Transcription de l'émission *La conversation scientifique* d'Étienne Klein, qui reçoit Jean-Paul Delahaye pour parler de son livre *Aux frontières des mathématiques : Kurt Gödel et l'incomplétude* (Dunod, 2025), début mai 2025

Étienne Klein : Aujourd'hui, les mathématiques révèlent-elles tout d'elles-mêmes ? Le 7 septembre 1930 à Königsberg, un jeune mathématicien, Kurt Gödel, exposa devant un parterre de logiciens un résultat extraordinaire. Il leur expliqua que jamais une théorie mathématique ne dira tout à propos des objets dont elle traite. Certains énoncés, dits indécidables, échappent à la théorie, au sens où celle-ci ne peut pas démontrer s'ils sont vrais ou faux.

Lui-même démontré avec la plus parfaite rigueur, ce résultat a révolutionné la logique, bien sûr, mais aussi la philosophie des mathématiques, car il mettait brutalement fin aux rêves d'une cohérence absolue que les mathématiques permettraient de construire. Il a également eu des implications en informatique, et il en a aujourd'hui dans le domaine de l'intelligence artificielle. Mais qui était Kurt Gödel ? Quelle fut sa vie ? Que raconte précisément son théorème dit d'incomplétude ? Et d'où vient que ce théorème, souvent mal compris et souvent abusivement récupéré, a été mis à presque toutes les sauces ? Pour répondre à ces questions, j'ai le plaisir de recevoir Jean-Paul Delahaye.

Bonjour, Jean-Paul Delahaye. Vous êtes mathématicien, professeur émérite à l'université de Lille.

Vous tenez la rubrique *Logique et calcul* dans la revue *Pour la science*, revue qui est mensuelle, et vous venez de publier un livre intitulé *Aux frontières des mathématiques, Kurt Gödel et l'incomplétude*, en même temps que vous faites paraître une nouvelle édition d'un livre intitulé *Pythagore à la plage*, paru chez Dunod tout récemment, dans lequel vous montrez qu'il y a une charmante poésie cachée sous l'apparente froidure des chiffres. C'est un livre très plaisant à lire. Par exemple, vous expliquez pourquoi on a dû choisir que le nombre 1 est un nombre non premier, alors qu'il obéit à la définition des nombres premiers.

Jean-Paul Delahaye : 1 n'est divisible que par lui-même et par 1, donc on pourrait dire qu'il est premier. Alors, c'est une très bonne question et d'ailleurs 1 a parfois été considéré comme un nombre premier. Maintenant, il y a une sorte d'unanimité pour dire que 1 n'est pas un nombre premier et la raison principale, c'est que ça permet d'énoncer plus simplement, par exemple, le théorème qui indique que tout nombre entier admet une décomposition unique en facteurs premiers.

Si on acceptait que 1 soit un facteur premier, à ce moment-là, on pourrait rajouter 1 ou ne pas le prendre à chaque fois qu'on fait une décomposition d'un nombre en facteurs premiers et donc il n'y aurait plus d'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Donc, pour cette raison-là, on considère plutôt que 1 n'est pas un nombre premier.

Étienne Klein : Mais vous dites qu'il y a presque unanimité, ça veut dire que c'est...

Jean-Paul Delahaye : Non, aujourd'hui il y a unanimité mais il y a eu une sorte d'hésitation parce qu'effectivement... C'est plutôt une convention.

Transcription : Denise Vella-Chemla, assistée des outils Turboscribe, septembre 2025.

C'est plutôt une convention. On peut dire que c'est une convention, mais qui a l'intérêt après de permettre des énoncés plus simples. Le fait que 1 soit un nombre premier, c'est tout à fait acceptable comme idée, sauf qu'après il va falloir énoncer de manière plus compliquée, par exemple, le théorème de décomposition en facteurs premiers de tout nombre entier.

Étienne Klein : Donc, finalement, c'est plus commode de le mettre à part. Vous parlez aussi, Jean-Paul Delahaye, dans ce livre, de problèmes qui restent ouverts. Par exemple, on ne sait toujours pas dire s'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux.

Jean-Paul Delahaye : Alors jumeaux, ça veut dire que leur différence est égale à 2, comme 11 et 13. On n'arrive toujours pas à démontrer q'uil y a une infinité de telles paires. Non, alors ça c'est une grande énigme des mathématiques, que tout le monde peut comprendre.

Étienne Klein : Entre 11 et 13, il y a une différence de 2. Entre 17 et 19, il y a une différence de 2. Et 11, 13, 17, 19 sont des nombres premiers. Et est-ce que cette propriété d'avoir deux nombres premiers qui sont différents l'un de l'autre, de deux unités, est-ce qu'elle se produit une infinité de fois ? On ne sait pas répondre. Et qu'est-ce qui bloque ? Est-ce qu'on peut analyser la difficulté du problème que ça représente ?

Jean-Paul Delahaye : Non, parce que si on le savait... on aurait levé de la difficulté. Alors, il y a eu des progrès récemment sur le fait qu'on peut démontrer que, pour une autre différence que 2, il y a une infinité de paires de nombres premiers qui vont présenter cet écart. Alors, c'est assez grand, je crois que c'est 20 ou 22, mais 2, non, on n'y arrive pas.

Il y a beaucoup de gens qui sont dessus. Ah oui, oui, parce que celui qui trouvera ça, il aura son nom, finalement, au panthéon des mathématiques. Alors, il y a une autre conjecture célèbre, celle de Golbach, qui dit que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers.

8, par exemple, est égal à 5 plus 3, 10 est égal à 7 plus 3. On ne sait pas si c'est toujours vrai, si c'est vrai pour tous les nombres pairs (sauf 2). Alors, cette conjecture-là, c'est pareil, c'est une conjecture, c'est-à-dire qu'on ne sait pas la démontrer, mais on a des arguments heuristiques qui sont assez forts, quand même. Alors, je vais vous en décrire un, si vous voulez.

Quand on considère un nombre pair, on peut regarder de combien de façons différentes on peut l'écrire comme somme de deux nombres premiers. Et puis on peut faire un graphique, et on va donc avoir au-dessus, par exemple, de 10, il y a plusieurs façons d'écrire, on va mettre plusieurs points, parce que 10, c'est 5 plus 5, c'est une somme de deux nombres premiers, et on va mettre plusieurs points.

Étienne Klein : 7 plus 3, 1 plus 9, non, pas 9, ni 1, pardon.

Jean-Paul Delahaye : Et plus on va loin, vers les nombres pairs plus grands, plus le nombre de points qu'il y a au-dessus de chaque valeur augmente. Et ça fait une sorte de nuage qui a une épaisseur qui est de plus en plus grande. Et donc ça suggère vraiment que plus on va aller loin, plus il y aura plusieurs, de nombreuses décompositions en somme de deux nombres premiers, et donc ça devient quasiment inconcevable de penser qu'il pourrait y avoir un nombre pair pour lequel il n'y en ait pas.

Étienne Klein : Ce graphique figure dans votre livre, Jean-Paul Delahaye, *Pythagore à la plage*, mais ce n'est pas une preuve.

Jean-Paul Delahaye : Ah non, ce n'est pas une preuve, c'est un indice. Mais toutes les conjectures n'ont pas des indices aussi forts que celles qu'on a pour Goldbach.

Étienne Klein : En tout cas, vous êtes d'accord avec moi pour dire que beaucoup de mathématiciens, on va parler de Gödel tout à l'heure évidemment, mais beaucoup de mathématiciens sont des gens étranges.

Jean-Paul Delahaye : Par exemple, il y a un certain Leonardo Fibonacci qui a vécu à Pise au tournant des XIIe et XIIIe siècles, qui un jour s'est posé la question, un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous côtés par un mur, peut-on savoir combien de couples on obtient en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple, à compter du troisième mois de son existence ? Oui. Je vais vous donner la réponse, c'est 144.

Et plus on va loin, plus ce nombre augmente rapidement, il augmente de manière exponentielle, et c'est la fameuse suite de Fibonacci dont tout le monde a entendu parler, qu'on retrouve par exemple dans certaines fleurs, etc.

Étienne Klein : Mais d'où vient cette façon de poser les problèmes ? Est-ce que c'est un problème concret qu'on essaie de formaliser, ou bien est-ce une sorte d'abstraction qu'on développe?

