ANALYSE MATHÉMATIQUE. *Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale possède une coupure essentielle mobile*. Note de **M. Jean Chazy**, présentée par M. Painlevé.

Comme je l'ai montré dans des communications antérieures, l'intégrale générale de chacune des équations [1]

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2 \tag{1}$$

et

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36-n^2}(6y'-y^2)^2 \qquad (n \text{ entier } > 6), \tag{2}$$

est uniforme dans une région limitée par une coupure rectiligne ou circulaire, variable avec les constantes d'intégration. Elle peut s'exprimer comme suit.

Soient l'équation hypergéométrique de Gauss

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7t}{6}\right)\frac{dz}{dt} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{n^2}\right)z = 0 \qquad (n \text{ entier } > 6 \text{ ou } n = \infty),$$

et deux intégrales distinctes de cette équation z et z_1 ; l'équation $x = z_1(t) : z(t)$ définit une fonction de Schwarz $t(x)$ dont le triangle fondamental a comme angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}$ et qui existe dans une région limitée par une coupure rectiligne ou circulaire : l'intégrale générale de l'équation (2) ou (1) est $y(x) = \frac{6}{z}\frac{dz}{dx}$; elle est définie et uniforme dans la même région. L'équation (1) admet l'intégrale particulière

$$y = -\frac{6}{x+A} + \frac{C}{(x+A)^2} \;;$$

son intégrale générale est holomorphe dans la région dans laquelle elle est définie. L'équation (2) admet les intégrales particulières

$$y = \frac{-6}{x+A}, \qquad y = \frac{n-6}{2(x+A)} - \frac{n+6}{2(x+B)} \;;$$

son intégrale générale est méromorphe dans la région dans laquelle elle est définie : elle admet les pôles de la fonction $t(x)$ comme pôles simples de résidu $\frac{n-6}{2}$.

Posons dans l'équation (2) $y = \dfrac{n-6}{2}\dfrac{u'}{u}$: la fonction u satisfait à l'équation différentielle

$$uu^{\text{IV}} - (n-2)uu'u''' + \frac{3n(n-2)}{3(n+6)}u''^2 = 0 \tag{3}$$

1. Comptes rendus, 4 octobre 1909.

dont l'intégrale générale est par suite $u(x) = z^{\frac{12}{n-6}}$; cette intégrale générale est définie de même d'un côté d'une droite, à l'intérieur ou à l'extérieur d'une circonférence. Elle est holomorphe en tout point de la région dans laquelle elle est définie, sauf en général au point $x = \infty$. Les intégrales définies à l'intérieur de leur coupure, ou celles qui admettent une coupure rectiligne, sont uniformes. Les intégrales définies à l'extérieur de leur coupure admettent en général le point $x = \infty$ comme point critique, et la coupure comme ligne critique : une détermination de ces intégrales, suivie le long d'un chemin qui tourne une fois autour de la coupure dans le sens direct, est multipliée par $e^{2i\pi\times\frac{12}{6-n}}$; elles ont un nombre de branches égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{n-6}$, comme les intégrales particulières $u = x^{\frac{12}{6-n}}, x^{\frac{6+n}{6-n}}(x + C)$ auxquelles elles se réduisent quand leur coupure circulaire se réduit à un point.

De même, l'intégrale générale de l'équation transformée de l'équation (1) en $\int y\,dx = Y$,

$$Y^{\text{IV}} = 2Y'Y''' - 3Y''^2$$

est uniforme, si elle est définie à l'intérieur de sa coupure ; si elle est définie à l'extérieur, elle admet une infinité de déterminations, permutables autour du point $x = \infty$ et de la coupure, et différant d'un multiple de $12\pi\, i$ comme les déterminations de l'intégrale particulière $Y = -6 \log x + \dfrac{C}{x}$.

La fonction u, rendue homogène de degré $\dfrac{12}{6-n}$ satisfait à l'équation aux dérivés partielles remarquable

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 4\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial x_1}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial x_1^3} + 3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial x_1^2}\right)^2 = 0, \tag{4}$$

x_1 désignant une variable d'homogénéité pour $n = 2, 3, 4, 5$; les intégrales de l'équation (3) sont des polynomes connus.

Si dans l'équation (2) on pose

$$y = -\frac{n+6}{2}\,\frac{v'}{v},$$

la fonction v satisfait à l'équation différentielle

$$vv^{\text{IV}} + (n+2)v'v''' - \frac{3n(n+2)}{2(n-6)}v''^2 = 0 \tag{5}$$

L'intégrale générale de l'équation (5) est donc

$$v(x) = z^{-\frac{12}{n+6}} = u^{\frac{6-n}{6+n}}.$$

Elle admet comme points critiques les zéros de u, c'est-à-dire les pôles de $t(x)$. Autour de chacun de ces points critiques, et, si elle est définie à l'extérieur de sa coupure, autour du point $x = \infty$ et de la coupure, elle acquiert un nombre de déterminations égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{n+6}$; si D désigne ce dénominateur, la fonction v^D est uniforme dans tous les cas.

La fonction v, rendue homogène de degré $\frac{12}{n+6}$ satisfait à la même équation aux dérivées partielles que la fonction u. Nous obtenons donc l'intégrale générale homogène de degré $\frac{12}{6-N}$ de l'équation aux dérivées partielles (4), pour les valeurs entières de N, sauf les suivantes : $0, \mp 1, \pm 6$.