ne faudra-t-il pas indéfiniment remonter de principe en principe sans jamais trouver un commencement ? Nous nous proposons de montrer ici qu'il y a un commencement, ou plus exactement un point où commence la mathématique, dont la nature et les méthodes se trouveront clairement posées.

Cela peut étonner au premier abord. Il faudrait avant tout, semble-t-il, définir clairement de quoi l'on parle et notamment donner une définition précise de la notion d'"ensemble". Or il est évident que toutes les tentatives dans ce sens ont échoué. Nous lisons dans l'excellent livre de SIERPINSKI [2] "Chacun sait ce que c'est qu'un ensemble d'objets quelconques par exemple, l'ensemble de toutes les personnes qui se trouvent dans cette chambre ; l'ensemble des livres qui appartiennent à une bibliothèque donnée ; l'ensemble des lettres de l'alphabet français, l'ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des points du plan, l'ensemble des équations algébriques, etc... on pourrait aussi considérer des ensembles d'ensembles." II est clair que cela n'est pas une définition au sens habituel du terme ; c'est un peu comme si l'on disait : 1, 2, 3 sont, comme chacun sait, des entiers naturels : il y en a d'autres ; et maintenant, nous allons raisonner sur les entiers en général. Sur quoi pourra se fonder un raisonnement, faute de définition ? Il est vrai que, selon É. BOREL, il suffit, pour pouvoir raisonner sur les ensembles, d'avoir l'*idée* de ce qu'ils sont, idée qu'on acquiert sur des *exemples*. Mais, dans ces conditions, quels sont les critériums objectifs qui permettront de distinguer un raisonnement correct d'un raisonnement incorrect ? Au fond, l'attitude de É. BOREL signifie que l'on a renoncé à donner une véritable définition ; c'est qu'en effet, les définitions données antérieurement (et dont la plus ancienne est celle de CANTOR [3] lui-même) s'avérèrent décevantes,

Transcription en LaTeX: Denise Vella-Chemla, avril 2025

[1](1) Un ensemble E est *fini* s'il appartient nécessairement à chaque famille non vide F de sous-ensembles jouissant de la propriété suivante : si un sous-ensemble A appartient à F, il existe un sous ensemble B≠A qui contient A et appartient à F.

[2]*Leçons sur les nombres transfinis* (Collection Borel, Gauthier Villars, Paris, 1998).

[3]Selon CANTOR, un ensemble, c'est la conception comme un tout, d'objets bien déterminés et distinguables les

étant souvent de nature philosophique, et d'un intérêt nul pour l'*usage mathématique* que l'on veut faire de la notion d'ensemble.

Or le mathématicien n'a pas besoin d'une définition métaphysique ; il lui faut seulement connaître les *règles* précises auxquelles se trouve soumis l'*usage* qu'il doit faire de la notion d'ensemble. Soit ! Mais qui décidera de ces règles ? En fait, les mathématiciens qui les premiers raisonnèrent sur les ensembles, obéirent intuitivement à des règles non formulées, se laissant plus ou moins guider par l'intuition des ensembles finis, tout en raisonnant sur des ensembles infinis. Et tout alla fort bien jusqu'au jour où apparurent des paradoxes, tel celui qui découle de la considération de l'*ensemble de tous les ensembles.* Une fois les paradoxes rencontrés, on se mit en devoir de les expliquer ; mais les explications furent variées. Pour les uns, il fallait renoncer définitivement à la conquête géniale de CANTOR et n'admettre en mathématiques que des ensembles *finis* (attitude à laquelle on attache le nom de KRONECKER). D'autres, moins absolus, ne renonçaient pas à l' infini actuel, mais reconnaissaient la nécessité de *règles* fixes et bien établies, de restrictions qui permettraient d'éviter les contradictions ; mais, là encore, des tendances très diverses se faisaient jour : celle de ZERMELO (construction axiomatique), celle de RUSSELL (hiérarchie des types), celle, beaucoup moins saisissable, de POINCARÉ. D'autres, enfin, tel É. BOREL, pensaient que pour éviter les paradoxes, il suffisait d'avoir une *notion claire* des êtres sur lesquels on raisonne : tout être dont on ne possède pas une notion claire n'a pas d'existence mathématique pour BOREL. En somme, sans rejeter à priori l'infini actuel, BOREL semble vouloir classer les notions mathématiques en deux catégories : celles qui sont claires et celles qui ne le sont pas ; mais il n'indique, bien entendu, aucun principe pour effectuer cette classification. Sans discuter davantage ici cette attitude, d'ailleurs très nuancée, remarquons que plus tard, BOREL lui-même, parlant des raisonnements que l'on fait sur des êtres qui ne lui paraissent pas clairement définis (il s'agit des nombres transfinis), reconnaît ceci : "Si ces raisonnements étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Nous croyons qu'on serait ainsi trop sévère [4]..." Et ailleurs : "De tels raisonnements, en tant que raisonnements généraux, sont légitimes du moment qu'ils sont *exempts de contradiction*, mais ils sont en même temps vides de tout contenu précis." [5] Cette dernière affirmation est discutable, mais l'essentiel, à notre avis, est que la valeur, même relative, des raisonnements généraux soit admise. Il est vrai que, toujours selon É. BOREL, "cette valeur est purement verbale", l'édifice construit étant sans rapport avec la *réalité* ; la "réalité" désigne ici les mathématiques classiques.

Pour notre part, nous pensons que les théories mathématiques qui ont une réalité sont tout simplement celles qu'on a suffisamment l'habitude de manipuler ; et que ce caractère de réalité est purement subjectif. À l'appui de cette opinion, citons encore É. BOREL : "Tous ceux qui ont étudié l'infini ont cherché à en faire une réalité, et certains d'entre eux, peut-être, ont considéré cette réalité comme allant de soi d'une manière si naturelle qu'ils n'ont même pas cru qu'ils procédaient par la méthode axiomatique". Ainsi, M. JOURDAIN faisait de la prose.

Parlons maintenant de cette *méthode axiomatique* dont tous les mathématiciens font un usage plus

---

uns des autres, que ce soit des objets de l'expérience ou des objets de notre pensée ; ces objets s'appellent les éléments de l'ensemble.

[4] *Leçons sur la théorie des fonctions* (Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 19th, a' édition), p. 159.