Jean-Paul Delahaye : Je pense que c'est quand même plutôt un problème concret, parce que l'équation qui définit la suite de Fibonacci, c'est $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$. Et ça, c'est une définition qui est parmi les plus simples possibles qu'on puisse imaginer pour une suite de nombres, et donc s'intéresser à ça, c'est naturel.

Il se trouve qu'on peut effectivement lui associer une prolifération de lapins, donc c'est naturel, c'est naturel sur un plan mathématique, et finalement, ce n'est pas si artificiel que ça concernant les lapins. Là où ça devient fascinant, c'est quand on voit que la limite du rapport entre deux termes successifs de la série est égale au nombre d'or. Alors là, c'est plus intéressant.

Vous savez qu'il y a une revue entière qui est consacrée à la suite de Fibonacci et au nombre d'or. Elle doit paraître chaque trimestre, tellement ces propriétés liées au nombre d'or et à la suite de Fibonacci fascinent *certains* mathématiciens. Je ne vais pas dire *tous*.

Étienne Klein : Étienne Klein : Alors on va continuer, on ne va pas parler de toutes les sortes de nombres que vous évoquez dans votre livre, mais tout collégien se souvient qu'il a été traumatisé le jour où il a appris que 0,9999 jusqu'à l'infini est égal à 1. Il se demande comment un nombre peut avoir pour partie entière 0 et valoir 1. La démonstration est triviale et pourtant ça choque l'esprit. Alors ça c'est une difficulté des nombres quand on les écrit sous forme décimale, i.e. avec des chiffres après la virgule.

Jean-Paul Delahaye : Maintenant, une fois qu'on a vu la démonstration, si on a un tant soit peu l'esprit mathématique, je pense qu'on ne peut pas douter que 1 égale 0,9999. Non mais c'est ça, la beauté des mathématiques, c'est qu'on ne peut pas douter, et pourtant ça interroge. En fait, ce qui se passe, c'est qu'on a tendance à imaginer que tout nombre écrit sous forme décimale va être associé à un seul nombre réel et que s'il y a deux formes différentes, c'est qu'il y a deux nombres différents.

Et en fait non, ce n'est pas comme ça. Il y a des nombres, ceux qui ont un développement impropre, qui ont deux développements. Un développement propre qui est fini, et puis un développement impropre qui se termine par des 9.

Il y a un grand logicien dont on va reparler avant de parler de Gödel qui est Bertrand Russell, qui énonçait un principe de logique qu'on appelait à l'époque "*ex falso quod libet*". C'est-à-dire que c'est une sorte de principe d'explosion logique du faux, on peut en déduire n'importe quoi.

Étienne Klein : Si on pose comme principe un énoncé qui est faux, alors il peut servir à démontrer des choses vraies autant que des choses fausses.

Jean-Paul Delahaye : Voilà, exactement. En fait, il permet de tout démontrer. Il y a une anecdote, je ne sais pas si elle est vraie, qui raconte qu'un étudiant a dit à Russell : "Mais monsieur, si 2 plus 2 est égal à 5, est-ce qu'on pourrait en déduire que vous êtes le pape ?". Et Russell a répondu aussitôt "Mais oui, bien sûr. En effet, supposons que 2 plus 2 soit égal à 5, en soustrayant 2 de chaque côté du signe égal, on obtient 2 égal 3 ; par symétrie, on a aussi 3 égal 2, et en soustrayant 1 de chaque côté, on tombe sur 2 égal 1. Maintenant, dit Russell, accordez-moi que le pape et moi, ça fait 2, mais puisque 2 est égal à 1, le pape et moi, nous ne sommes qu'un en réalité, donc le pape, c'est moi".

Étienne Klein : Voilà, exactement. Qu'est-ce qu'on peut en déduire ? En ce moment, il y a un conclave qui s'amorce.

Jean-Paul Delahaye : Je crois qu'on ne peut rien en déduire concernant le pape directement. Parce que ça marche aussi avec la Reine d'Angleterre.

Étienne Klein : Ah oui, ça marche avec la Reine d'Angleterre.

Jean-Paul Delahaye : Simplement, effectivement, les règles de logique, parfois, conduisent à des résultats qui étonnent un peu le bon sens, et celle-ci, donc le fait que dès qu'on a une contradiction "A et non A", on peut en déduire B quel que soit B, c'est quelque chose qui est un peu étonnant, mais il n'y a aucun doute là-dessus.

Étienne Klein : Alors, avant de parler de l'incomplétude de Gödel, permettez-moi de vous dire, Jean-Paul Delahaye, qu'il y a une forme d'incomplétude dans votre livre, sur les nombres. Il manque les nombres auto-descriptifs.

Si vous prenez un nombre entier, qui contient donc des chiffres qui vont de 0 à 9, vous pouvez le transformer en un autre nombre : en comptant le nombre de 0, donc ça fait le premier chiffre de ce nouveau nombre, le nombre de 1, le nombre de 2, etc. Et on appelle nombre auto-descriptif un nombre qui est invariant par cette transformation. Et la grande surprise, c'est qu'il n'en existe que 7. Il y a par exemple 2020.

Dans 2020, il y a 2 zéros, donc ça fait un 2, il y a 0 un, il y a 2 deux et il y a 0 trois. Donc 2020 est invariant par cette transformation. Et le prochain, c'est 21 200, donc on ne vivra pas une autre année auto-descriptive... On aura du mal. En 2020, on a vécu une année auto-descriptive.

C'est la seule qu'on pourra vivre dans notre siècle.

Jean-Paul Delahaye : Ça fait partie des curiosités mathématiques qui sont fascinantes, surtout quand on arrive à démontrer qu'elles ne se produisent qu'un nombre fini de fois. Si on arrive à les caractériser, à les trouver toutes, c'est fascinant.

Étienne Klein : Le plus grand, c'est 6 210 001 000. On pourrait vérifier. Alors venons-en à Gödel, Kurt Gödel, qui naît en 1908, en Tchécoslovaquie ?

Jean-Paul Delahaye : Oui, c'est en Moravie. C'est l'empire austro-hongrois à l'époque. Il a changé de nationalité plusieurs fois. Il va être autrichien, puis américain. Il a changé de nationalité à peu près aussi souvent que son grand ami Albert Einstein. Je ne sais pas si on peut les comparer.

Étienne Klein : Einstein était allemand, puis il a été suisse. Il a changé trois fois de notre nationalité. Alors qui est Kurt Gödel et comment se révèle son génie précoce ?

Jean-Paul Delahaye : Jean-Paul Delahaye : Son génie précoce se révèle dans sa thèse.

Sa thèse démontre un résultat qu'on appelle le théorème de complétude. Je ne vais pas vous l'énoncer, c'est de la logique. Mais ce résultat, aujourd'hui, en mathématiques, est considéré comme absolument essentiel.

C'est un résultat qui établit quelque chose qui est très intéressant, je le dis en mots simples. Il établit que les règles qu'on peut se fixer pour manipuler les formules de logique, d'une certaine logique, qu'on appelle le calcul des prédicats du premier ordre, donnent toutes les structures qui sont cohérentes. Il y a donc équivalence entre une notion sémantique et une notion syntaxique.

C'est un magnifique théorème qui était attendu et que Gödel a écrit dans sa thèse en 1930. Alors on va y revenir, parce que c'est quand même compliqué à comprendre du premier coup.

Étienne Klein : Mais sinon son génie, du moins sa grande curiosité, s'est révélée à un âge beaucoup plus précoce plutôt, puisque quand il était au lycée, on l'appelait "Herr Warum" [1].

[1] Monsieur Pourquoi.

Jean-Paul Delahaye : C'est celui qui n'arrête pas de poser des questions qui commencent par "Pourquoi....". Il veut toujours tout comprendre. Mais il a eu une vie un peu chaotique.

Étienne Klein : Est-ce qu'il a été victime de ce que vous appelez ces démons ? d'une forme de grosse dépression ?

Jean-Paul Delahaye : Oui, il était assez fragile.

