

Recension du livre *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, de A. Connes et M. Marcolli, AMS, 2007. 785 p., par Éric Leichtnam, paru dans la Gazette des mathématiciens n° 118, octobre 2008, éditeur Société Mathématique de France.

Présentation Générale

Alain Connes et Matilde Marcolli sont les deux auteurs du livre “Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives”. Ce livre est publié dans la collection “Colloquium Publications of the American Mathematical Society”, 2007. Il comporte 785 pages et a été publié fin 2007. La longueur de l’ouvrage s’explique en partie par le fait que les auteurs rappellent avec précision la définition des notions de base dans chacun des domaines de physique ou de mathématiques considérés.

L’hypothèse de Riemann et la construction d’une théorie de la gravitation quantique sont les deux grands problèmes associés respectivement à la répartition de l’ensemble des nombres premiers et à la physique de l’espace-temps. L’idée directrice et unificatrice de cet ouvrage est que la géométrie non commutative permet de mettre en évidence des analogies structurelles dans l’étude de l’ensemble des nombres premiers et dans celle de l’espace-temps. Ces analogies s’éclairent mutuellement pour mettre progressivement en place un programme de travail, sous forme d’un dictionnaire, où chaque progrès dans l’établissement d’un cadre conceptuel susceptible d’expliquer l’hypothèse de Riemann admet une contrepartie dans la théorie de la gravitation et vice versa. Donnons brièvement deux arguments pour expliquer ce point de vue.

1) Alain Connes avait donné des raisons de croire que le groupe de renormalisation (\mathbb{R}_+^*, \times) de la physique des champs devrait fournir l’interprétation galoisienne (suggérée par André Weil) du noyau de l’application d’Artin $: C_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}, \mathbb{Q})$ de la théorie du corps de classe du corps des rationnels \mathbb{Q} ($C_{\mathbb{Q}}$ désigne le groupe des classes d’idéles). Un pas important vers une interprétation (galoisienne) motivique du groupe de renormalisation est accompli dans le chapitre 1, via le “groupe cosmique” conjecturé par Pierre Cartier et une identification non canonique avec le groupe de Galois motivique dans la théorie des motifs de Tate mixtes.

2) Les auteurs dégagent (dans le chapitre 4) une analogie entre la transition de phase électro-faible du modèle standard et les transitions de phase de certains systèmes de mécanique statistique quantique (“de type Bost-Connes”) apparaissant en théorie des nombres. A partir de cette analogie, ils suggèrent une piste intéressante pour pouvoir étendre la transition de phase électro-faible au secteur gravitationnel plein : le modèle électro-faible unifie le champ électromagnétique et la force faible, il ne contient pas la gravitation. À ce stade, la géométrie de l’espace-temps devrait apparaître à travers un mécanisme de brisure spontanée de symétrie et un processus de refroidissement analogues à ceux mis en évidence en théorie des nombres par Connes et ses coauteurs (voir chapitres 3 et 4). Dans cette approche, la construction d’une catégorie appropriée de correspondances, comme dans la théorie de Grothendieck des motifs, est le défi principal pour pouvoir effectuer un progrès notable à la fois sur l’hypothèse de Riemann et sur la théorie de la gravitation quantique.

Cet ouvrage rassemble en un tout cohérent et unifié de nombreux résultats de recherche de Connes, souvent en collaboration, principalement avec Marcolli. Ces résultats sont mis en perspective confor-

mément à la vision globale que possède Alain Connes de la réalité mathématique et en liaison avec les travaux des autres chercheurs. En outre, ce texte fournit des explications et des éclairages qui ne se trouvent pas dans les articles. Ce livre, composé de quatre grands chapitres, s'adresse à un public large. D'une part aux mathématiciens confirmés (non spécialistes du sujet) désirant voir comment la géométrie non commutative s'applique à la théorie quantique des champs et à la théorie des nombres. D'autre part aux jeunes chercheurs désirant travailler dans ces domaines. Les auteurs donnent régulièrement des exemples concrets pour illustrer les concepts utilisés, classiques ou nouveaux, ainsi que les résultats de recherche. En outre, cet ouvrage se suffit pratiquement à lui-même. Ainsi le lecteur n'a nullement besoin pour l'étudier, de consulter des livres traitant respectivement des sujets suivants : la théorie quantique des champs, les algèbres de Hopf, le problème de Riemann-Hilbert, les schémas en groupes, les motifs, le modèle standard de la physique des particules, la cohomologie cyclique, les corps globaux et les fonctions L de Hecke, la théorie du corps de classe, la théorie des algèbres d'opérateurs, la mécanique statistique quantique, des résultats de Shimura sur le corps modulaire, la théorie de la multiplication complexe, la KK -théorie de Kasparov, la formule des traces de Lefschetz, la preuve d'André Weil de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions, etc.

