Théorème de Morley

Yves Ladegaillerie

On appelle *trissectrice* d'un couple de demi-droites D et D' d'origine O, toute demi-droite d'origine O, contenue dans le secteur délimité par D et D', et dont l'angle géométrique avec l'une des demi-droites est égal au tiers de l'angle géométrique entre D et D'.

> Théorème (Morley) : les trois points d'intersection des trissectrices "adjacentes" (cf. figure 1) d'un triangle non plat forment un triangle équilatéral.

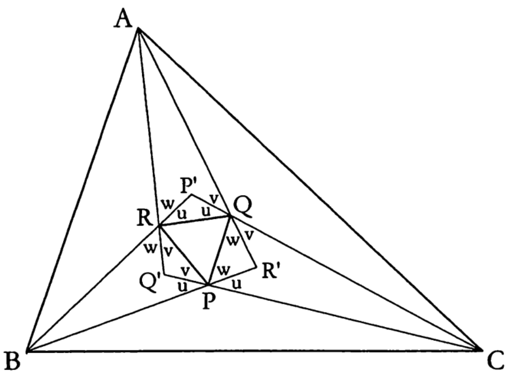

Figure 1

☐ On commence par une construction auxiliaire : soit P, Q, R un triangle équilatéral et u, v, w trois scalaires éléments de [0, $\pi/3$[tels que u+v+w=$2\pi/3$. On construit sur les côtés de PQR trois triangles isocèles P'QR, PQ'R, PQR' dont les angles à la base sont respectivement u, v, w ; on note A, B, C les intersections respectives de (QR') et (Q'R), de (RP') et (R'P), de (PQ') et (P'Q). Un calcul élémentaire, utilisant la relation u+v+w=$2\pi/3$ permet de retrouver d'autres angles égaux à u, v, w : on les a marqués sur la figure. La droite (PP') est axe de symétrie des triangles PQR et P'QR ; c'est donc une bissectrice intérieure de P'BC et, comme $\widehat{\mathrm{BPC}} = \pi - u$ et $\widehat{\mathrm{BP'C}} = \pi - 2u$, on déduit $\widehat{\mathrm{BPC}} = \pi/2 + \widehat{\mathrm{BP'C}}/2$, ce qui implique que P est le centre du cercle inscrit à P'BC (cette relation angulaire est caractéristique de ce centre lorsque le point est sur la bissectrice en P' : cf. la discussion à la fin de cette note[1]). P est donc sur les bissectrices de $\widehat{\mathrm{P'BC}}$ et de $\widehat{\mathrm{P'CB}}$. On montre de même que Q est sur les bissectrices de $\widehat{\mathrm{Q'CA}}$ et de $\widehat{\mathrm{Q'AC}}$, puis que R est sur les bissectrices de $\widehat{\mathrm{R'AB}}$ et de $\widehat{\mathrm{R'BA}}$. Il en résulte que le triangle ABC ainsi construit a pour trissectrices les demi-droites [AQ), [AR), [BR), [BP), [CP), [CQ) ; son angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est égal à $3\widehat{\mathrm{QAR}}$ que l'on calcule : $3\widehat{\mathrm{QAR}} = 3(\pi - 2u - v - w) = 3(\pi/3 - u) = \pi - 3u$ et, de façon analogue, on a $\widehat{\mathrm{B}} = \pi - 3v$ et $\widehat{\mathrm{C}} = \pi - 3w$.

Démonstration du théorème : soit A'B'C' le triangle donné et u, v, w les scalaires déterminés par $\widehat{\mathrm{A'}} = \pi - 3u$, $\widehat{\mathrm{B'}} = \pi - 3v$ et $\widehat{\mathrm{C'}} = \pi - 3w$. Comme ils vérifient u+v+w=$2\pi/3$, la construction auxiliaire précédente à partir d'un triangle équilatéral quelconque PQR mène à un triangle ABC tel que $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A'}}, \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B'}}, \widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{C'}}$ et qui est donc semblable à A'B'C' ; la similitude en question transforme les trissectrices de ABC en celles de A'B'C' et le triangle équilatéral PQR en un triangle équilatéral dont les sommets sont les intersections des trissectrices "adjacentes" de A'B'C'. ■

Retranscription de la page 336 du livre d'Yves Ladegaillerie Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique, Éditions Ellipses, 2003.

[1] à la fin de 2.1.1.B du livre.

Discussion de fin du paragraphe 2.1.1.B : selon le cas, les droites seront trois bissectrices intérieures ou bien deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure. La construction est impossible lorsque (A'A") est parallèle à Δ_{B} ou Δ_{C}. Cela se produit lorsque Δ_{B} ou Δ_{C} est orthogonale à Δ_{A} : en effet, si (A'A")// Δ_{C} (cf. figure 2),

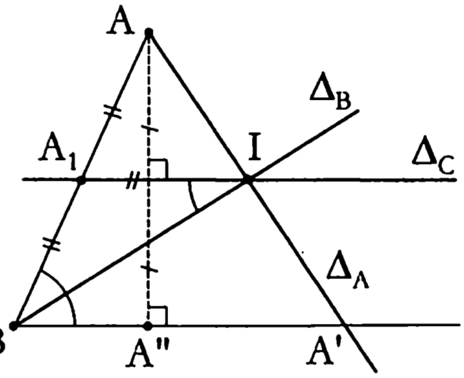

FIGURE 2

$\mathrm{A_I}$BI est isocèle en $\mathrm{A_I}$ (angles égaux en B et I) et, comme $\mathrm{A_I}$ est au milieu de [AB], I est sur le cercle de diamètre [AB] et IAB est rectangle en I. De fait, deux bissectrices d'un triangle ne sont jamais orthogonales : si I est centre du cercle inscrit (cf. figure 3)

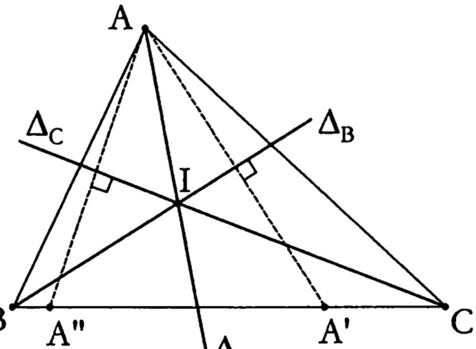

FIGURE 3

on a $\widehat{\mathrm{BIC}} = \pi/2 + \widehat{\mathrm{A}}/2$, car dans IBC, on a $\widehat{\mathrm{BIC}} = \pi - (\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}})/2 = \pi - (\pi - \widehat{\mathrm{A}})/2 = \pi/2 + \widehat{\mathrm{A}}/2$ et l'angle $\widehat{\mathrm{BIC}}$ est donc obtus. Un calcul analogue montre que, si $\mathrm{I_A}$ est l'intersection de la bissectrice intérieure en A avec les bissectrices extérieures en B et C, alors $\widehat{\mathrm{BI_AC}} = \pi/2 - \widehat{\mathrm{A}}/2$: c'est un angle aigu. La construction n'est donc possible que s'il n'y a pas de droites orthogonales parmi les trois droites données et, selon que sur elles il y a trois demi-droites qui font deux à deux des angles obtus ou bien deux à deux des angles aigus, on aura affaire à trois bissectrices intérieures ou à deux extérieures et une intérieure.