Étienne Klein : Alors pourquoi est-ce qu'il avait cette fragilité ? Pourquoi est-ce qu'il a eu plusieurs périodes de dépression profonde ? Et pourquoi à la fin de sa vie finalement, d'une certaine façon, il s'est suicidé ? Puisqu'il a refusé de se nourrir une fois que sa femme a été hospitalisée. Et il demandait à sa femme de goûter les plats par crainte d'être empoisonné.

Jean-Paul Delahaye : Sa femme a été malade, elle a été hospitalisée. Il ne s'est plus nourri et il est mort d'inanition.

Étienne Klein : Oui, mais c'est quand même bizarre de faire goûter les plats qu'on soupçonne d'être empoisonnés à sa propre épouse. C'est peut-être pas très sympathique. Mais on a l'impression que la pratique assidue de la logique mathématique, ce n'est pas très bon pour la santé mentale. Si on prend d'autres exemples, comme Cantor, Nash, Perelman... Il y a plusieurs mathématiciens, et en particulier des logiciens, qui ont mal fini, qui se sont suicidés.

Jean-Paul Delahaye : Mais je pense que ce n'est pas général. Il y a aussi beaucoup de logiciens qui vivent très bien, très vieux. Voilà, mais Nash dit, celui qui a eu le prix Abel pour ses travaux en économie "ma tête est comme un sac à vent gonflé avec des voix qui se disputent à l'intérieur".

Étienne Klein : Perelman, qui a démontré la conjecture de Poincaré, à un journaliste qui lui téléphone, répond "vous me dérangez, je ramasse des champignons" [2].

Jean-Paul Delahaye : Je ne connaissais pas cette anecdote.

Étienne Klein : Bon, alors, venons-en, disons, à ce fameux programme de Hilbert, dont Gödel va montrer qu'il est en fait un rêve, qu'il est impossible. Hilbert, en 1900, énonce 23 problèmes. En quoi ça consiste ? Et en quoi c'est présenté comme un programme ?

Jean-Paul Delahaye : Alors, le programme de Hilbert, c'est une idée assez simple.

Étienne Klein : C'est vous qui le dites.

Jean-Paul Delahaye : Oui, car on peut l'exprimer comme ça : il s'agit de ramener l'infini au fini. C'est-à-dire qu'en fait, quand on fait des mathématiques, on manipule des démonstrations. Donc, en fait, on peut interpréter l'activité mathématique comme la découverte de formules qui vérifient des règles qui sont les règles correctes de logique. Et donc, on peut ramener la manipu-

[2] *Note de DV : je trouve que cela témoigne d'un esprit direct, mais sensé, et sûrement pas en mauvaise santé mentale !*

lation logique et le travail mathématique à la découverte de structures finies, les démonstrations exactes. Et en se basant là-dessus, on peut dire que lorsqu'on parle de nombre réel, lorsqu'on parle de fonction des nombres réels vers les nombres réels, en fait, on évoque des structures qui sont infinies.

Il y a une infinité de nombres réels et d'ailleurs, chaque nombre réel a une infinité de décimales si on l'écrit en base 10 et de chiffres binaires si on l'écrit en base 2, etc. Et donc, quand on mani-pule des objets infinis, en fait, on peut interpréter ça comme une manipulation d'objets finis si on pense uniquement aux démonstrations. Et l'idée de Hilbert, c'était de dire : "bon, quand on manipule l'infini, on peut tomber sur des contradictions, il faudrait être sûr que ça n'arrive pas".

C'est ça le problème de base des fondements mathématiques. C'est d'arriver à démontrer qu'on n'aura pas de contradictions quand on opèrera de telle façon sur les quantités infinies et en particulier sur les ensembles infinis, quand on les manipulera. Donc, si on arrive à démontrer que le système qui permet de manipuler les ensembles, ce qu'on appelle la théorie de Zermelo-Fraenkel, c'est la théorie qu'on adopte quasiment universellement, si on arrive à démontrer que cette théorie qui est purement syntaxique, i.e. qui est de la manipulation de formules, ne conduit jamais à des contradictions, à ce moment-là, on sera tranquille quand on manipulera les concepts d'infinitude, d'ensemble infini etc., de nombre réel, puisqu'on saura que la théorie n'aboutit jamais à une contradiction.

Étienne Klein : Si je vous comprends bien, Jean-Paul Delahaye, il s'agit de faire reposer la théorie mathématique sur des fondements solides.

Jean-Paul Delahaye : Voilà, exactement. Et donc, le rêve de Hilbert, formulé très clairement, c'était de dire "il faut démontrer que les théories qui manipulent l'infini ne conduisent jamais à des contradictions en les considérant comme des manipulations de formules, des manipulations finies de symboles. Et si on y arrive, on sera tranquille, on n'aura plus besoin de se poser de questions sur les contradictions puisqu'on aura démontré qu'il ne peut pas s'en produire". Mais Hilbert lui-même a vu qu'il y avait des problèmes avec la théorie des ensembles, par exemple.

Alors, la théorie des ensembles, elle ne s'est pas élaborée d'un seul coup. En fait, une première version de la théorie des ensembles, une sorte de formalisation de la théorie des ensembles qui s'est faite au début du XXe siècle, conduisait à une contradiction. Bon, mais ça, les mathématiciens s'en sont très bien sortis puisqu'ils ont proposé, pour simplifier les choses, une seconde formalisation qu'on utilise toujours aujourd'hui, c'est ce que j'évoquais en parlant de Zermelo-Frankel, et qui, jusqu'à aujourd'hui, n'a jamais produit de contradictions.

Donc, les contradictions qu'on a trouvées au début du XXe siècle, qu'on appelle la crise des fondements et qui étaient des contradictions très gênantes et qu'il fallait réparer, elles ont en fait été réparées en pratique. Maintenant, elles n'ont pas été réparées au sens où Hilbert l'attendait, où on aurait démontré qu'on ne peut pas produire de contradictions. On s'aperçoit aujourd'hui qu'on ne trouve jamais de contradictions, et il y a quand même plus d'un siècle qu'on travaille et qu'on manipule dans tous les sens cette fameuse théorie des ensembles, telle qu'elle est formalisée par Zermelo-Frankel, on n'a jamais trouvé de contradictions.

Donc, on est assez tranquille, mais on n'a pas démontré qu'il n'y aurait pas de contradictions. On se débrouille. On se débrouille, on a relativement confiance. On a une certaine preuve empirique qu'il n'y a pas de contradictions, mais on n'a pas la preuve mathématique qu'attendait Hilbert.

Étienne Klein : Alors Jean-Paul Delahaye, expliquez-moi ce que mon professeur de mathématiques nous apprenait à propos de ce paradoxe de Russell. Voilà comment il l'énonçait. Il disait : "Voilà, il y a des ensembles qui ne se contiennent pas comme éléments. Par exemple, l'ensemble de tous les physiciens n'est pas un physicien. Et on va dire de ces ensembles-là qu'ils sont normaux. Ils ne se contiennent pas comme éléments. Et puis, il y a des ensembles qui se contiennent eux-mêmes comme éléments. Par exemple, l'ensemble de tous les ensembles, c'est un ensemble. Et donc, c'est un ensemble qui se contient lui-même comme élément, et on va le qualifier de non normal. Ensuite, on appelle $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les ensembles normaux. Et la question qu'il ne faut pas poser, si on veut être tranquille, c'est "est-ce que $\mathcal{N}$ est normal ou est-ce que $\mathcal{N}$ est non normal ?" ".

Jean-Paul Delahaye : $\mathcal{N}$, ce sont les ensembles qui ne sont pas normaux.

Étienne Klein : "Ah non, $\mathcal{N}$, c'est l'ensemble de tous les ensembles normaux. Mais ça marche dans les deux sens. Alors, on va appeler $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les ensembles normaux. Et la question est est-ce que $\mathcal{N}$ est normal ou est-ce qu'il est non normal ?". Si je dis qu'il est normal, alors il fait partie des ensembles normaux, donc il s'appartient comme élément, donc il est non normal. S'il est non normal, alors il se contient lui-même comme élément par définition, donc il est normal, puisque $\mathcal{N}$ est l'ensemble de tous les ensembles normaux. Autrement dit, $\mathcal{N}$ est normal si et seulement si $\mathcal{N}$ est non normal". Donc voilà comment ça m'a été enseigné. Est-ce que ce type de paradoxe a provoqué la crise des fondements ? Alors, comment ça a été réparé ? C'est intéressant de savoir comment ça a été réparé.

