Transcription d'un extrait du livre *Un, deux, trois... l'infini* de George Gamow (fin du chapitre 3, Les propriétés insolites de l'espace, p. 51 à 55) pour comprendre la chiralité et la bande de Möbius

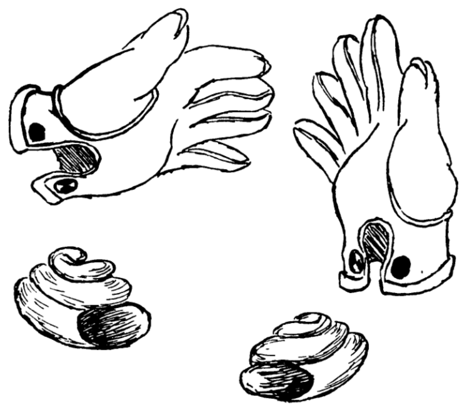

Fig. 20.

Nous ne pouvons pas conclure ce développement, sans parler des corps "gauches" et "droits" et de leur relation avec les propriétés générales de l'espace. Ce problème s'introduit très facilement si l'on considère une paire de gants. Si vous comparez ces gants (fig. 20) vous trouverez toutes leurs dimensions absolument identiques et cependant ils sont très différents, puisque vous ne pouvez pas mettre votre gant gauche à la main droite et vice versa. Vous pouvez le retourner et le tordre dans tous les sens, mais toujours le gant de la main droite restera celui de cette main et l'autre, celui de la main gauche On retrouve la même différence de construction pour les souliers, le mécanisme de direction des automobiles (construction française et anglaise), les clubs de golf et beaucoup d'autres objets.

Par contre, maints autres objets, comme les chapeaux (chapeaux d'hommes seulement, naturellement), les raquettes de tennis ne présentent pas de telles différences ; personne n'ira acheter une douzaine de tasses à thé avec l'anse à gauche, et c'est à coup sûr pour se moquer de vous qu'un voisin viendra vous emprunter une clef anglaise serrant à gauche. Quelle est la différence entre ces deux sortes d'objets ? Si vous réfléchissez un peu, vous verrez que les objets comme les chapeaux ou les tasses à thé possèdent un plan de symétrie qui les sépare en deux moitiés identiques. De tels plans de symétrie n'existent pas pour les gants ou les souliers et, de n'importe quelle façon que vous vous y preniez, jamais vous n'arriverez à découdre dans un gant deux parties identiques. Si l'objet ne possède pas de plan de symétrie, ou comme nous dirons est asymétrique, il existe sous deux types différents, un droit et un gauche. Cette différence se produit non seulement pour les objets fabriqués par l'homme comme gants, souliers, mais aussi très souvent dans la nature. Par exemple, il y a deux variétés d'escargots, qui sont identiques à tous points de vue, sauf une différence : pour une variété, la spirale de la coquille est orientée dans le sens des aiguilles d'une montre, alors qu'elle l'est en sens contraire pour l'autre. Même les molécules, partie élémentaire de toute substance, possèdent souvent des formes droites et gauches. On ne peut pas voir les molécules, mais elles présentent une asymétrie lorsqu'elles sont cristallisées et lorsqu'on étudie leurs propriétés optiques. C'est ainsi qu'il y a deux sortes de sucres, droits et gauches et probablement aussi deux sortes de bactéries qui mangent le sucre, chacune ne s'attaquant qu'à une sorte de sucre.

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, juin 2025.

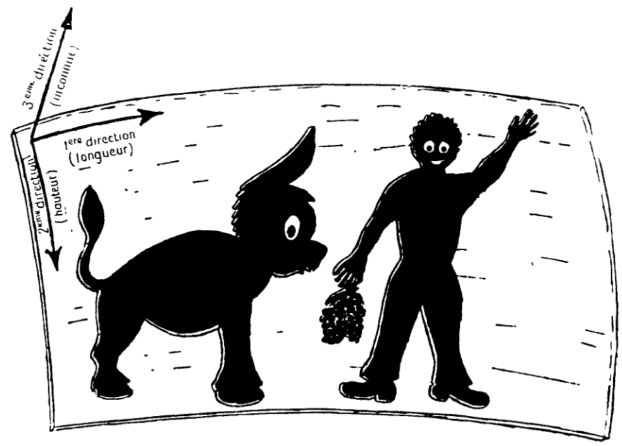

Fig. 21. Dessin de créatures-ombres à deux dimensions, vivant sur un plan. Cette sorte de créatures à deux dimensions n'est guère "pratique". L'homme a une face, mais n'a pas de profil et ne peut pas mettre dans sa bouche la grappe de raisins qu'il tient à la main. L'âne peut manger les raisins, mais ne peut marcher qu'à droite ; s'il veut aller à gauche, il doit reculer. Ce n'est pas rare pour les ânes, mais guère commode en général.