Cet ouvrage met en place un programme de recherche très prometteur et ouvre de nombreuses pistes de recherche. Ce texte est agréable à lire et les démonstrations sont bien rédigées : les auteurs ont fourni un travail rédactionnel considérable et de très grande qualité. Enfin, il est inutile de rappeler que nombre de résultats présentés dans ce livre ont suscité un vif intérêt de la part des communautés internationales de mathématiques et de physique.

Brève description des quatre chapitres de ce livre

Chapitre 1 : Quantum fields, noncommutative spaces, and motives

Ce chapitre comprend environ 340 pages et est divisé en 19 sous-chapitres.

Les auteurs rappellent la problématique de la physique quantique des champs. À une théorie quantique (perturbative) des champs donnée, on associe des graphes de Feynman. À chacun de ces graphes, on associe une intégrale en général divergente. La renormalisation des physiciens consiste à régulariser ces intégrales pour leur donner une valeur finie tout en obtenant un excellent accord avec l'expérience ; par exemple, la charge d'un électron est une quantité renormalisée. Ce processus est très subtil car les intégrales associées aux sous-graphes sont divergentes de sorte que le résultat final dépend de la façon dont on a fait les régularisations intermédiaires. L'approche de Connes-Kreimer est expliquée en détail. Le processus de renormalisation est codé dans une certaine algèbre de Hopf et s'interprète comme une factorisation de Birkhoff des lacets pour un problème de Riemann-Hilbert. Ensuite, les auteurs expliquent comment la correspondance de Riemann-Hilbert (équation différentielle à monodromie prescrite) est présente dans la renormalisation d'une théorie perturbative des champs. La catégorie des fibrés vectoriels plats sur un disque infinitésimal joue un rôle crucial. Il s'agit d'une catégorie tannakienne dont le schéma en groupe associé est de la forme $\mathbb{U} \times G_m$ où \mathbb{U} est le schéma en groupe associé à une algèbre de Hopf commutative bien identifiée et G_m désigne le groupe multiplicatif. La catégorie des représentations de dimension finie de $\mathbb{U} \times G_m$ code de manière précise la correspondance de Riemann-Hilbert sous-jacente à la renormalisation

perturbative. En outre, $\mathbb{U} \rtimes G_m$ apparaît comme le groupe de Galois “cosmique” conjecturé par Cartier : il agit comme groupe de symétrie universel de l’ensemble des théories renormalisables. Soit G le groupe des difféomorphismes d’une théorie renormalisable, les auteurs expriment alors le groupe de renormalisation comme la composée des trois flèches (bien identifiées) suivantes :

$$\mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m \rightarrow G \rtimes \mathbb{G}_m,$$

\mathbb{G}_a désignant le groupe additif. Ils signalent que $\mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$ apparaît (de manière non canonique) comme un groupe de Galois motivique dans la théorie de motifs de Tate mixte. Ils rappellent de nombreuses définitions de la théorie des motifs et soulèvent plusieurs questions ouvertes sur les liens entre motifs et théorie quantique des champs (cf. sous-chapitre 8).

Ensuite, les auteurs expliquent soigneusement (dans le sous-chapitre 9) les concepts et la problématique associés au modèle standard de la théorie des particules élémentaires. Ces dernières sont divisées en deux classes. D’une part les fermions, qui sont les constituants de base de la matière, et d’autre part les bosons, qui transmettent les interactions. Pour expliquer le mécanisme permettant à la plupart des particules d’avoir une masse, on a postulé dans les années soixante l’existence de particules (ou champs) intermédiaires appelés bosons de Higgs. Un gigantesque accélérateur et collisionneur de particules sera mis prochainement en service (au CERN de Genève) afin de mieux comprendre la structure fine de la matière. Notamment, on cherchera à détecter les bosons de Higgs et à préciser (en cas d’existence) leurs masses.