[5] *Ibid.*, p. 161.

ou moins conscient, au dire même de ceux qui se refusent à en faire le fondement de toute science mathématique. À vrai dire, il s'agit d'une chose si connue depuis les travaux de HILBERT sur les fondements de la géométrie, qu'il pourrait sembler superflu de donner des explications. Nous le ferons pourtant sur un exemple, en rappelant brièvement en quoi consiste la théorie axiomatique des ensembles, due à ZERMELO. Disons, tout de suite, pour éviter tout malentendu, qu'il ne s'agit pas ici de discuter le fameux "axiome de choix" ou "axiome de ZERMELO" : cet axiome n'est que l'une des pièces d'une construction destinée à englober la mathématique classique aussi bien que la mathématique "zermeliste".

Dans la théorie de ZERMELO (1906), qui a été souvent mal comprise des contemporains, le mot *ensemble* est vidé de tout contenu intuitif ; il est inutile de savoir ce qui est désigné par ce mot (tout comme chez HILBERT, il était inutile de savoir ce que signifiaient les mots "point", "droite", en géométrie). Il y a des êtres qui portent le nom d'ensembles, et on pose, a priori, certaines relations entre ces êtres ; autrement dit, on impose à la collection d'objets appelés ensembles certaines conditions qu'on choisira de telle manière qu'elles ne soient pas contradictoires. Tout d'abord, ZERMELO admet la *relation d'égalité* $a = b$ (il pose comme intuitive la notion d'objets identiques ou d'objets différents), et la *relation d'appartenance* $a \in b$, qui se lit a appartient à b, ou a est élément de l'ensemble b ; les négations de ces relations se notent $a \neq b$ et $a \notin b$ respectivement. Naturellement, ZERMELO admet que si $a = b$ et $a \in c$, alors $b \in c$. Voici alors en quoi consistent les axiomes de la théorie [6] :

Axiome 1. Si deux ensembles ont mêmes éléments, ils sont égaux. À titre de commentaire, convenons de dire que a est *sous-ensemble* (ou *partie*) de b si tout c tel que $c \in a$ est tel que $c \in b$; on dit encore que a est contenu dans b, et on écrit $a \subset b$. Alors, si $a \subset b$ et $b \subset a$, a et b sont égaux.

Axiome 2. Il y a (dans notre collection) un "ensemble *vide*", c'est-à-dire un objet a tel que $b \notin a$ pour tout b. Un tel objet est d'ailleurs *unique*, d'après l'axiome 1. On admet, en outre : a désignant un objet quelconque de la collection, il y a dans la collection un objet b tel que a, et a seulement, soit élément de b ; cet objet b, nécessairement unique, se note $\{a\}$ et se nomme "l'ensemble à un élément a". Enfin, on admet que si a et b désignent deux objets, il y a un ensemble auquel appartiennent a et b et auquel n'appartient aucun autre objet ; c'est l'ensemble $\{a, b\}$ formé des deux éléments a et b.

Axiome 3. a désignant un ensemble (c'est-à-dire un objet de notre collection), chaque *propriété* des éléments de a définit un sous-ensemble ou partie de a. Cet axiome permet, par exemple, de définir le *complémentaire* d'un ensemble a (dans un ensemble b qui contient a), la *réunion* de deux ensembles, l'*intersection* de deux ensembles. À titre de commentaire, disons que le mot *propriété* est bien vague par lui-même : ZERMELO précise qu'il s'agit d'une chose dont l'exactitude ou l'inexactitude peut être décidée, comme conséquence logique des axiomes, pour *chaque* élément de l'ensemble envisagé. FRÄENKEL a précisé davantage encore, donnant pour ainsi dire une définition constructive des propriétés envisagées en mathématique. De toute manière, il subsiste là une difficulté sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Axiome 4. a désignant un ensemble, il y a un ensemble b dont les éléments sont précisément les

[6] Nous tenons compte, en partie, des modifications apportées par FRÄENKEL. Voir : *Einleitung in die Mengenlehre*, 3° édit., 1938 (Grundlehren. der Math. Wiss., t. IX, Springer, Berlin), chap. V.

sous-ensembles de a (axiome de l'"ensemble des parties").

Axiome 5. a étant un ensemble, il y a un ensemble b dont les éléments sont ceux qui appartiennent à l'un au moins des c tels que $c \in a$ (axiome de la "réunion" générale).

Zermelo peut alors *démontrer* qu'il n'y a pas d'ensemble a tel que tout objet (de la collection) appartienne à a : plus exactement, l'existence d'un tel ensemble a est *contradictoire* avec les axiomes précédents, car si a est un tel ensemble, la relation $x \notin x$ définit une propriété des éléments de a, donc une partie b de a, et on ne peut avoir, ni $b \in b$, ni $b \notin b$.

Zermelo postule encore un axiome qui assure l'existence d'ensembles infinis :

Axiome 6. Il y a un a tel que l'ensemble vide $\varnothing$ appartienne à a et tel, en outre, que chaque fois que $b \in a$ on ait aussi $\{b\} \in a$. Et il prouve alors que parmi de tels ensembles a, il en est un, contenu dans tous les autres, c'est l'ensemble formé des éléments $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, ...$ [on peut assimiler cet ensemble à la suite des entiers naturels].

Un dernier axiome serait le fameux axiome de choix, sur lequel nous n'insisterons pas ici.

On peut, bien entendu, discuter sur le choix des axiomes. Zermelo les a choisis de manière à permettre, avec le minimum d'hypothèses, de reconstruire toute la théorie des ensembles [7] et, partant, toute la mathématique. Zermelo a traité lui-même, à titre d'exemple, la théorie de la *puissance des ensembles.*

Si la tentative de Zermelo marque dans l'histoire des fondements des mathématiques une étape décisive. elle n'est pas à l'abri de toute critique. En effet, la théorie de Zermelo n'arrive pas à se débarrasser entièrement de la notion concrète de "collection" d'objets : par suite, il est impossible, dans cette théorie, de donner un sens précis aux notions intuitives de "propriété bien définie", "élément bien déterminé". Et on n'y précise pas le sens qu'il faut attribuer à une phrase telle que celle-ci : "*il existe* un objet a qui jouit de telle ou telle propriété". Or, dès qu'on fait des mathématiques, on est conduit à affirmer de telles "existences" et, par suite, à préciser quel sens on donne à une telle affirmation.

