Analyse mathématique. *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* Note de M. G.-H. Hardy, transmise par M. J. Hadamard.

1. MM. H. Bohr et E. Landau ont donné tout récemment [*] la démonstration que la plupart des zéros complexes de $\zeta(s)$ sont situés, quel que soit δ positif, dans le domaine $\frac{1}{2}-\delta<\sigma<\frac{1}{2}+\delta$. Je me propose maintenant de démontrer que, *parmi les zéros de $\zeta(s)$, il y en a une infinité sur la droite $\sigma=\frac{1}{2}$* [†].

Je pars d'une formule connue de M. Cahen [‡], savoir

$$e^{-y}=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\Gamma(u)y^{-n}du \qquad [\Re(y)>0,\ \ k>0]\ ;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$1+\frac{1}{\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\Gamma(u)y^{-n}\zeta(2u)du=1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-n^2y} \qquad \left(k>\frac{1}{2}\right).$$

Je prends maintenant pour chemin d'intégration la droite $\sigma=\frac{1}{4}$. En faisant application du théorème de Cauchy et des formules de Riemann

$$\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\xi(s)=\xi\left(\frac{1}{2}+ti\right)=\Xi(t),$$

où $\Xi(t)$ est réelle pour t réel, on est conduit à l'équation

$$1+\sqrt{\frac{\pi}{y}}-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{4}+ti}\frac{\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}dt=1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-n^2y}. \tag{1}$$

Dans cette équation, je pose $y=\pi e^{i\alpha}$, où $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$ et

$$e^{-y}=e^{-\pi\cos\alpha-i\pi\sin\alpha}=e^{\pi i\tau}=q=\rho e^{i\Phi}\ ;$$

et j'obtiens la formule

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}dt=\pi\cos\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{4}i\alpha}F(q), \tag{2}$$

où

$$F(q)=1+2\sum_{1}^{\infty}q^{n^2}=\vartheta_3(0,\tau).$$

∗. *Comptes rendus*, 12 janvier 1914.

†. J'ai communiqué déjà ce résultat à la Société mathématique de Londres (séance du 12 mars 1914).

‡. Thèse (*Annales École Normale supérieure*, 1894, p. 99). Cette formule a été retrouvée par M. Mellin (*Acta Soc. Fennicæ*, t. XX, n° 7, 1895, p. 6) qui en a fait des applications intéressantes.

Enfin, en différentiant $2p$ fois par rapport à α, on a

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right) t^{2p}\,\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}dt = \frac{(-1)^p\pi}{4^{2p}}\cos\frac{1}{4}\alpha - \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{2p}\left[\frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{4}i\alpha}F(q)\right]. \tag{3}$$

2. Je vais me servir maintenant d'un lemme tiré de la théorie des fonctions elliptiques. Je suppose que α tende vers $\frac{1}{2}\pi$, de sorte que q tende vers -1 suivant un chemin tangent au rayon $\Phi=\pi$. Cela étant, je dis que le dernier terme de l'équation (3) tend, quel que soit p, vers la limite zéro. Pour cela, il suffit évidemment que toutes les fonctions

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^{2p}F(q) = 2\sum_1^\infty n^{4p}q^{n^2}$$

tendent vers zéro. Mais cette dernière proposition se déduit comme corollaire des théorèmes généraux qu'on doit à MM. Bohr et Marcel Riesz, au sujet de la sommabilité des séries de Dirichlet.

La série §

$$1^{-s}+0+0-4^{-s}+0+0+0+0+q^{-s}+0+\ldots,$$

convergente pour $\sigma>0$ représente la fonction

$$(1-2^{1-2s})\zeta(2s)$$

régulière dans tout le plan et d'ordre fini dans tout demi-plan $\sigma>\sigma_0$. La série est donc sommable, pour toute valeur de s, par les moyennes de Cesàro d'ordre assez élevé ; et pour s entier négatif, elle a la somme

$$(1-2^{1-2s})\zeta(2s)=0$$

3. Il s'ensuit que, quand α tend vers $\frac{1}{2}\pi$, l'intégrale (3) tend vers la limite $\frac{(-1)^p\pi}{4^{2p}}\cos\frac{1}{8}\pi$. Supposons maintenant que $\Xi(2t)$ garde un signe pour $t>T>1$, par exemple le signe positif. Alors on a, par un théorème connu,

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}\right) t^{2p}\,\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}dt = \frac{(-1)^p\pi}{4^{2p}}\cos\frac{1}{8}\pi. \tag{4}$$

Soit p impair. On a

$$\int_T^\infty < -\int_0^T < KT^{2p}, \tag{5}$$

où K est indépendant de p. Mais cela est impossible. Il y a en effet, d'après notre hypothèse, un nombre δ positif tel que $\Xi(2t)>\delta$ pour $2T<t<2T+1$. Donc

$$\int_T^\infty > \int_{2T}^{2T+1} > \delta K_1(2T)^{2p}, \tag{6}$$

où K_1, comme K, est positif et ne dépend nullement de p. Enfin, des inégalités (5) et (6) je tire

$$\delta K_1 2^{2p} < K\ ;$$

donc, pour p assez grand, une contradiction.

§. *Note de la traductrice : ne serait-ce pas plutôt un 9 qu'un q au neuvième terme de la somme ?*