Dans le sous-chapitre 10, les auteurs rappellent la célèbre notion de triplet spectral (A, H, D) , l’algèbre A représente les fonctions coordonnées sur un espace non commutatif. L’élément de longueur est donné par $ds = D^{-1}$. On a une notion de spectre des dimensions, elles peuvent être complexes. Ils résument les principes de base de la cohomologie cyclique et expliquent la formule de l’indice local en géométrie non commutative. Dans le sous-chapitre 19, ils parviennent à définir des espaces X_z de dimension (spectrale) complexe z , pourvu que le procédé de régularisation dimensionnelle s’applique à z . Dans le sous-chapitre 11, ils étudient le développement asymptotique de $\text{Tr}(f(D/\Lambda))$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est paire, quand le paramètre de masse tend vers l’infini. Il s’agit du principe de l’action spectrale dû à Connes et Chamseddine. Dans le sous-chapitre 13, les auteurs introduisent une algèbre de dimension finie, essentiellement : $\mathbb{C} \oplus \mathbb{H}_L \oplus \mathbb{H}_R \oplus M_3(\mathbb{C})$ où \mathbb{H} désigne l’algèbre des quaternions. Ils la munissent d’une structure réelle (de KO -dimension 6) et étudient sa géométrie en liaison avec certaines particules du modèle standard. Dans le sous-chapitre 18 ils classifient plus généralement les géométries non commutatives finies de KO -dimension 6.

Dans les sous-chapitres 14, 15, 16 et 17, les auteurs décrivent un modèle mathématique, dû à Connes, Chamseddine et Marcolli, pour rendre compte des propriétés du modèle standard minimalement couplé à la gravitation. Plus précisément, les auteurs considèrent l’espace non commutatif défini par le produit $M \times F$ où M est une variété compacte spinorielle de dimension 4 et F est la géométrie non commutative finie de KO -dimension 6 mentionnée plus haut. Bien entendu $M \times F$ fait partie d’un triplet spectral muni d’une structure précise de type (A, H, D, J, γ) . Ils montrent alors (en gros) que le groupe des automorphismes de cet espace non commutatif coïncide avec le groupe de symétries de gauge du lagrangien du modèle standard minimalement couplé à la gravitation. Ce dernier étant un produit semidirect, il ne peut pas être le groupe des difféomorphismes d’une variété (“commutative”). À l’aide du principe d’action spectrale, ils retrouvent le lagrangien du modèle standard

minimalement couplé à la gravitation d'Einstein (en forme euclidienne). Ils parviennent également à exprimer ce modèle comme une pure gravitation sur une géométrie modifiée d'espace-temps. En outre, en utilisant leur machinerie et les équations du groupe de renormalisation, ils obtiennent une "postdiction" de la masse du quark "top" et prédisent, en faisant l'hypothèse additionnelle du "grand désert" c'est-à-dire l'absence de physique nouvelle jusqu'aux énergies d'unification, l'existence d'un boson de Higgs de masse de l'ordre de 170 GeV à 10 % près, ce qui coïncide avec les prédictions du modèle standard. Le modèle des auteurs présente un intérêt pour ceux qui veulent apprendre les concepts de la physique des particules en les voyant en action dans un cadre mathématique beau, propre et rigoureux. L'hypothèse du "grand désert" n'est probablement pas vérifiée expérimentalement, comme le montrent des estimations récentes de la masse du boson de Higgs par Fermi-Lab, et les résultats expérimentaux à venir du grand collisionneur de hadrons au CERN donneront des informations précieuses pour affiner la description de la structure fine de la géométrie d'espace-temps.

Chapitre 2 : The Riemann zeta function ζ and non commutative geometry

Ce chapitre comprend environ 97 pages et est divisé en 10 sous-chapitres.