Jean-Paul Delahaye : Eh bien, l'idée de départ c'était que n'importe quelle propriété permet de définir une notion d'ensemble.

Je prends une propriété, justement, *ne pas s'appartenir à soi-même*, c'est une propriété, donc il y a un ensemble, l'ensemble des X qui ont cette propriété. Et quand on a formalisé la théorie des ensembles dans sa version qui marche, dans celle qui n'a pas donné de contradictions jusqu'à aujourd'hui, eh bien on a dit "non, ça c'est trop général et justement ça ne marche pas. Il faut imposer des conditions restrictives. Et par exemple, on va dire n'importe quelle propriété donnée associée à un ensemble va effectivement donner un autre ensemble, donc je me donne un ensemble A, je vais considérer tous les éléments de l'ensemble A qui ont la propriété P. Ça, ça me donne un ensemble B, pas de problème. Mais il faut que je prenne les éléments dans un ensemble A dont j'ai déjà démontré l'existence. Et en imposant cette limitation, eh bien, on va éviter toutes les contradictions.

Et en particulier, je signale que l'ensemble de tous les enfants ne va pas être un ensemble. Parce que l'ensemble de tous les enfants, on ne va pas pouvoir le définir à partir d'une propriété d'un ensemble qui aurait déjà été fixé au départ.

Étienne Klein : C'est ça qui a provoqué ce qu'on appelle la crise des fondements ?

Jean-Paul Delahaye : Oui, c'est ça, exactement. Au point que certains mathématiciens ont envisagé d'abandonner les ensembles. Heureusement qu'on ne l'a pas fait. C'est Hilbert qui disait qu'il ne faut pas qu'on nous chasse du paradis que Cantor a créé pour nous. D'ailleurs, ce qui est assez amusant, dans cette phrase-là, c'est qu'Hilbert dit "créé pour nous". Comme si auparavant, les ensembles n'existaient pas, comme si c'est Cantor qui les avait créés. Ce qui est un point de vue discutable et qui n'était d'ailleurs pas celui de Gödel, parce que Gödel pensait que les ensembles existent avant que l'humanité existe.

Étienne Klein : Il pensait que les mathématiques étaient découvertes et non pas construites.

Jean-Paul Delahaye : Voilà, exactement. Et ça, c'est un des grands problèmes et un des grands points sur lequel il y a une dispute entre philosophes des mathématiques, c'est "est-ce que les objets mathématiques existent en un sens un peu fort ?" Évidemment, ils n'existent pas dans le monde physique, mais est-ce qu'ils existent en un sens un peu fort ?

Étienne Klein : On va y revenir, Jean-Paul Delahaye, mais comment est-ce que le théorème de Gödel a été reçu, le premier théorème de Gödel, comme vous dites, en 1930 ? Est-ce que les gens l'ont compris ? Moi, j'ai lu, notamment dans votre livre, que le seul qui l'ait vraiment compris sur le moment, c'est John von Neumann, qui en était traumatisé.

Jean-Paul Delahaye : Oui, alors, dans un premier temps, c'était tellement étonnant, cette affirmation qu'une théorie ne pourrait pas démontrer sa propre consistance, sa propre non-contradiction, que toute théorie, dès qu'elle a un certain pouvoir de démonstration, va pouvoir énoncer, formuler des énoncés dont elle ne pourra démontrer ni s'ils sont vrais, ni s'ils sont faux. C'était tellement étonnant qu'effectivement, il y a des gens tout de suite qui ont cherché des contradictions, même Bernays [3], qui était un élève de Hilbert, a cherché des contradictions, et tout ça, ça a petit à petit passé. C'est-à-dire qu'en fait, petit à petit, on a compris que la preuve de Gödel était parfaite, sur le plan de la rigueur.

On en a donné diverses versions. Aujourd'hui, on dispose d'un grand nombre de versions, on ne peut même pas les compter. Il n'y a plus aucun doute. Donc, après une période d'incertitude, en quelque sorte, à cause du choc de cet énoncé qui semblait dire quelque chose d'étonnant, profondément étonnant, et navrant, d'une certaine façon, parce qu'on aurait bien aimé que le programme de Hilbert puisse être exécuté et qu'on trouve une démonstration que la théorie des ensembles ne pouvait pas conduire à une contradiction. Finalement, tout le monde l'a admis, et aujourd'hui, si j'ose dire, seuls les farfelus cherchent encore des contradictions dans la démonstration de Gödel.

Étienne Klein : Pourquoi y a-t-il en mathématiques cette obsession de la contradiction, au point que d'ailleurs, on s'amuse à jouer avec elle ? J'ai appris qu'un grand mathématicien que vous connaissez très bien, Félix Klein, qui était professeur à Göttingen, à mesure qu'il vieillissait, devenait de plus en plus olympien, et ses étudiants se moquaient de lui en disant ceci, à Göttingen

[3] wikipedia : Paul Bernays, né le 17 octobre 1888 à Londres et mort le 18 septembre 1977 à Zurich, est un mathématicien suisse qui a joué un rôle crucial dans le développement de la logique mathématique au XXe siècle. Il est longtemps l'assistant et le collaborateur de David Hilbert.

: “il y a deux sortes de mathématiciens, il y a ceux qui font ce qu’ils veulent, et non pas ce que Félix Klein veut, et ceux qui font ce que Félix Klein désire, et non pas ce qui les intéresse. Klein n’appartenant à aucune de ces catégories, il n’est donc pas un mathématicien”.

Jean-Paul Delahaye : Pourquoi est-ce que les mathématiciens sont obsédés par la contradiction ? Vous l’avez évoqué tout à l’heure, tout simplement parce que s’il y a une contradiction, tout est vrai, tout est faux, donc il n’y a plus de mathématiques. Les mathématiciens prennent au sérieux les raisonnements logiques.

Comme il y a un raisonnement logique qui vous dit que si vous avez une contradiction, tout est vrai, tout est faux, on ne peut pas accepter qu’il y ait une seule contradiction, on ne peut pas accepter de démontrer 0 égale 1, puisqu’on démontre par ailleurs que 0 est différent de 1, on ne peut pas accepter que “A et non A”, parce que sinon tout devient vrai, tout devient faux. Donc, il n’y a plus de théorie mathématique. Donc, il faut absolument éviter les contradictions.

Étienne Klein : Alors, Jean-Paul Delahaye, moi je fais partie d’une génération qui a été traumatisée par ce théorème de Gödel, et je me souviens d’une discussion entre Alain Connes, grand mathématicien, et André Lichnerowicz, grand mathématicien, à propos du théorème de Gödel. Et il m’avait semblé comprendre que l’énoncé du théorème de Gödel n’est pas le même partout. Il y a des endroits où on dit “toute axiomatique basée sur l’arithmétique contient des propositions indécidables, on ne peut pas savoir si elles sont vraies ou fausses”, et puis il y a d’autres énoncés qu’on peut lire qui disent “tout système basé sur l’arithmétique contient des propositions vraies et indémontrables”, qui est le vocabulaire qu’Alain Connes utilise dans la discussion qu’il a avec Lichnerowicz, et Lichnerowicz lui répond en disant “vraies et indémontrables, je ne sais pas ce que ça veut dire”. Et Alain Connes prend l’exemple d’un tribunal. Dans un tribunal, dans un procès, on a des pièces à conviction qui permettent d’établir la vérité de certains événements, qui sont démontrés par ces pièces à conviction. Mais il peut y avoir des événements qui se sont passés en dehors du tribunal, qu’on ne peut pas prouver, donc qui sont indémontrables, alors même qu’ils sont vrais. Est-ce que cette image vous parle ? Est-ce qu’elle est légitime ou est-ce que c’est une métaphore abusive ?

Jean-Paul Delahaye : Non, l’image est juste. Effectivement, quand Gödel a démontré son théorème, il ne voulait pas se référer à la notion de formule vraie, parce que ça a quelque chose de, je ne veux pas dire de fumeux, mais ça a quelque chose d’un peu philosophique. Et donc, il ne voulait se référer dans sa démonstration, et surtout dans l’énoncé de son résultat, qu’à la notion de formule démontrable, dans un système donné. En fait, c’était le système des *Principia Mathematica* [4].