Comme nous venons de le dire, il est impossible de transformer un gant, de "droit" en "gauche". Mais est-ce réellement vrai ? Ne peut-on pas imaginer un espace bizarre où cela serait possible ? Pour répondre à cette question, cherchons quel serait le point de vue des habitants plats d'une surface, que nous pouvons observer nous-mêmes de notre univers plus complexe à trois dimensions. Regardez la figure 21 représentant quelques exemples des habitants possibles d'un espace n'ayant que deux dimensions. L'homme tenant dans ses mains une grappe de raisins n'a qu'une "face" et pas de "profil". Mais l'animal est un âne-de-profil ou, pour être plus précis, un âne-de-profil, regardant-de-l'œil-droit. Il est aussi possible, bien entendu, de dessiner un "âne-de-profil, regardant-de-l'œil-gauche", et, puisque les deux ânes sont réduits à une surface, ils ne diffèrent, à un point de vue à deux dimensions, que comme un gant droit et un gant gauche dans notre espace ordinaire. On ne peut pas superposer un "âne gauche" et un "âne droit" puisque pour superposer à la fois leurs nez et leurs queues, il faudrait en retourner un, de sorte que ses pattes seraient alors en l'air et n'appuieraient plus sur le sol.

Mais si vous sortez l'un des ânes de la surface, le retournez dans l'espace et le replacez dans le plan, les deux ânes deviendront identiques. Par analogie ne serait-il pas possible de transformer un gant droit en gauche en le sortant de notre espace dans une quatrième direction, en le faisant tourner de façon convenable avant de le replacer dans notre espace ? Mais notre espace physique n'a pas de quatrième dimension et la méthode dont nous venons de parler est impossible. N'y a-t-il pas une autre méthode ?

Revenons à notre monde à deux dimensions, mais au lieu de considérer, comme dans la figure 21, une surface plane ordinaire examinons les propriétés de la surface dite de "Möbius". Cette surface, à laquelle on a donné le nom d'un mathématicien allemand qui l'a étudiée, il y a presque un siècle, peut être réalisée aisément en prenant une longue bande de papier ordinaire que l'on tord une fois avant de coller ses extrémités. Il suffit de regarder la figure 22 pour comprendre. Cette surface a plusieurs propriétés particulières dont l'une peut être facilement découverte en la coupant avec des ciseaux suivant une ligne parallèle aux bords (le long des flèches de la figure 22). Vous vous attendez sans doute à obtenir deux anneaux séparés votre espérance sera déçue et vous n'aurez qu'un seul anneau, deux fois plus long que le premier et deux fois moins large.

Qu'arrive-t-il à un âne "de profil" lorsqu'il marche le long de la surface de Möbius? Supposons qu'il parte de la position 1 (fig. 22) nous montrant son profil gauche. S'il continue, passant par les positions 2 et 3, lorsqu'il arrivera finalement à son point de départ, il se trouvera, à votre étonnement, et aussi au sien, dans une position embarrassante (position 4) les pattes en l'air. Il pourra, bien entendu, tourner dans sa surface de façon à se remettre sur ses pattes mais il sera alors tourné dans l'autre sens.

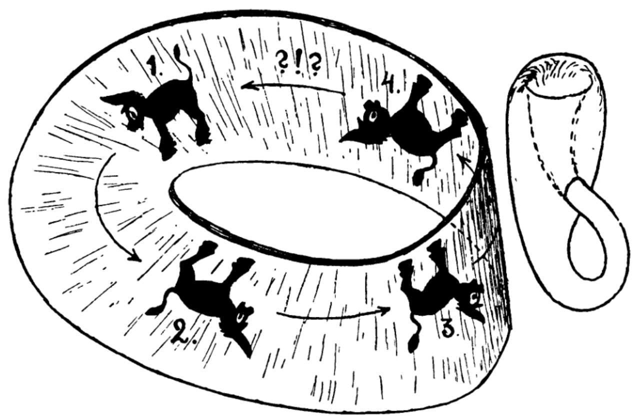

Fig. 22. Surface de Möbius et bouteille de Klein.

Nous voyons qu'en marchant le long d'une surface de Möbius, notre âne "gauche" s'est transformé en un âne "droit". Remarquons que cette transformation est réalisée en laissant constamment l'âne sur la surface sans qu'il soit nécessaire de le faire pivoter dans l'espace. Sur une surface torsadée, un objet droit peut être transformé en un objet gauche, et vice versa simplement en lui faisant parcourir toute la surface. Le ruban de Möbius de la figure 22 représente une partie d'une surface plus générale, connue sous le nom de bouteille de Klein (fig. 22, à droite) qui n'a qu'un seul côté et se referme sur elle-même sans avoir d'arête vive. Puisque cela est possible pour une surface à deux dimensions, il doit en être de même pour notre espace à trois dimensions, à condition bien entendu de le tordre de façon convenable. Mais il n'est pas facile d'imaginer une torsade de Möbius dans l'espace. Nous ne pouvons pas observer notre espace de l'extérieur comme nous l'avons fait pour la surface de l'âne et il est toujours difficile de voir clairement les choses lorsque l'on est en plein au milieu d'elles. Il n'est pas impossible que l'espace astronomique soit clos sur lui-même et de plus torsadé à la manière de Möbius.

S'il en est réellement ainsi, un voyageur, après avoir parcouru tout l'univers, reviendra gaucher, avec le cœur à droite, et les fabricants de gants et de souliers pourront peut-être simplifier leur production en ne fabriquant qu'une seule sorte de souliers ou de gants et en faisant faire le tour de l'univers à une moitié de ceux-ci, de façon à obtenir des paires.

C'est par cette pensée bizarre que nous terminerons notre discussion sur les propriétés insolites des espaces insolites.