Les auteurs décrivent une réalisation spectrale (due à Connes et rappelée plus bas) des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann (ζ) et des fonctions L de Hecke ainsi qu'une interprétation des formules explicites de Weil comme une formule des traces. L'action du groupe des classes d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$ sur l'espace des classes d'adèles $A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ joue un rôle crucial. Plus précisément, soit \mathbb{E} l'application définie par

$$\forall g \in C_{\mathbb{Q}}, \mathbb{E}(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qg)$$

où f appartient à une certaine complétion Hilbertienne de

$$\{h \in S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}), h(0) = 0, \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} h(x) dx = 0\}.$$

Écrivons de manière non canonique $C_{\mathbb{Q}} \simeq C_{\mathbb{Q},1} \times \mathbb{R}^{+*}$. Le groupe (abélien) $C_{\mathbb{Q},1}$ des classes d'idèles de norme 1 est compact et opère sur le conoyau de \mathbb{E} . Les auteurs peuvent considérer la décomposition spectrale suivante de coker \mathbb{E} :

$$\text{coker } \mathbb{E} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_{\mathbb{Q},1}}} \mathcal{H}_{\chi},$$

où le groupe (dual) des caractères $\widehat{C_{\mathbb{Q},1}}$ décrit l'ensemble des représentations irréductibles de $C_{\mathbb{Q},1}$. L'action du générateur infinitésimal de $\{1\} \times \mathbb{R}_+^*$ sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{χ} admet pour valeurs propres les $z - 1/2$ où z décrit l'ensemble des zéros critiques de la fonction L_{χ} : c'est la réalisation spectrale mentionnée plus haut. Pour $\chi = 1$, on obtient la fonction ζ .

Les auteurs expliquent que la partie oscillatoire $N_{\text{osc}}(E)$ de la fonction de comptage $N(E)$ des zéros de ζ ressemble de manière frappante, à un signe moins près, à la partie oscillatoire de la fonction de comptage des valeurs propres associées à un système hamiltonien. C'est parce qu'ils travaillent avec un conoyau, coker \mathbb{E} , que les auteurs peuvent expliquer ce signe moins. Dans le chapitre 4, ce conoyau est interprété comme un motif dans une catégorie abélienne d'espaces non commutatifs. Les auteurs considèrent aussi le cas d'un corps de nombres. Enfin, ils proposent une formule de Lefschetz pour les facteurs locaux archimédiens (introduits par Serre) des fonctions L des variétés

définies sur un corps de nombres.

Chapitre 3 : Quantum statistical mechanics and Galois symmetries

Ce chapitre comprend environ 140 pages et est divisé en 9 sous-chapitres.

Commençons par un bref rappel de mécanique statistique quantique. Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive qui ne soit pas une homothétie. Soit $\beta > 0$ l'inverse de la température. On définit un état φ_β sur l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ par la formule :

$$\forall x \in M_n(\mathbb{C}), \varphi_\beta(x) = \frac{\text{Tr}(xe^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}.$$

Un tel état vérifie la condition KMS_β ("condition d'équilibre" à la température $1/\beta$) pour le flot modulaire $\sigma_t(x) = e^{itH}xe^{-itH}$, $t \in \mathbb{R}$. L'apparition du flot $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est due au fait que φ_β n'est pas une trace sur $M_n(\mathbb{C})$ ou, de manière équivalente, au fait que l'endomorphisme $x \rightarrow x^*$ n'est pas unitaire pour le produit scalaire de $M_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi_\beta(xx^*)$.

Le résultat fondamental de Bost-Connes est la construction d'un C^* -système dynamique non commutatif $(\mathcal{A}, (\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}})$ constituant (en quelque sorte) "une réalisation en mécanique statistique quantique du corps de classe de \mathbb{Q} ". Bien sûr, la C^* -algèbre \mathcal{A} est de dimension infinie. Plus précisément, le système de Bost-Connes vérifie les propriétés suivantes. La fonction de partition coïncide avec la fonction ζ de Riemann, le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}; \mathbb{Q})$ est un groupe de symétrie. Il se produit en $\beta = 1$ un phénomène de transition de phase avec brisure spontanée de symétrie au sens suivant. Pour $\beta \in]0, 1]$, le système ne possède qu'un seul état KMS_β . Pour $\beta > 1$, l'ensemble des états KMS_β extrémaux est paramétré bijectivement par $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}; \mathbb{Q})$, le choix d'un état d'équilibre brise donc la symétrie. Enfin, \mathcal{A} possède une sous-algèbre arithmétique A telle que les valeurs des états KMS_∞ sur A engendrent \mathbb{Q}^{ab} .