Et donc, ce qu’il a démontré, c’est que dans tout système formel ayant une certaine capacité à faire de l’arithmétique, à ce moment-là, il va y avoir des énoncés qui seront formulables dans cette théorie, et dont on ne démontrera ni la vérité, ni la fausseté. Maintenant, il ne parle pas d’énoncés vrais dans l’absolu ou faux dans l’absolu. Maintenant, quand parmi les énoncés dont on ne va pas pouvoir démontrer la vérité, il y a l’énoncé que la théorie ne conduit pas à une contradiction, en général, cet énoncé-là, on le considère comme vrai. Si vous utilisez la théorie des ensembles, et on l’utilise depuis plus d’un siècle maintenant, et on n’a pas trouvé de contradiction, on suppose

[4] Livre de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead

effectivement, sans prendre trop de risque, qu'elle ne conduit pas à une contradiction, elle est non contradictoire, et cette non-contradiction ne va pas être démontrable dans la théorie des ensembles, si elle est non-contradictoire. Donc ça va être un énoncé vrai. Donc on va effectivement avoir affaire à un énoncé dont on a de bonnes raisons, pas de certitude, de croire qu'il est vrai, mais que la théorie ne pourra pas démontrer.

Étienne Klein : Mais Jean-Paul Delahaye, moi j'avais compris que cette discussion montrait que le sens du théorème de Gödel différait selon qu'on est partisan d'une idée platonicienne des mathématiques, les mathématiques sont découvertes, ou selon qu'on considère qu'elles sont construites.

Jean-Paul Delahaye : Alors oui, et alors justement là-dessus, il est intéressant de voir quelle était la position de Gödel.

Étienne Klein : Il était platonicien ?

Jean-Paul Delahaye : Oui, il était platonicien et c'est quand même incontestablement le plus grand logicien, on va dire, au moins du XXe siècle peut-être, on peut aller plus loin encore.

Et lui, il avait une conviction absolument formelle et forte de la réalité des objets mathématiques et en particulier des ensembles. Pour lui, les ensembles existaient. Et c'est peut-être le moment d'évoquer justement une des formules ou un des énoncés qui est indécidable dans la théorie des ensembles, c'est l'hypothèse du continu.

Alors je vais l'expliquer en très peu de mots, c'est assez simple.

Étienne Klein : On compte sur vous.

Jean-Paul Delahaye : Il y a l'ensemble des entiers, 0, 1, 2, 3, 4, etc. C'est un infini, mais c'est un infini qui n'est pas très méchant puisque les éléments sont séparés les uns des autres. C'est ce qu'on appelle l'infini dénombrable. Et puis il y a l'infini des nombres réels, donc il y a π, il y a $\sqrt{2}$, il y a 1, il y a aussi bien sûr, il y a -1, etc. Et cet ensemble-là, cet ensemble infini-là, il est beaucoup plus dense. Et on démontre, et c'est Cantor qui l'a fait en premier, que l'infini des nombres réels ne peut pas être mis en correspondance 1 à 1 avec l'ensemble des entiers. C'est-à-dire qu'il y a vraiment beaucoup plus de nombres réels que de nombres entiers.

Il y a plusieurs sortes d'infini. Voilà, il y a au moins deux sortes d'infini, d'après la démonstration qu'a donnée Cantor. Et en fait, il a démontré qu'il y avait au moins trois sortes, au moins quatre sortes, etc.

Bon, mais j'insiste pas là-dessus. L'hypothèse du continu, c'est simplement l'affirmation suivante. Quand je prends un sous-ensemble infini de l'ensemble des nombres réels, bon, il peut être du même genre que lensemble des entiers. Ça va être le cas des entiers, ça va être le cas des nombres rationnels, ça va être le cas des nombres premiers. Et on dira qu'ils sont dénombrables.

Ou il peut être du genre de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'on va pouvoir le mettre en correspondance 1 à 1 avec $\mathbb{R}$. Et la question, c'est "Est-ce qu'il y en a d'autres ? Est-ce qu'il y a quelque chose qui serait intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, entre les nombres entiers et les nombres réels, un infini entre ces deux infinis, un infini qui serait strictement différent des deux et qui serait entre les deux ?".

L'hypothèse du continu, c'est de dire non. Il n'y a pas d'infini intermédiaire. Et alors, c'est vraiment une histoire très amusante parce que Cantor a découvert cette propriété et il a essayé de la démontrer. Toute sa vie, il a essayé de la démontrer. Ou de démontrer qu'elle était fausse, ou de démontrer qu'elle était vraie. Ensuite, Gödel s'est aussi intéressé à ça, etc. Donc tout le monde s'est intéressé à ça. Alors, Gödel a quand même obtenu un résultat très intéressant. Il a réussi à établir que cette hypothèse du continu n'introduit pas une contradiction quand on la rajoute aux axiomes habituels de la théorie des ensembles.

C'est-à-dire qu'on peut la rajouter si on a envie. Ça n'introduira pas de contradiction. C'est ce qu'on appelle un résultat d'équiconsistance.

Et puis, il y a un autre logicien qui s'appelle Paul Cohen qui a démontré en 1964 qu'on peut rajouter la négation de l'hypothèse du continu. Ça n'introduira pas de contradiction s'il n'y en avait pas avant. Donc, on peut choisir entre ajouter l'hypothèse du continu ou ajouter sa négation.

Mais c'est le mathématicien qui choisit. Il est libre. Et alors voilà, justement, c'est là où il y a une discussion entre les réalistes et les gens qui sont purement formalistes ou éventuellement qui sont constructivistes et qui ont un point de vue là-dessus.

C'est que le réaliste, il dit "oui", et Gödel affirme ça : "oui, on peut ajouter sans introduire de contradiction à ZF l'hypothèse du continu ou sa négation. Mais on n'a pas le choix. Les ensembles existent".

J'en ai une certaine perception, une certaine compréhension. Le mathématicien en a une certaine intelligibilité. Et il faut qu'il approfondisse sa compréhension des ensembles. Et quand il va approfondir sa compréhension des ensembles, il va pouvoir rajouter des axiomes qui auront comme conséquence l'hypothèse du continu ou sa négation. Mais c'est en cela qu'il est réaliste. Voilà.

Il pense que les ensembles existent réellement et notre intuition nous donne accès aux ensembles. Et notre intuition nous permet, notre intuition, notre compréhension mathématique, une sorte de perception des objets mathématiques et nous permet de savoir ce qu'il en est. Et donc aujourd'hui, on n'a pas trouvé, mais on va rajouter des axiomes qui nous sembleront évidemment vrais, ce qui n'est pas le cas de l'hypothèse du continu ou de sa négation.

Et quand on les aura rajoutés, viendra un moment où l'hypothèse du continu sera prouvée ou sa négation. Donc il n'est pas question de rajouter l'hypothèse du continu ou sa négation arbitrairement. Il faut attendre que notre compréhension des ensembles s'améliore.

Étienne Klein : Alors Jean-Paul Delahaye, je ne sais pas si vous avez vu le film "*Anatomie* *d'une chute*". Moi, je l'ai vu comme un film qui parle de cette question que vous évoquez. Je raconte rapidement l'histoire. Sandra et Samuel forment un couple. Ils vivent à la montagne avec leur fils Daniel qui est âgé de 11 ans. Et un jour, en rentrant d'une promenade, Daniel découvre au pied du chalet le corps de son père qui a manifestement fait une chute de plusieurs mètres. La question c'est "est-ce qu'il s'est suicidé ou est-ce qu'il a été tué ? Est-ce que c'est un suicide ou un homicide ?". Une enquête est ouverte et Sandra, l'épouse, est mise en examen. Et lors du procès, il apparaît impossible de faire jaillir la vérité ni dans un sens ni dans l'autre. Elle n'est ni innocente ni coupable. Et cette indécidabilité engendre chez leur fils Daniel une angoisse terrible. Il a besoin que quelqu'un lui dise la vérité. Il s'adresse à Marge, la jeune fille qui s'occupe de lui. Et cette jeune fille lui explique ceci. "Lorsque nous ne pouvons pas savoir ce qui est vrai dans l'absolu, dit-elle, il nous reste la possibilité de décider ce qui est vrai pour nous." Et Daniel, le fils, tire parti de cette leçon. Et il choisit de livrer au tribunal un indice qui, sans être une preuve, va faire pencher la balance d'un certain côté. Et sa mère va être innocentée. Est-ce que ce n'est pas une façon de comprendre le terme de Gödel ? Dans le cas du tribunal, on ne peut pas savoir. Mais si on ajoute une hypothèse qui vient de l'extérieur, alors on a un indice qui permet de trancher la question.