Sur ces questions d'élément bien déterminé et d'existence, suivons un instant H. Lebesgue, ce qui nous aidera à préciser le genre de difficultés que l'on rencontre. Lebesgue n'admet, en mathématiques (et il paraît difficile de n'être pas de son avis), que des êtres *bien définis*, un être étant bien défini lorsqu'on a, dit-il. nommé une propriété *qui le caractérise* (sans doute s'agit-il d'une propriété bien définie, elle aussi ?). Malheureusement, cette définition peut être illusoire *dans la pratique* et ne pas donner, pour un nombre réel, par exemple, de procédé de calcul (au sens de Kronecker) ; toujours suivant Lebesgue, la quantité

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\cos(m!\,\pi C)^{2n}\right]$$

[7]En fait, le système de Zermelo n'est pas très pratique ; il est utile de le compléter par d'autres axiomes (par exemple, l'axiome de l'ensemble-produit de deux ensembles donnés), et on peut, d'autre part, se passer de l'axiome 5. C'est affaire de technique, dans le détail de laquelle nous n'entrons pas ici.

est un nombre réel bien défini, lorsque C désigne un nombre réel bien défini, par exemple, la constante d'EULER. Or cette quantité est égale à 0 si C est irrationnel, à 1 si C est rationnel ; et l'on ignore encore aujourd'hui si la constante d'EULER est rationnelle ou irrationnelle. Lorsque C est la constante d'EULER, On obtient donc un nombre bien défini, mais dont nous ne savons pas s'il est égal à 0 ou à 1. LEBESGUE pense que cela ne change rien au fond de l'affaire et que seule l'insuffisance de nos moyens actuels d'investigation est responsable de notre incertitude. Nous reviendrons sur la question. Contentons-nous de tirer, dès maintenant, une leçon de cet exemple de LEBESGUE : la caractérisation qu'il exige n'est pas une caractérisation d'ordre pratique, mais d'ordre *purement logique*. Grave est aussi la question de l'*existence*. Pour LEBESGUE, on ne prouve l'existence d'objets jouissant d'une propriété que le jour où l'on a *défini* (au sens ci-dessus) au moins un tel objet. Tel n'est pas le point de vue d'HADAMARD, qui pense, avec beaucoup d'autres, que l'existence d'une catégorie d'êtres est une chose qui peut, dans certains cas, être *logiquement démontrée*, sans qu'il soit nécessaire pour cela de pouvoir nommer individuellement un être de cette catégorie. L'existence, selon HADAMARD, relève donc uniquement du fonctionnement du raisonnement logique, sans l'appui d'un secours “matériel”, pourrait-on dire. Ces points de vue opposés sont inconciliables, et pour décider laquelle des deux positions est préférable, il n'y a, selon nous, qu'un critère : quelle est la plus favorable au développement des mathématiques ? Or il semble bien que ce soit celle d'HADAMARD, car celle de LEBESGUE conduit à des difficultés inextricables et des *distinguo* sans fin. Rappelons, d'ailleurs, que les polémiques au sujet de l'“existence” en mathématiques ont été soulevées par la formulation de l'*axiome du choix* de ZERMELO. Bornons-nous, à titre d'exemple, à un cas particulier : l'*existence* d'une fonction qui, à chaque ensemble non vide A de nombres réels, fait correspondre un élément de A, existence posée par ZERMELO comme axiome, est rejetée par LEBESGUE, pour la raison qu'il n'a jamais vu *définir* une telle fonction.

De toutes ces observations, retenons une objection contre la construction de ZERMELO en général : ZERMELO est obligé d'admettre que, dans sa collection, il y a précisément des êtres qui ne peuvent être nommés explicitement. Et cette objection semble assez grave, étant donné qu'au départ il avait posé la notion de collection d'objets individuellement bien déterminés.

Mais il y a d'autres difficultés qui, du reste, ne sont pas propres à la théorie de ZERMELO. Nous avons déjà, signalé que, même pour des êtres que l'on doit considérer comme bien définis, il est des propriétés dont nous ne savons pas décider si elles sont vraies ou fausses. L'*hypothèse du continu* concerne, par exemple, une propriété de l'ensemble des nombres réels, ensemble que nous considérons comme mathématiquement déterminé : il s'agit de savoir si cet ensemble possède des sous-ensembles non dénombrables qui n'aient pas même puissance que lui-même. Devons-nous penser qu'à défaut des hommes, Dieu le sait, ou, tout simplement, que la détermination mathématique de l'ensemble des nombres réels n'est qu'une illusion ? Même sans aller chercher si loin, nous trouvons dans la vieille mathématique classique (celle des nombres entiers, des fonctions analytiques) des difficultés analogues : y a-t-il plus de 5 entiers naturels n tels que $2^n + 1$ soit premier ? Le théorème de FERMAT est-il vrai ? On peut se demander si l'absence de solution pour ces problèmes est due seulement au manque d'ingéniosité des mathématiciens (ce que semblerait croire HILBERT, pour qui tout problème mathématique a, dans l'absolu, une solution positive ou négative), ou si, au contraire, ils sont foncièrement insolubles.

Mais à partir du moment où l'on admet qu'il peut y avoir en mathématique des propositions qui ne sont *ni vraies, ni fausses*, le raisonnement mathématique se trouve lui-même mis en cause, selon Brouwer : car. au cours des raisonnements mathématiques, on admet souvent qu'une proposition donnée, quelle qu'elle soit, doit être ou vraie ou fausse ; donc, s'il n'en est plus ainsi, la logique même se trouve sapée : on n'a plus, par exemple, le droit de "raisonner par l'absurde". Telle est la conclusion à laquelle se rangent Brouwer et son école la logique classique, celle du tiers exclu, n'est pas applicable à la mathématique ; cette dernière est à rebâtir entièrement sur de nouveaux principes, après quoi, la logique se refera en fonction des mathématiques, comme elle pourra.

Dieu merci, la plupart des mathématiciens n'ont pas voulu se résigner à admettre que l'œuvre de tant de générations se trouvât, du jour au lendemain, dépour vue de toute valeur. Et en effet, cette œuvre est parfaitement légitime, on peut lui donner une assise solide, et cette assise gît précisément dans la logique classique (celle du tiers exclu), contrairement à l'opinion de Brouwer. Comment ? C'est ce que nous allons montrer maintenant. Pour cela, il nous faudra rappeler, tout d'abord, en quoi consistent les règles de la logique. Le raisonnement par l'absurde n'est qu'une règle comme une autre, et la manière dont il est présenté habituellement [8] n'est qu'une simple "façon de parler" qui n'implique pas du tout que les propositions auxquelles on l'appliquera soient nécessairement ou vraies ou fausses. Nous reviendrons plus loin sur cette question du "tiers non exclu", qui est un *fait mathématique*, parfaitement compatible avec la logique classique et, en particulier, avec le raisonnement par l'absurde.