Bost et Connes utilisent le fait qu'on sait décrire des générateurs de l'extension abélienne maximale de \mathbb{Q} : i.e. le douzième problème de Hilbert est résolu dans le cas de \mathbb{Q} . Les auteurs reformulent la construction du système de Bost-Connes en utilisant la notion de \mathbb{Q} -réseau de dimension 1. Il s'agit d'une paire (Λ, φ) où $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ est un réseau de \mathbb{R} et $\varphi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Q}\Lambda)/\Lambda$ est un homomorphisme de groupes abéliens. Ce dernier concept est relié à la structure de l'espace des classes d'adèles considéré au chapitre 2. La C^* -algèbre \mathcal{A} est alors interprétée comme la C^* -algèbre réduite d'un certain groupoïde.

En considérant la notion de \mathbb{Q} -réseau de dimension 2 et les classes de commensurabilité associées, les auteurs généralisent le système de Bost-Connes pour obtenir le système dit GL_2 . L'arithmétique associée est très intéressante, elle fait intervenir le corps modulaire et certaines séries d'Eisenstein. Les auteurs généralisent aussi le système de Bost-Connes au cas d'un corps quadratique imaginaire K . Ils utilisent d'une part le plongement d'un K -réseau de dimension 1 dans un \mathbb{Q} -réseau de dimension 2 et d'autre part la théorie de la multiplication complexe ainsi que la solution du douzième problème de Hilbert pour K .

Chapitre 4 : Endomotives, thermodynamics, and the Weil explicit formula

Ce chapitre comprend environ 156 pages et est divisé en 8 sous-chapitres. Il décrit un travail en collaboration des auteurs avec Caterina Consani.

Les auteurs utilisent des outils sophistiqués de géométrie non commutative (cohomologie cyclique, KK -théorie, théorie de Tomita) pour établir un nouveau cadre mathématique dans lequel la réalisation spectrale du chapitre 2 et l'application \mathbb{E} acquièrent une signification précise. Ce cadre repose sur trois ingrédients : endomotifs, processus de refroidissement et de distillation (en “thermodynamique non commutative”), cohomologie et motifs.

Un endomotif algébrique sur le corps de nombres \mathbb{K} est la donnée d'une \mathbb{K} -algèbre unifère définie par un produit croisé $A \rtimes S$ où A est une limite inductive de \mathbb{K} -algèbres commutatives unifères $A_\alpha, \alpha \in I$, et S est un semi-groupe unitaire agissant sur A (satisfaisant certaines propriétés). Bien sûr, A est l'algèbre des fonctions sur la limite projective des $\text{Spec } A_\alpha$. Cette notion contient et généralise les motifs d'Artin. Elle admet une version analytique sous la forme de la C^* -algèbre $C(\mathcal{X}) \rtimes S = \mathcal{A}$, où \mathcal{X} est l'ensemble des caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{K}}$. Le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ agit sur $C(\mathcal{X}) \rtimes S = \mathcal{A}$. Une mesure S -invariante μ sur \mathcal{X} induit un état φ sur \mathcal{A} .

Décrivons brièvement l'ingrédient thermodynamique. Notons $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot modulaire de (\mathcal{A}, φ) . Désignons par $\Omega_\beta (\beta > 0)$ l'ensemble des états KMS_β (pour σ_t) extrêmes réguliers de type I_∞ . Soit $\psi \in \Omega_\beta$, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall x \in \mathcal{A}, \psi(x) = \frac{\text{Tr}(\pi(x)e^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}$$

où π est une certaine représentation et H est un certain opérateur positif. Soit $\beta' > \beta$, on définit alors (par refroidissement à la température $1/\beta'$) un état dans $\Omega_{\beta'}$ par l'application injective suivante :

$$c_{\beta', \beta}(\psi)(x) = \frac{\text{Tr}(\pi(x)e^{-\beta' H})}{\text{Tr}(e^{-\beta' H})}.$$

Les auteurs regardent le fait d'associer la limite inductive $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Omega_\beta$ à (\mathcal{A}, φ) comme un processus de refroidissement. En quelque sorte on obtient les “points classiques” de l'espace non commutatif (A, σ_t) en diminuant la température et en considérant les états d'équilibres ainsi obtenus. Enfin on considère le système dual

$$(\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \rtimes_{\sigma_t} \mathbb{R}, (\theta_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}).$$