Jean-Paul Delahaye : Oui, ça correspond à la situation que je décrivais tout à l'heure. Si on considère les axiomes usuels de la théorie des ensembles, on ne peut pas décider de la vérité de l'hypothèse du continu ou de celle de sa négation. Par contre, en ajoutant d'autres vérités sur les ensembles, dont on aura une perception, dont on aura une compréhension, on peut espérer avoir une...

Étienne Klein : Oui, mais pour le spectateur, et là je reviens au film, il est impossible de concevoir que Sandra ne soit ni innocente, ni coupable. Autrement dit, cette indiciabilité est insupportable parce qu'on a tendance à penser qu'elle est soit coupable, soit innocente, mais elle ne peut pas être ni l'un ni l'autre.

Jean-Paul Delahaye : Oui, mais c'est la situation de Gödel. Gödel pense qu'on ne sait pas aujourd'hui s'il y a des ensembles intermédiaires entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, mais il y a une vérité de ça et c'est insupportable de rester dans cette indécision.

Étienne Klein : Alors revenons, si vous le voulez bien, Jean-Paul Delahaye, à Gödel. Il a fait partie ou il a été proche de ce qu'on appelle le cercle de Vienne, qui a mené une sorte de critique radicale contre toutes sortes de métaphysiques spéculatives. Est-ce que ça a eu une influence dans sa façon de travailler, de raisonner ? Lui, quand il en parle, il dit qu'il a été très intéressé de participer aux réunions du cercle de Vienne, donc de Moritz Schlick, qui était l'organisateur.

Jean-Paul Delahaye : Celui qui a été assassiné en 1936 par un étudiant. Il faut se méfier des étudiants ! Donc il a été très intéressé et vraisemblablement c'est en assistant à ces séances qu'il a découvert la problématique de la logique mathématique telle qu'elle était à la fin des années 1920 et qu'il a pris du goût pour la logique mathématique. Ça a été la rampe de lancement pour lui.

À un moment donné dans sa vie, il a hésité à faire de la physique. Et puis il a rencontré divers enseignants qui l'ont plus ou moins intéressé aux mathématiques, voire passionné. Et le cercle de Vienne, vraisemblablement, l'a définitivement orienté vers la logique mathématique, qui, à cette époque-là, venait juste de faire des progrès considérables. Parce qu'il faut bien imaginer que jusqu'au XIXe siècle y compris, d'une certaine façon, les mathématiciens faisaient des raisonnements, mais ces raisonnements n'étaient jamais parfaitement formalisés. C'est-à-dire qu'un mathématicien trouvait un raisonnement, le présentait à un de ses collègues, ce collègue le comprenait, donc il était d'accord, mais il ne pouvait pas y avoir de vérification mécanique de la justesse du raisonnement. Et ce qui s'est passé au tournant du XIXe siècle et du XXe siècle, c'est qu'on a réussi à comprendre suffisamment bien les mécanismes logiques qui organisent le raisonnement mathématique pour proposer des versions des mathématiques, il y en a plusieurs, qui sont entièrement formalisées.

C'est-à-dire que quand un raisonnement est écrit dans ce formalisme, dans le formalisme adopté, on peut vérifier mécaniquement que le raisonnement est juste. Et aujourd'hui, c'est quelque chose qui est utilisé pour s'assurer que les preuves les plus longues sont justes. Parce qu'il y a des preuves qui font des centaines, voire des milliers de pages en mathématiques, et quand on écrit une preuve qui fait un millier de pages, évidemment, il peut y avoir une erreur quelque part dans les milliers de pages.

Surtout quand, bien souvent, ces preuves très longues sont réparties entre plusieurs articles qui sont publiés dans plusieurs revues différentes, avec des spécialistes de différentes parties des mathématiques. Donc la seule façon pour les preuves très longues d'avoir une certitude de leur justesse, c'est de les faire vérifier mécaniquement.

C'est-à-dire de les écrire dans un langage qui soit ensuite traitable par un ordinateur qui va valider ou pas la preuve. Et donc cette idée de formalisation des mathématiques, ça a une première conséquence qui est vraiment très importante, je pense, je la mentionne au début du livre, c'est qu'en fait les mathématiques sont devenues leur propre objet. À partir du moment où la formalisation des mathématiques est possible, une théorie mathématique, ça devient un objet mathématique.

Et donc on peut en démontrer des propriétés, on peut les combiner, on peut les étendre, etc. Et cette façon pour les mathématiques d'être leur propre objet, je pense que c'est quelque chose qui est unique en science.

Étienne Klein : Mais c'est nouveau, si je vous comprends bien, ça veut dire que pendant longtemps, les mathématiciens ont fait des mathématiques sans avoir besoin d'une théorie des mathématiques ?

Jean-Paul Delahaye : D'une certaine façon, oui, il y avait une sorte d'intuition et de compréhension de ce qui est juste ou pas pour les nombres, pour les figures, si on raisonne bien, qui les satisfaisait, ou, plus exactement, ils ne savaient pas faire autrement. Il y avait bien une logique qui était un développement de la logique d'Aristote, qui s'était prolongée, mais cette logique qui existait jusqu'au début du XXe siècle, elle ne permettait pas de rendre compte de toute l'activité mathématique.

Et c'est seulement avec des gens comme Frege et d'autres, Peano, etc., qu'on a réussi à avoir une façon de comprendre ce que font les mathématiciens qui soit parfaitement formelle. Et donc, à ce moment-là, les mathématiques sont devenues leur propre objet.

Étienne Klein : Mais est-ce que cette crise des fondements, ce théorème de Gödel, il a un effet sur la façon de comprendre d'où vient que les physiciens qui s'occupent de la réalité utilisent des équations mathématiques ? Est-ce que la question de l'efficacité des mathématiques en physique est affectée par le théorème de Gödel ou pas ?

Jean-Paul Delahaye : Alors, je ne pense pas que le théorème de Gödel ait une incidence directe sur...

Étienne Klein : Parce qu'on lui a fait dire beaucoup de choses.

Jean-Paul Delahaye : Oui, on lui fait dire beaucoup de choses. Il y a beaucoup d'abus et Jacques Bouveresse s'est amusé à écrire un livre entier pour se moquer des gens qui utilisent et usent et abusent du théorème de Gödel. Non, le théorème de Gödel, il parle des systèmes formels.

Les physiciens, quand ils formalisent entièrement leur théorie, rentrent effectivement dans un système formel. Donc, ils vont proposer des théories, s'ils se donnent la peine de les formaliser complètement, qui vont être sujettes au théorème de Gödel. Donc, ils vont ne pas être capables de démontrer tous les énoncés qu'ils sont capables de formuler.

Étienne Klein : Mais je pense que les physiciens s'en moquent un peu aujourd'hui. Pour être très clair. Alors, revenons à Gödel, à ses personnalités.

Jean-Paul Delahaye : Il a fait un premier voyage aux USA, en Amérique, en 1933. Il a eu des crises d'angoisse. Il n'a pas pris le bateau comme il le souhaitait. Mais la première fois qu'il était aux USA, au moment de monter sur le bateau, il a eu une crise d'angoisse. Il a fait demi-tour, il est retourné à Vienne. Mais il a fini par reprendre un bateau un peu plus tard, je crois, avec sa famille. Et en 1938, il est à Vienne, il est professeur là-bas. Il est enseignant, il n'a pas le titre de professeur. Il est bousculé par de jeunes nazis qui cassent ses lunettes. Et sa femme lui fait comprendre qu'il faut quitter Vienne. Il va s'exiler aux USA, qui est à l'époque une terre d'accueil pour les scientifiques.

Étienne Klein : Aujourd'hui, c'est un peu différent.