Commençons par rappeler en quoi consiste cette logique dont il est si souvent question.

Le calcul logique, ou logistique, auquel resteront attachés les noms de Peano, Russell, Whitehead, Herbrand, se compose de deux branches distinctes : le calcul logique de première espèce (que l'on peut faire remonter à Aristote), et le calcul de deuxième espèce (celui, plus subtil, où interviennent les locutions "quel que soit" et "il existe", et qui est approprié aux mathématiques).

Voici, brièvement, en quoi consiste le *calcul logique de première espèce* (on peut l'exposer de bien des manières ; nous choisissons la plus rapide). Donnons-nous explicitement certains symboles : a, b, c, d, e, déclarons que chacun d'eux est une *proposition*. Puis, déclarons que "a *et* b" est une nouvelle proposition ; de même, "a *ou* b" ; de même, "*non* a" que nous noterons $\neg a$. D'une manière générale, si α et β sont des propositions déjà écrites, "α *et* β", "α *ou* β", "$\neg a$" sont de nouvelles propositions. On définit ainsi, d'une manière constructive, ce qu'il faut entendre par *proposition formée à l'aide des propositions élémentaires a, b, c, d, e.* Ce n'est, en somme, qu'un procédé d'écriture. Introduisons encore la notation la proposition "$\alpha \to \beta$" pour désigner la proposition "$\neg\alpha$ *ou* β", et la notation "$\alpha \leftrightarrows \beta$" pour désigner la proposition "$(\alpha \to \beta)$ *et* $(\beta \to \alpha)$".

Cela posé, donner une *valeur logique* à une proposition, c'est écrire, en regard de cette proposition, le mot "vrai" ou le mot "faux". Convenons, ayant attribué arbitrairement une valeur logique à chacune des propositions élémentaires a, b, c, d, e, d'en déduire une valeur logique pour toute proposition formée à l'aide de celles-là ; et cela par la règle suivante :

[8] A étant une proposition vraie, on veut prouver qu'une proposition B est vraie, sachant que sa négation entraîne la négation de A ; et l'on dit : "B est vraie, sinon B serait fausse, et alors A serait fausse, contrairement à l'hypothèse". Encore une fois, ce n'est qu'une façon de présenter, d'une manière imagée et quasi concrète, une règle de raisonnement abstraite (voir, plus loin, ce qui concerne les règles du raisonnement).

$$\text{“}\alpha \textit{ et } \beta'' \textit{ est vraie si } \alpha \textit{ est vraie et } \beta \textit{ est vraie, et dans ce cas seulement ;}$$

$$\text{“}\alpha \textit{ ou } \beta'' \textit{ est fausse si } \alpha \textit{ est fausse et } \beta \textit{ est fausse, et dans ce cas seulement ;}$$

$$\neg\alpha \textit{ est vraie si } \alpha \textit{ est fausse, fausse si } \alpha \textit{ est vraie.}$$

On dit qu'une proposition (formée à l'aide de propositions élémentaires) est une *identité logique* (de première espèce) si elle possède la valeur logique vrai quelles que soient les valeurs logiques attribuées aux propositions élémentaires. On constate facilement les faits suivants : dire que "$\alpha \rightarrow \beta$" est une identité logique, c'est dire que, chaque fois que α a la valeur logique "vrai", il en est de même de β ; on dit alors que "α entraîne β". Dire que "$\alpha \leftrightarrows \beta$" est une identité logique, c'est dire que α et β ont toujours la même valeur logique (quelles que soient les valeurs logiques attribuées aux propositions élémentaires) : on dit alors que "α et β sont équivalentes". Par exemple, "α *et* β" est une proposition équivalente à la négation de "$\neg\alpha$ *ou* β" ; la négation de $\neg\alpha$ est équivalente à α , etc... On peut, si l'on veut. dresser un tableau des principales identités logiques ; la règle du syllogisme en fait partie : si α entraîne β, et si α est vraie, alors β est vraie.

Passons au *calcul logique de deuxième espèce.* Donnons nous explicitement certains symboles A, B, C. appelés *relations*, chacun d'eux étant affecté d'une ou plusieurs cases dans lesquelles on écrit des lettres x, y, z.... appelées variables : par exemple, $\mathrm{A}(x, y, z)$ est une relation à trois variables. Une même relation A en définit en réalité d'autres ; par exemple, $\mathrm{A}(x, y, z)$ est une relation aux variables x, y, z ; $\mathrm{A}(x, z, t)$, une relation aux variables x, z, t ; $\mathrm{A}(x, x, z)$, une relation aux variables x, z ; etc... Pour fabriquer de nouvelles relations à partir des relations précédentes (dites relations élémentaires), on se sert des procédés exposés lors du calcul de première espèce pour la fabrication des propositions (par exemple, si R et S sont deux relations à 3 variables, "$\mathrm{R}(x, y, z)$ *et* $\mathrm{S}(x, z, t)$" sera une relation à 4 variables), et, en outre, des deux procédés nouveaux que voici : "quel que soit x, $\mathrm{R}(x, y, z)$" est une nouvelle relation à deux variables y, z [dans laquelle x prend le nom de *variable liée* ; on ne fait pas de distinction entre cette relation et la relation "quel que soit t, $\mathrm{R}(t, y, z)$"] ; pour désigner cette relation. on emploie l'écriture abrégée :

$$(x)\mathrm{R}(x, y, z);$$

d'autre part "il existe x tel que $\mathrm{R}(x, y, z)$" est une nouvelle relation à deux variables y, z (sur laquelle on peut faire des remarques analogues), qui s'écrit :

$$(Ex)\mathrm{R}(x, y, z);$$

dans ces nouvelles relations, les variables y, z prennent parfois le nom de *variables libres*, par opposition aux variables liées.

Tous les procédés de formation qui viennent d'être dits, appliqués à une ou plusieurs relations déjà formées, conduisent à de nouvelles relations ; et ainsi se trouve défini, par constructions successives, ce qu'il faut entendre par *relation construite à partir de relations élémentaires.* Une relation qui ne contient qu'une variable libre s'appelle aussi une *propriété* ; une relation sans variable libre, une *proposition.*

Pour le moment, il n'est pas question d'attribuer une valeur logique aux relations ; mais on peut définir ce qu'on entend par *identité logique.* Ici encore on se borne à une définition constructive on indique des procédés qui permettent, soit de fabriquer des identités logiques, soit, en partant d'identités logiques déjà obtenues, d'en déduire d'autres. Ces procédés ne sont autres que les *règles du raisonnement.* Il y a plusieurs systèmes de règles possibles, tous équivalents (cela signifie que ce sont les mêmes relations qui sont des identités logiques dans les divers systèmes). En voici un, à titre d'exemple :

1ère Règle. Si, dans une identité logique de première espèce, on remplace les lettres a, b, c, par des *relations élémentaires*, on obtient une identité logique (de deuxième espèce).