Un élément de $\widehat{\mathcal{A}}$ s'écrit formellement sous la forme $\int_{\mathbb{R}} x(t)U_t dt$ où $x \in C(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les U_t sont des unitaires de \mathcal{A} . Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors (le lecteur pourra supposer x à support compact) :

$$\theta_\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} x(t)U_t dt \right) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{it} x(t)U_t dt \in \widehat{\mathcal{A}}.$$

Décrivons brièvement l'ingrédient cohomologique. La théorie de la (co)homologie cyclique permet d'associer au système dual $(\widehat{\mathcal{A}}, \theta_\lambda)$ un morphisme cyclique δ “de refroidissement” entre deux modules cycliques. Le conoyau de δ , obtenu par “distillation” est noté $D(\mathcal{A}, \varphi)$; il joue un rôle crucial.

Le passage de (\mathcal{A}, φ) au système dual est l'analogie du passage de C courbe projective sur \mathbb{F}_q à $C \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$. En poursuivant cette analogie, l'action de θ_λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$) sur le groupe d'homologie cyclique $HC_0(D(\mathcal{A}, \varphi))$ est un substitut à l'action du Frobenius sur le groupe de cohomologie l -adique $H^1(C, \mathbb{Q}_l)$.

Au système dynamique de Bost-Connes du chapitre 2 les auteurs associent un endomotif important de la manière suivante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'algèbre :

$$A_n = \frac{\mathbb{Q}[u(n), u(n)^{-1}]}{(u(n)^n - 1)}$$

où $u(n)$ est une indéterminée. Si $n|m$, on définit un homomorphisme d'algèbre $\Xi_{n,m} : A_n \rightarrow A_m$ qui envoie $u(n)$ sur $u(m)^{m/n}$. Les applications $v \rightarrow vk$ induisent une action du semi-groupe $S = \mathbb{N}^*$ sur l'algèbre limite inductive $A = \lim_{\rightarrow} A_n$. En appliquant leur procédé de distillation à cet endomotif, les auteurs obtiennent un module cyclique $D(\mathcal{A}, \varphi)$ sur lequel agissent les θ_λ , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit maintenant χ un caractère du groupe compact $\widehat{\mathbb{Z}^*}$. L'expression $p_\chi = \int_{\widehat{\mathbb{Z}^*}} g\chi(g) dg$ définit un idempotent p_χ dans $\text{End}_\Lambda(D(\mathcal{A}, \varphi))$ dans la catégorie abélienne des Λ -modules. On obtient une décomposition :

$$HC_0(D(\mathcal{A}, \varphi)) = \sum_{\chi} HC_0(p_\chi D(\mathcal{A}, \varphi)).$$

Il se trouve alors que le générateur infinitésimal de l'action de \mathbb{R}_+^* , $HC_0(p_\chi D(\mathcal{A}, \varphi))$ fait apparaître tous les zéros de la fonction L_χ . La présence ici des éventuels zéros non critiques vient du fait, qu'à la différence du chapitre 2, $HC_0(p_\chi D(\mathcal{A}, \varphi))$ n'est pas un espace de Hilbert mais plutôt un espace de fonctions à décroissance rapide. L'application \mathbb{E} du chapitre 2 est interprétée ici comme une application de refroidissement. Dans le cas d'un corps de nombres \mathbb{K} autre que \mathbb{Q} , on ne dispose pas d'un endomotif de type Bost-Connes. Toutefois, en introduisant une certaine "application de restriction" de $\mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathbb{K}^*$ à $C_\mathbb{K}$ et au prix d'un surcroît de travail d'algèbre homologique, les auteurs parviennent à définir un certain conoyau d'un morphisme cyclique de sorte que la preuve précédente se généralise à \mathbb{K} . Le groupoïde $\mathbb{A}_\mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ et la C^* -algèbre associée jouent un rôle essentiel dans la démonstration. Ainsi, ils retrouvent la formule explicite de Weil sur le groupe $C_\mathbb{K}$ et reformulent l'hypothèse de Riemann (pour les fonctions L de Hecke sur \mathbb{K}) en un problème de positivité.