Jean-Paul Delahaye : Et il va finir par devenir américain en 1947. Et pour ça, il doit prêter serment et dire qu'il va respecter la Constitution. Il est accompagné par Einstein lors de la cérémonie. Il détecte une contradiction logique dans l'énoncé de la Constitution.

Étienne Klein : Est-ce qu'on sait quelle est cette contradiction ?

Jean-Paul Delahaye : Non, on ne sait pas quelle est cette contradiction, mais ça a beaucoup inquiété... C'est Albert Einstein qui l'accompagnait, et puis Morgenstern, qui est un mathématicien. Einstein lui a dit de se taire, il lui a dit de ne pas évoquer le problème. Ils lui ont indiqué avant cette rencontre de ne pas évoquer le problème. Et puis malgré tout, quand cette sorte d'examen se déroule, le juge, une sorte de juge qui est chargé de le mener, lui pose une question. Et Gödel ne peut pas s'empêcher d'évoquer le fait qu'il y a une sorte de contradiction dans la Constitution américaine qui pourrait transformer la Constitution américaine, le régime politique américain, en un totalitarisme.

Étienne Klein : Ce qui est peut-être en train de se produire. Mais cette contradiction, même si on n'en a pas trace, on devrait pouvoir la repérer.

Jean-Paul Delahaye : Aujourd'hui, les historiens qui ont étudié la question de près n'ont pas retrouvé exactement de quelle contradiction il s'agissait. Alors le juge a quand même été très gentil, puisqu'en gros, il a dit que ça n'avait pas d'importance, etc., il a demandé à Gödel d'où venait, Gödel lui a répondu qu'il venait d'Autriche, que l'Autriche était une démocratie, que c'était devenu une dictature. Et le juge a dit, mais ça, c'est impossible aux Etats-Unis. C'est là que Gödel a dit qu'il y avait cette contradiction. Voilà, Gödel n'a pas pu s'empêcher d'intervenir. Bon, ça ne l'a pas empêché d'être naturalisé, parce que le juge était très compréhensif.

Étienne Klein : Qu'est-ce qu'on appelle, Jean-Paul Delahaye, un système formel, entre guillemets, intéressant ?

Jean-Paul Delahaye : Alors, les systèmes formels, c'est ce que j'évoquais tout à l'heure, à propos de la logique et de la théorie des ensembles. C'est un système qui permet de démontrer des choses un peu consistantes, par exemple, qu'il y a une infinité de nombres premiers, par exemple, ou que, justement, l'infini des nombres réels n'est pas équivalent à l'infini des nombres entiers. Alors, il peut y avoir des définitions plus précises de ce que c'est qu'un système intéressant, puisqu'en fait, quand on va vouloir généraliser le théorème de Gödel, la première version du théorème de Gödel, elle portait sur le système formel des *Principia Mathematica* de Russell. Mais bon, visiblement, c'était clair dès le départ, il avait une portée beaucoup plus large. Mais quand on a voulu préciser cette portée plus large, il a fallu s'intéresser à jusqu'à quel point un système peut être simple et, malgré tout, sujet au théorème de Gödel. Et donc, il y a toutes sortes de travaux qui ont été faits dans ce sens-là.

Et donc, il y a des définitions qui peuvent être très précises de ce que c'est qu'un système. Alors, on va les appeler intéressants, ces systèmes, qui vont être sujets au théorème de Gödel. Il y a des systèmes qui ne sont pas sujets au théorème de Gödel.

Par exemple, le calcul propositionnel, on ne manipule que des formules du genre “A implique B”, “A implique B et B implique C implique A implique C”, des choses comme ça. Ça, c'est un système qui est non-contradictoire, dont on peut démontrer la non-contradiction et qui n'est pas sujet au théorème de Gödel. Mais, dès qu'on fait un peu d'arithmétique, dès qu'on met un peu d'arithmétique dans un système, en général, il devient sujet à l'incomplétude.

Étienne Klein : Alors, aujourd'hui, Jean-Paul Delahaye, on parle beaucoup d'intelligence artificielle. Est-ce que, quand on en fait, quand on l'invente, quand on la conçoit, on doit tenir compte du théorème de Gödel ?

Jean-Paul Delahaye : Alors, en tenir compte directement, non, mais que les systèmes qu'on met au point soient sujets au théorème de Gödel, d'une certaine façon, oui. Parce que, quand la machine va fonctionner, d'une certaine façon, ce qui va fonctionner dans la machine, c'est un algorithme.

Et un algorithme, s'il est contradictoire, il ne va pas être intéressant. Donc, on espère que le système d'IA qu'on va avoir conçu, il va être non-contradictoire. Et, on espère aussi qu'il va pouvoir faire un minimum d'arithmétique de manière convenable.

Et donc, à ce moment-là, les énoncés qu'est capable de produire ce système d'IA, ça va être tout à fait quelque chose qui est équivalent à un système formel intéressant, donc sujet au théorème de Gödel. Donc, ça, ça signifie que si on ne s'intéresse qu'à des systèmes d'IA qui sont non-contradictoires, mais on peut espérer quand même que c'est le cas, sinon on va être embêté avec des systèmes qui vont vous dire qu'il faut prendre l'avion ou qu'il ne faut pas prendre l'avion, ou qu'il faut atterrir ou ne pas atterrir, quand le système doit décider de se poser ou pas et qu'il y a du brouillard ou je ne sais quoi. Donc, si on accorde de l'importance au fait que les systèmes d'IA soient non-contradictoires, ils vont être sujets au théorème de Gödel.

Étienne Klein : Jean-Paul Delahaye, vous êtes mathématicien, vous êtes logicien. Comment est-ce que vous avez reçu le fait qu'en octobre 2024, on a annoncé que le prix Nobel de physique était attribué à des pionniers de l'intelligence artificielle ? En l'occurrence Johns Hopkins et Geoffrey Hinton, l'un pour l'invention des réseaux de neurones artificiels, l'autre pour l'invention de l'apprentissage profond. Est-ce que ça dit des choses de la Nature ou est-ce que ça dit simplement des choses d'un outil qu'utilisent les physiciens pour comprendre la Nature ?

Jean-Paul Delahaye : Alors, c'est une grande nouvelle parce que ce sont quand même plutôt des informaticiens pour le coup, et les informaticiens ont du mal à se faire reconnaître.

Ils sont toujours un petit peu pas tout à fait mathématiciens, ils ne sont pas tout à fait physiciens, ils sont un peu entre les deux. Et qu'on attribue des prix Nobel à deux informaticiens, c'était une grande nouvelle qui moi, personnellement, m'a beaucoup réjoui parce que je pense que ça aurait dû se produire depuis longtemps. Et donc, ça prouve aussi, tout simplement, l'importance de la mise au point de `ChatGPT` et de tous les systèmes d'IA générative.

Il s'est passé quelque chose en 2022 exactement, quand `ChatGPT` a été diffusé. Mais ce quelque chose, c'est réellement quelque chose d'important et moi, je n'en doute pas. Et donc, j'étais très content que les prix Nobel soient attribués à ces informaticiens.

Gödel a beaucoup fréquenté Albert Einstein à Princeton. Quand il s'est exilé aux Etats-Unis, il a été accueilli par l'université de Princeton. Et il a travaillé sur des modèles cosmologiques à partir des équations d'Einstein de relativité générale ayant des propriétés bizarres, des univers cylindriques en rotation qui permettent de violer le principe de causalité, donc de voyager dans le temps.

Étienne Klein : Il aimait les trucs bizarres quand même.

Jean-Paul Delahaye : Mais ça prouve d'une sorte de manière indirecte le génie de Gödel parce qu'il n'était pas physicien. Il était mathématicien, logicien en particulier.

Il a passé sa vie à s'intéresser à des problèmes de logique. Et à un moment donné dans sa vie, il s'est intéressé à des problèmes de physique. Et il a trouvé une solution aux équations d'Einstein, si j'ai bien compris, qui est effectivement reconnue comme convenable et qui a des propriétés un peu étranges, où on peut revenir en arrière dans le temps.