2ème Règle. Si, dans une identité logique, on remplace $\neg((x)\mathrm{R}(x,y,z))$ par $(Ex)\neg\mathrm{R}(x,y,z)$ ou vice versa - ou si l'on remplace $\neg(Ex)\mathrm{R}(x,y,z)$ par $(x)\neg\mathrm{R}(x,y,z)$ ou vice versa - ou si l'on remplace $(x)\mathrm{R}(x,y,z)$ *ou* $\mathrm{S}(y,z)$ par $(x)[\mathrm{R}(x,y,z)$ *ou* $\mathrm{S}(y,z)$ ou vice versa, - ou si l'on remplace $(Ex)\mathrm{R}(x,y,z)$ *ou* $\mathrm{S}(y,z)$ par $(Ex)[\mathrm{R}(x,y,z)$ *ou* $\mathrm{S}(y,z)]$ ou vice versa, on obtient encore une identité logique.

3ème Règle. Si, dans une identité logique, on remplace (P *ou* P) par P, on obtient encore une identité logique (P désignant ici une relation quelconque).

4ème Règle. Si $\mathrm{R}(x,y,z)$ est une identité logique (x, y, z étant des variables *libres*), (x) $\mathrm{R}(x,y,z)$ est aussi une identité logique (aux variables libres y, z).

5ème Règle. Si $\mathrm{R}(x,y,z)$ est une relation (aux variables libres x, y, z) telle que $\mathrm{R}(x,x,z)$ soit une identité logique, $(\mathrm{E}y)$ $\mathrm{R}(x,y,z)$ est une identité logique.

Une fois ces règles posées, on peut démontrer [9] que d'autres règles en découlent. Notamment si, dans une identité logique de première espèce, on remplace les propositions élémentaires par des relations quelconques [dont le schéma de formation peut faire intervenir "quel que soit" et "il existe", on obtient une identité logique de deuxième espèce. Ainsi, R désignant une relation quelconque, "R *ou* ¬R" est toujours une identité logique. On peut prouver, d'autre part, que "R *et* ¬R" n'est jamais une identité logique ; c'est là un fait fondamental. Notons encore qu'on dit que R *entraîne* S, si la relation "R → S" est une identité logique ; que R et S sont *équivalentes*, si la relation "R ⇆ S" est une identité logique.

Dans une théorie, on part de certaines relations élémentaires A, B, C, et l'on convient de poser comme vraies certaines relations R_1, R_2, R_3, formées à partir de A, B, C. Les relations R_1, R_2, R_3 prennent le nom d'axiomes de la théorie [10]. On dit qu'une relation S est *vraie*, ou encore que c'est une conséquence des axiomes, si "R_1 *et* R_2 *et* R_3" entraîne S. On dit que S est *fausse*, si "R_1 *et* R_2 *et* R_3" entraîne ¬S, c'est-à-dire si S est vraie. Dans une telle théorie, on dit que "S entraîne T", si la relation "S→ T" est vraie ; que S et T sont équivalentes, si "S⇆ T" est vraie.

[9] Il ne s'agit pas de démonstrations mathématiques (ces dernières ne pouvant qu'utiliser une logique censée déjà fonctionner), mais de démonstrations de logistique. Voir, par exemple, la Thèse de HERBRAND.

[10] Nous nous bornons, pour simplifier l'exposé, au cas où il n'y a qu'un nombre fini d'axiomes, effectivement explicités ; nous n'ignorons pas que tel n'est pas le cas de la théorie des ensembles (voir plus loin) ; mais la difficulté peut être levée.

On prouve que : si S est vraie et si S entraîne T, T est vraie (règle du syllogisme). Tels sont les principes des "démonstrations". Remarquons encore que, pour qu'une relation $S(x, y)$ soit vraie, il faut et il suffit que la proposition $(x)(y)$ $S(x, y)$ soit vraie de sorte qu'on peut se borner à étudier la vérité des *propositions* (c'est-à-dire des relations sans variable réelle).

Une théorie est *contradictoire* si elle contient une proposition à la fois vraie et fausse ; et alors toutes les propositions sont à la fois vraies et fausses. Il y a des théories non contradictoires (par exemple, une théorie sans axiomes). Dans une théorie non contradictoire, les propositions se partagent en trois catégories : les propositions vraies, les propositions fausses et, éventuellement, celles qui ne sont *ni vraies, ni fausses*, et que nous appellerons *douteuses* (dont l'existence ne peut être exclue, a priori) : ces trois catégories n'empiètent pas mutuellement.

Le problème de décider si une proposition donnée est *vraie* dans une théorie se ramène à celui-ci [11] : une relation donnée est-elle une identité logique ? De même pour le problème de décider si une théorie est ou n'est pas contradictoire. Ces problèmes se ramènent donc, en définitive, à l'*Entscheidungsproblem*, qui consiste à trouver une méthode générale permettant de décider si une relation, explicitement donnée, est ou n'est pas une identité logique. Ce problème n'est résolu que dans des cas particuliers. De sorte que, jusqu'à nouvel ordre, le partage en trois catégories dont nous venons de parler (propositions vraies, propositions fausses, propositions douteuses) est tout idéal dans une théorie dont on saurait qu'elle n'est pas contradictoire, il y a des propositions dont on a prouvé qu'elles sont vraies, d'autres dont on a prouvé qu'elles sont fausses (les négations des précédentes), d'autres dont on ignore à la fois si elles sont vraies ou si elles sont fausses. Et encore, généralement, ne saura-t-on même pas prouver qu'une théorie donnée n'est pas contradictoire.

Mais ces problèmes, si importants qu'ils soient, sont en dehors de notre sujet. Ce qui nous intéresse, c'est la construction d'une *théorie mathématique* à partir du calcul logique qui vient d'être exposé. Or, jusqu'à présent, la machine fabriquée semble tourner à vide : les variables qui figurent dans les relations sont des lettres dépourvues de toute signification concrète. II va falloir leur en donner une, substituer aux variables abstraites des êtres concrets entre lesquels existeront certaines relations. Effectivement, on a cru longtemps qu'il y avait, en mathématique, des êtres préexistants auxquels venaient s'appliquer les calculs de la logique, mais situés eux-mêmes en dehors de la logique, à laquelle ils seraient irréductibles ; et il semble bien que cela ait été l'opinion de Hilbert lui-même. Or nous allons montrer, à la suite de J. Dieudonné [12], que cette croyance doit être abandonnée : une théorie mathématique n'est pas autre chose qu'une théorie logique, déterminée par un système d'axiomes [c'est-à-dire de relations construites à partir des relations élémentaires, et posées comme vraies] : les êtres de la théorie sont définis *ipso facto* par le système d'axiomes, qui engendre en quelque sorte le matériel auquel vont pouvoir s'appliquer les propositions vraies : définir ces êtres, les nommer, leur "appliquer" les propositions et relations, c'est en cela que consiste la partie pro-

[11] Dans le cas d'une théorie à un nombre indéfini d'axiomes, c'est plus compliqué.

[12] Les idées de Dieudonné remontent à 1938, mais il n'en avait pas exposé le détail dans sa conférence de 1939 qui était conçue pour des non spécialistes (voir *La revue scientifique*, 77, 1959, 224-232). Nous avons retrouvé indépendamment les idées de Dieudonné sur la question des "éléments explicites", et nous ajoutons que J. Dieudonné et nous-même ignorons si d'autres les ont développées avant nous. Au fond, il s'agit seulement de mettre en lumière ce que font tous les mathématiciens, consciemment ou inconsciemment ; un élément explicite n'est pas autre chose que la propriété qui le définit, et, dans toutes les relations où figure un tel élément, on peut le remplacer par sa "définition".

prement mathématique de la théorie logique.

Nous allons le montrer en traitant un exemple : faisons voir comment la *théorie des ensembles* peut s'édifier sur une théorie de logique pure ; toute la mathématique se trouvera alors, en fait, fondée sur la logique seule. Dans ce but, reprenons le système de ZERMELO-FRÄENKEL exposé plus haut, mais en le vidant de tout sens concret. Il ne va plus être question d'objets d'une collection, mais seulement de lettres (variables) figurant dans des relations logiques.

Partons d'*une seule* relation élémentaire, une relation à deux variables $\mathrm{A}(x, y)$, à laquelle aucune signification concrète ne doit être attachée ; cette relation, notons-la :

$$x \in y$$

et lisons-la : "x appartient à y". À partir de cette relation unique, construisons des relations suivant les schémas expliqués tout à l'heure. Par exemple :

$$(x)(z \in x \to z \in y)$$

est une relation à deux variables (réelles) x et y, que nous noterons pour abréger :

$$x \subset y$$

(et lirons "x est contenu dans y"). La relation :

$$x \subset y \textit{ et } y \subset x$$

est une nouvelle relation à deux variables ; notons-la $x = y$ (relation d'*égalité*). Posons comme premier *axiome* de la théorie :

(I) $$(x \in z \textit{ et } x = y) \to (y \in z) \text{ est } \textit{vraie} \text{ ;}$$

cet axiome entraîne déjà une foule de relations vraies ; par exemple, soit $\mathrm{R}(x, y, z)$ une relation quelconque construite à partir de la relation $\in$; alors

$$(\mathrm{R}(x, y, z) \textit{ et } x = t) \to \mathrm{R}(t, y, z) \text{ est } \textit{vraie}$$ [13]

(conséquence de l'axiome (I)).

Cela posé, il est facile de traduire en langage logique abstrait les axiomes du système de ZERMELO :

(II) $$(Ex)(y)(y \notin x) \text{ est } \textit{vraie},$$

[13] Dans toute théorie, la relation d'*égalité* doit être, comme ici, réflexive ($x = x$ est vraie), symétrique ($x = y$ entraîne $y = x$) et transitive ("$x = y$ *et* $y = z$" entraîne $y = z$) ; en outre, pour toute relation R construite à partir des relations élémentaires, on exige que

$$\mathrm{R}(x, y, z) \textit{ et } x = t \text{ entraîne } \mathrm{R(t, y, z)}.$$

(existence de l'ensemble vide) : (II′) $(x)(y)(Ez)(t)[(t \in z) \leftrightarrows (t = x \text{ } ou \text{ } t = y)]$ est*vraie*

(existence de l'ensemble à deux éléments $\{x, y\}$. N'entrons pas dans les détails pour la formulation précise de l'axiome 3 de Zermelo (qui fait intervenir des relations arbitraires) et donnons encore simplement, à titre d'exemple, l'axiome 4 :
(IV) $(x)(Ey)(z)[(z \in y) \leftrightarrows (z \subset x)]$ est *vraie*

(axiome de l'ensemble des parties).

On pourrait ainsi écrire tous les axiomes de la théorie. Remarquons qu'on ignore encore aujourd'hui si cette théorie n'est pas contradictoire ; expérimentalement, on n'a jamais rencontré de contradiction.

Mais où sont les *êtres* mathématiques ? Nous avons parlé de l'*ensemble vide* : c'est l'élément, que nous noterons $\varnothing$, défini par la relation :

$$(Ex)(y)(y \notin x).$$

D'une manière générale : soit une relation $\mathrm{A}(x)$ à *une* variable (libre), c'est-à-dire une *propriété*, telle que :

1° La proposition :

$$(Ex)\mathrm{A}(x)$$

soit *vraie* (c'est-à-dire soit une conséquence des. axiomes).

2° La relation :

$$(\mathrm{A}(x) \text{ } et \text{ } \mathrm{A}(y)) \rightarrow (x = y)$$

soit *vraie* (on dit alors que la propriété $\mathrm{A}(x)$ est *univoque*). Dans ces conditions, nous convenons de dire que la propriété $\mathrm{A}(x)$ définit un *élément explicite* a, auquel nous donnons un nom parti-culier, caractéristique de la relation A ; cet élément, nous allons le faire figurer dans des relations quelconques, au moyen de la convention suivante : $\mathrm{R}(x, y, z)$ désignant, par exemple, une relation à trois variables libres.

$$\mathrm{R}(a, y, z)$$

est une relation à deux variables libres y et z, à savoir la relation suivante :

$$(Ex)(\mathrm{A}(x) \text{ } et \text{ } \mathrm{R}(x, y, z)).$$

relation d'ailleurs équivalente (moyennant les axiomes) à :

$$(x)(\neg\mathrm{A}(x) \text{ } ou \text{ } \mathrm{R}(x, y, z));$$

ainsi, la notation $\mathrm{R}(a, y, z)$ n'est qu'une manière abrégée (d'ailleurs très utile) d'écrire une relation où ne figurent plus que des variables.