Bon, alors je laisse ça aux physiciens, le soin de commenter, mais pour moi, c'est la preuve même de ce génie universel qu'était Gödel dès qu'il s'intéressait à quelque chose. Il était capable de produire quelque chose qui a étonné les spécialistes. Et Einstein lui-même. Et Gödel insiste bien pour dire qu'Einstein n'y est pour rien ; il s'y est intéressé tout seul. Alors par rapport à ça on a quelques doutes parce qu'ils se voyaient beaucoup : ils marchaient ensemble, ils discutaient beaucoup. Mais Gödel insiste beaucoup sur le fait que ce n'est pas Einstein qui l'a guidé.

Étienne Klein : Jean-Paul Delahaye, dans votre livre, vous parlez dans un chapitre de ce que vous appelez la disjonction de Gödel.

Jean-Paul Delahaye : Alors disjonction, ce n'est pas la disjonction de son esprit, mais c'est quelque chose qui a à voir avec la logique mathématique. En quoi ça consiste ? Et en quoi ça pose – là j'ai du mal à vous comprendre – la question de savoir si l'esprit humain est mécanisable ou pas.

Jean-Paul Delahaye : Alors justement, c'est un peu lié à des questions qu'on a déjà abordées. La disjonction, c'est Gödel lui-même qui l'a énoncée, c'est "ou bien l'esprit humain est mécanisable, ou bien il y a des *indécidables absolus*". Alors d'abord, je précise un peu la notion d'*indécidables absolus*. Le théorème d'indécidabilité de Gödel dit que dans tel système, dès qu'il a un certain nombre de capacités, il y a au moins un indécidable, en fait une infinité, mais c'est toujours relatif à un système. Ce n'est donc pas un indécidable absolu. Cet indécidable, on pourrait, pourquoi pas, et c'est ce qu'on fait par exemple, ce qu'on envisage parfois avec l'hypothèse du continu, le rajouter aux axiomes. Mais donc le théorème de Gödel en lui-même, c'est un résultat relatif.

Il y a des indécidables relativement à un système donné. Un indécidable absolu, ça serait un énoncé que le mathématicien, ou que les mathématiciens, comprendraient bien, auxquel il donnerait un sens, et qui serait définitivement indémontrable par l'esprit mathématique. Alors, si l'esprit mathématique de la collectivité des mathématiciens, de l'ensemble des mathématiciens, se ramène à un mécanisme, donc à un algorithme, à ce moment-là, ce qu'il va être capable de produire, ça va être l'équivalent de ce que produit un système formel.

Et donc, il va y avoir des indécidables. Et donc si l'esprit humain est mécanisable, il va y avoir des indécidables absolus. Et s'il n'y a pas d'indécidables absolus, c'est que l'esprit humain, la collectivité des mathématiciens qui réfléchissent au réel, qui réfléchissent aux ensembles et qui essayent de trouver de nouveaux ensembles, c'est que cet esprit de la collectivité mathématique n'est pas mécanisable.

Étienne Klein : Mais si je vous comprends bien, on n'a pas la réponse à cette question. Mais est-ce qu'il y a une réponse ? Ou est-ce qu'il faut la décider ?

Jean-Paul Delahaye : Alors d'abord, il faut préciser que c'est une disjonction, mais c'est une disjonction au sens où "A est vrai ou B est vrai", mais éventuellement les deux sont vrais, ce n'est pas une disjonction exclusive. On peut réfléchir. Gödel avait plutôt tendance à penser qu'il y a des indécidables absolus.

Étienne Klein : Mais donc c'est une affaire de, non pas d'opinion, mais en tout cas, la subjectivité du mathématicien intervient dans la façon de répondre.

Jean-Paul Delahaye : Non, pas tout à fait. Parce que par exemple, concernant l'hypothèse du continu, les travaux qui ont été faits depuis plus d'un siècle sur l'hypothèse du continu sont extrêmement nombreux. Et malgré tout, ils bloquent. Alors je vais donner un exemple. Parmi les axiomes qu'on veut rajouter à la théorie des ensembles, il y a ce qu'on appelle les axiomes de grand cardinaux qui affirment l'existence d'ensembles qui sont très grands, encore plus grands que $\mathbb{R}$, plus grands que l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, etc. Donc ces axiomes de grand cardinaux, les logiciens considèrent qu'il faut les adopter, parce que si l'univers des ensembles existe vraiment quelque part, enfin, si vraiment c'est quelque chose qui est réel, il ne peut pas être petit.

Il est aussi grand que possible. Donc les axiomes de grand cardinaux, les logiciens sont d'accord pour dire, ceux-là, on les accepte. Et malheureusement, quand on accepte les axiomes de grand cardinaux qu'aujourd'hui on a étudiés, on ne peut pas démontrer l'hypothèse du continu ou sa négation.

L'hypothèse du continu échappe aux axiomes de grand cardinaux. Et donc cette façon dont l'hypothèse du continu échappe tout le temps, même quand on a beaucoup travaillé, beaucoup réfléchi, rajouté de nouveaux axiomes comme les axiomes de grand cardinaux, ça laisse supposer ou ça laisse soupçonner que l'hypothèse du continu pourrait bien être un indécidable absolu.

Étienne Klein : Et ce que vous dites là, ça me traumatise, Jean-Paul Delahaye. Parce que moi je croyais naïvement que le théorème de Gödel venait montrer que la théorie des mathématiques est une affaire bouclée. L'affaire était bouclée et là vous êtes en train de dire que non.

Jean-Paul Delahaye : Ah non, le théorème de Gödel parfois est mal compris. On l'interprète comme indiquant qu'il y a une sorte de contradiction dans les mathématiques. Une sorte de paradoxe. Ça, c'est une façon totalement fausse de voir les choses.

Parfois, on l'interprète aussi en disant que les mathématiques ne doivent pas être formalisées, parce que si on les formalise, après, il y a des indécidables etc. Ça, c'est aussi totalement faux. Ce que dit le théorème de Gödel s'applique aux mathématiques formalisées, mais aujourd'hui, tous les mathématiciens sont d'accord pour formaliser leurs mathématiques.

Et donc il n'y a pas de contradiction dans l'énoncé du théorème de Gödel, il y a juste l'affirmation qu'il y a, dans chaque théorie ayant un minimum de capacité, des énoncés qui échapperont à cette théorie.

Étienne Klein : Je vais vous poser une dernière question Jean-Paul Delahaye. Là, il faut répondre par oui ou par non. Il ne faut pas verser dans l'indécidabilité. Est-ce qu'on doit considérer que les mathématiques sont purement formelles, c'est-à-dire qu'elles sont un lieu où on manipule des symboles et des formules et le sens qu'on leur donne ne doit pas être considéré comme trop important? Moi je pense que non. C'est un point de vue personnel. Les mathématiciens formalistes pensent que oui.

Jean-Paul Delahaye : Moi je pense que non. Et si les mathématiques finalement ont autant d'efficacité en physique, je pense que justement, c'est parce qu'elles disent quelque chose de réel, sur le réel, sur un réel abstrait, mais sur le réel quand même.

Étienne Klein : Le réel des mathématiques, pas forcément le réel physique.

Jean-Paul Delahaye : Oui mais le réel des mathématiques qui joue dans la physique et qui permet de comprendre le monde physique, c'est ce qui s'est produit tout le temps. Et donc le réel des mathématiques il n'est pas indépendant du réel de la physique.

Étienne Klein : Merci Jean-Paul Delahaye d'être venu à La conversation scientifique. Je recommande la lecture de vos deux livres. Je recommande surtout de commencer par le premier qui est le plus facile *Pythagore à la plage* avec comme sous-titre *Les secrets des nombres dans un transat.* C'est bon pour les vacances, il vient de paraître en réédition chez Dunod. Et puis le second qui s'intitule *Aux frontières des mathématiques* sous-titre *Kurt Gödel et l'incomplétude* qui paraît lui aussi chez Dunod.

Jean-Paul Delahaye : Merci à vous.

Étienne Klein : C'était la conversation scientifique par Étienne Klein avec la collaboration de Thierry Beauchamp, à la technique Clara Galivel, et à la réalisation Luc Jean-Renaud[5].

[5]Au sujet des questions qui ont été évoquées dans cette conversation, on pourra se reporter avec intérêt à ces fichiers : La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen ou bien à cette vidéo de Patrick Dehornoy (1952-2019) Colloquium MathAlp 2018 : Patrick Dehornoy.