Quant au calcul sur les relations où figurent des *éléments explicites*, il est fondé sur les règles suivantes, qui se démontrent facilement (et qu'on pourrait appeler *règles de substitution*) :

1° $\mathrm{T}(x, y, z)$ désignant la relation "$\mathrm{R}(x, y, z)$ et $\mathrm{S}(x, y, z)$", la relation $\mathrm{T}(a, y, z)$ est équivalente à "$\mathrm{R}(a, y, z)$ et $\mathrm{S}(a, y, z)$" ;

2° $\mathrm{T}(x, y, z)$ désignant la relation "$\mathrm{R}(x, y, z)$ ou $\mathrm{S}(x, y, z)$", la relation $\mathrm{T}_1(a, y, z)$ est équivalente à "$\mathrm{R}(a, y, z)$ ou $\mathrm{S}(a, y, z)$" ;

3° $\mathrm{T}_2(x, y, z)$ désignant la négation de $\mathrm{R}(x, y, z)$, la relation $\mathrm{T}_2(a, y, z)$ est équivalente à la négation de $\mathrm{R}(a, y, z)$;

4° $\mathrm{T}_3(x, y)$ désignant la relation $(z)\ \mathrm{R}(x, y, z)$, la relation $\mathrm{T}_3(a, y)$ est équivalente à $(z)\ \mathrm{R}(a, y, z)$;

5° $\mathrm{T}_4(x, y)$ désignant la relation $(\mathrm{E}z)\ \mathrm{R}(x, y, z)$, la relation $\mathrm{T}_4(a, y)$ est équivalente à $(\mathrm{E}z)\ \mathrm{R}(a, y, z)$.

On peut ainsi calculer sur les relations où figurent un ou plusieurs éléments explicites, tout comme sur celles où ne figurent que des variables. Remarquons que, d'après nos conventions, la propriété $x = a$ est équivalente à $\mathrm{A}(x)$.

De même que nous avons défini les *éléments explicites*, nous pouvons définir les *fonctions explicites*. Soit $\mathrm{F}(x, y, z)$ une relation à trois variables libres, telle que :

1° La proposition

$$(y)(z)(\mathrm{E}x)\mathrm{F}(x, y, z)$$

soit *vraie* ;

2° La relation

$$(\mathrm{F}(x, y, z) \textit{ et } \mathrm{F}(t, y, z)) \to (x = t)$$

soit *vraie* (on dit que la relation $\mathrm{F}(x, y, z)$ est *univoque* en x). Une telle relation définit, par convention, une *fonction explicite* $f(y, z)$, qu'on pourra, à son tour, substituer à une variable x dans d'autres relations, suivant des règles analogues aux règles précédentes. Nous nous dispensons d'insister. La relation

$$x = f(y, z)$$

sera alors équivalente à $\mathrm{F}(x, y, z)$. On pourra, d'autre part, substituer, sous la fonction f, des "valeurs" aux variables ; par exemple, a et b désignant des éléments explicites, $f(a, b)$ sera un élément explicite, défini par la propriété $\mathrm{F}(x, a, b)$.

Revenons à notre théorie des ensembles. L'axiome (II)' définit la *fonction* $\{x, y\}$, et la fonction $\{x\}$ égale, par définition, à $\{x, x\}$; cette dernière permet de définir les éléments $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$, etc... (qu'on peut appeler *entiers naturels*). On voit ainsi, de proche en proche, s'engendrer les êtres mathématiques (éléments et fonctions) auxquels s'applique la théorie. L'axiome 6 (de l'infini) s'écrira ainsi :

(VI) $$(Ex)[(\varnothing \in x) \textit{ et } (y)(y \in x)] \text{ est } \textit{vraie};$$

en réalité, cette écriture, où figure l'élément $\varnothing$ et la fonction $\{y\}$, n'est qu'une abréviation, justifiée par les règles exposées ci-dessus.

En fait, toute la mathématique, telle qu'elle existe aujourd'hui, peut s'exprimer dans le système que nous venons d'esquisser. En définitive, *une relation mathématique, si complexe qu'elle soit, et quels que soient les éléments et les fonctions explicites qu'elle fait intervenir, se ramène à une relation ne contenant plus que des variables, et construite* (suivant les schémas du calcul logique) *à partir de la seule relation* $\in$ (cela montre clairement, en passant, que toutes les relations mathématiques concevables forment une collection *énumérable* ; a fortiori, les *éléments explicites*, les *fonctions explicites*, dont chacun est défini par une relation comme il a été dit plus haut, forment, à eux tous, une collection énumérable (paradoxe de Skolem) ; en dehors de cette collection, il n'y a pas d'êtres *mathématiquement définissables*).

Toute proposition mathématique se ramenant ainsi à une proposition de pure logique, est *vraie*, ou *fausse*, ou *douteuse* dans la théorie. Prenons un exemple : soit a et b deux éléments explicites (par exemple, a est la constante d'Euler, b, l'ensemble des nombres rationnels) ; $a \in b$ est une proposition [signifiant, rappelons-le,

$$(\mathrm{E}x)(\mathrm{E}y)(\mathrm{A}(x) \textit{ et } \mathrm{B}(y) \textit{ et } (x \in y));$$

A et B désignent respectivement les propriétés qui définissent a et b] ; cette proposition est *vraie*, ou *fausse*, ou *douteuse*, et nous n'avons pas le droit d'exclure, a priori, la troisième éventualité, bien qu'en fait (à ma connaissance) on n'ait jamais prouvé qu'il y ait, dans le système d'axiomes de Zermelo-Fräenkel, des propositions douteuses. De même $c = \varnothing$ est une proposition qui, a priori, peut être douteuse (il s'agit de savoir si un ensemble c, *explicite*, est *vide*). On voit que le *tiers non exclu* peut se présenter, même lorsqu'il s'agit d'êtres mathématiques "bien définis" (c'est-à-dire d'*éléments explicites*). Résumons-nous : dans tous les cas, la proposition :

$$\text{“}a \in b \textit{ ou } a \notin b''$$

est *vraie*, puisque c'est une identité logique ; mais il se peut qu'aucune des propositions "$a \in b$" et "$a \notin$ b" ne soit vraie. L'erreur commise par certains mathématiciens, au sujet du fameux tiers exclu, consistait. croyons-nous, en ceci : le fait que A *ou* $\neg$A est toujours vraie (en logique classique, la seule considérée ici) leur semblait impliquer que l'une au moins des propositions A et $\neg$A est vraie ; nous venons de voir qu'il n'en est rien.

Tous les pseudo-problèmes soulevés dans la première partie de cet exposé trouvent ainsi leur solution : celui de l'"élément bien défini", celui de l'"existence", etc... Par exemple, pour l'"existence" : dire qu'il existe x tel que $\mathrm{R}(x)$ [$\mathrm{R}(x)$ désignant une propriété, construite suivant les schémas logiques à partir de la relation $\in$], c'est dire, tout simplement. que la proposition :

$$(\mathrm{E}x)\mathrm{R}(x)$$

est *vraie* dans la théorie. Cette définition n'eût pas, reconnaissons-le, donné satisfaction à Lebesgue, qui eût exigé qu'on trouvât une propriété *univoque* $\mathrm{S}(x)$, telle que "$\mathrm{S}(x) \to \mathrm{R}(x)$" et "$(Ex)\mathrm{S}(x)$" fussent *vraies*. Mais cette exigence a-t-elle elle-même un sens précis ? Que signifient *vraie* et *univoque* pour Lebesgue ? Son attitude consistant précisément à établir une distinction subtile entre les propositions logiquement vraies et les propositions “réellement vraies” (si l'on peut dire), encore faudrait-il savoir, lorsqu'on parle d'une propriété *univoque*, si elle est univoque au sens “logique” ou au sens “réel” ; et il n'y a plus moyen de s'arrêter, une fois qu'on a mis le doigt dans cet engrenage fatal. C'est pourquoi la position de LEBESGUE ne nous paraît pas soutenable.

CONCLUSION

Le but que se proposait HILBERT, assurer une fois pour toutes les fondements des mathématiques, nous semble bien atteint, si, toutefois, nous renonçons à résoudre les problèmes fondamentaux de la logique (*Entscheidungsproblem*) et si nous précisons le véritable but à atteindre : *édifier entièrement la mathématique sur la logique seule.* Laissons donc de côté les problèmes de non-contradiction, et voyons quel est le rôle du mathématicien. Va-t-il se borner à jongler abstraitement avec un système d'axiomes plus ou moins arbitraire, et dont il ignore même s'il n'est pas contradictoire ? Si vraiment il en était ainsi, on comprendrait les répugnances de POINCARÉ ou de BOREL envers la méthode axiomatique. En fait, il est indispensable de distinguer entre la mathématique en tant qu'instrument (dont nous venons d'étudier le fonctionnement) et l'étude de la nature, qui est une fin pour laquelle est forgé cet instrument. Le miracle de la science, c'est qu'on puisse édifier une mathématique abstraite, capable de s'appliquer ensuite avec efficacité aux lois de la nature. C'est guidé par les phénomènes naturels que le mathématicien, en fin de compte, choisit les axiomes qui donneront naissance à une théorie efficace.

Supposons ces axiomes choisis une bonne fois. Notre théorie mathématique ne doit pas se borner à être une morne compilation de vérités, c'est à dire de conséquences des axiomes dont on constate, pour chacune d'elles, plus ou moins péniblement l'exactitude. Pour que la mathématique soit un instrument efficace et, aussi, pour que nous, mathématiciens, puissions y prendre un véritable intérêt, ce doit être une construction vivante ; il faut voir clairement l'enchaînement des théorèmes, grouper les théories partielles. Dans cette tâche, c'est encore la méthode axiomatique qui nous vient en aide, en nous fournissant un *principe de classification*. Il n'y a pas si longtemps que les diverses branches des mathématiques étaient groupées suivant les êtres mathématiques (éléments explicites) auxquelles elles se rapportaient : arithmétique, géométrie, théorie des fonctions... De même, en zoologie ou en botanique, on classait autrefois les espèces suivant les signes extérieurs fournis par une description plus ou moins superficielle. Aujourd'hui, on tend de plus en plus à étudier les structures *algébriques*, les structures *topologiques*, les structures d'*ensemble ordonné*, etc... : l'étude d'une telle structure [14] revient, en somme, à tirer les conséquences d'une certaine propriété $\mathrm{R}(x)$, conséquences qui sont vraies, ensuite, pour tout élément explicite a tel que $\mathrm{R}(a)$ soit vraie. Une fois ces structures étudiées pour elles-mêmes, on étudie les *carrefours de structures* (étude simultanée de plusieurs structures qui satisfont à des conditions de compatibilité mutuelle) : par exemple, les nombres réels sont au carrefour des trois structures : algébrique, topologique. et d'ensemble ordonné. Ce principe contemporain de classification correspondrait, pour reprendre notre comparaison zoologique, à une classification des espèces animales suivant les

[14] N. BOURBAKI, dans son Traité (voir notamment : Théorie des ensembles, fascicule de résultats, § 8 : publié aux *Actualités scient. et industr.*, fascicule 846, Hermann, 1939), fait jouer un rôle prépondérant à la notion de *structure* dans la mathématique contemporaine. Il vient de développer ses idées dans un article de vulgarisation, à paraître prochainement dans les *Cahiers du Sud* ; nous nous permettons de condenser, dans la présente conclusion, quelques-unes des idées de N. BOURBAKI.

lois de l'évolution.

L'étude d'une structure déterminée donne l'occasion de définir un certain nombre de notions fondamentales, de créer un vocabulaire approprié qui éveille des images sensibles. Et lorsque, dans un problème, interviendra cette structure, le mathématicien trouvera à sa disposition tout un arsenal de notions, de théorèmes qui décupleront son pouvoir d'investigation : grâce au vocabulaire bien choisi, son intuition pourra se donner libre cours ; finalement, le mathématicien aura, comme le demande É. Borel, une idée claire des notions dont il s'occupe, c'est-à-dire une intuition des raisonnements qu'il doit faire.

Ainsi, non-seulement la méthode axiomatique, fondée sur la logique pure, donne une assise inébranlable à notre science, mais elle nous permet encore de la mieux organiser et de la mieux comprendre, elle la rend plus efficace, elle substitue des idées générales à des calculs qui, effectués au petit bonheur, auraient toute chance de ne mener à rien, à moins d'un génie exceptionnel.

(manuscrit reçu le 15 janvier 1942)