Ensuite les auteurs expliquent la preuve (donnée par André Weil) de l'hypothèse de Riemann pour une courbe C sur \mathbb{F}_q . Ils utilisent les diviseurs ou correspondances sur la surface $C \times_{\mathbb{F}_q} C$ et l'argument de positivité reposant sur l'inégalité de Castelnuovo. Soit maintenant \mathbb{K} un corps de nombres. Si $v \in \Sigma_\mathbb{K}$ est une place de \mathbb{K} , on note $a^{(v)}$ l'adèle de \mathbb{K} défini par $a^{(v)} = (a^{(v)}(w))_{w \in \Sigma_\mathbb{K}}$ où $a^{(v)}(w) = 1$ si $w \neq v$ et $a^{(v)}(v) = 0$. Les auteurs introduisent alors l'ensemble

$$\Xi_\mathbb{K} = \bigcup_{v \in \Sigma_\mathbb{K}} C_\mathbb{K} a^{(v)}$$

muni de son plongement dans $\mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathbb{K}^*$. Ils suggèrent que $\Xi_\mathbb{K}/C_{\mathbb{K},1}$ plongé dans $(\mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathbb{K}^*)/C_{\mathbb{K},1}$ est pour \mathbb{K} l'analogie de la courbe $C \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ pour le corps de fonctions de C . Le groupe $R_+^* \simeq C_\mathbb{K}/C_{\mathbb{K},1}$ agit sur $\Xi_\mathbb{K}/C_{\mathbb{K},1}$. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\Xi_\mathbb{Q}/C_{\mathbb{Q},1}$ est, du point de vue ensembliste, la réunion d'un singleton et de la famille des cercles de longueur $\log p$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers.

Les auteurs proposent alors un dictionnaire, motivé par des faits mathématiques précis, entre les concepts utilisés par Weil pour la courbe C et des éléments de géométrie non commutative pour \mathbb{K} .

Par exemple, à une correspondance de Frobenius $\sum_n a_n \text{Fr}^n$ sur C correspond $Z(f) = \int_{C_{\mathbb{K}}} f(g) Z_g d^*g$

où $f \in S(C_{\mathbb{K}})$ et Z_g est le graphe de g^{-1} agissant sur $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^*$. À une correspondance virtuelle, on associe une classe bivariante Γ au sens de Kasparov ; $Z(f)$ cité plus haut induit une classe bivariante $\Gamma(f)$. À la composition des correspondances de Weil correspond le cup-produit de la KK -théorie. On a une notion de degré d'une correspondance dans les deux situations. À la formule de Lefschetz (pour $\sum_n a_n \text{Fr}^n$ sur C) correspond le caractère de Chern bivariant de $\Gamma(f)$ etc.

Les auteurs semblent indiquer eux-mêmes que beaucoup de concepts restent à découvrir avant de pouvoir mettre en place une preuve de l'hypothèse de Riemann. Toutefois cette dernière constitue une motivation leur permettant de développer des mathématiques intéressantes en suivant un programme de travail précis.

Enfin, les auteurs analysent la transition de phase électro-faible dans le modèle standard en reprenant le travail de M. Sher. Ils mettent en évidence des analogies avec les transitions de phase décrites dans le chapitre 3 à propos des \mathbb{Q} -réseaux. Ce chapitre 4 se termine alors par un dictionnaire (et programme de travail) à la fois intrigant et fascinant entre d'une part l'hypothèse de Riemann et les \mathbb{Q} -réseaux et d'autre part la théorie de la gravitation quantique. Ainsi, à un \mathbb{Q} -réseau correspond un triplet spectral réel de dimension 3 (i.e. l'espace et non pas l'espace-temps), à une paire de deux réseaux commensurables correspond une correspondance spectrale, à la C^* -algèbre du groupoïde associé aux \mathbb{Q} -réseaux correspond l'algèbre de Hecke des fonctions de correspondances, à une série d'Eisenstein correspond $D \rightarrow \text{Tr}(D^{-n})$, à la variété de Shimura correspond l'espace des modules des opérateurs de Dirac etc.

Le livre se termine par deux appendices consacrés respectivement aux algèbres d'opérateurs et à la théorie de Galois. Les auteurs y rappellent notamment qu'une algèbre de von Neumann M (i.e. "l'ensemble des fonctions mesurables sur un espace non commutatif") possède une évolution temporelle intrinsèque $\sigma_t \in \text{Aut}(M)/\text{Inn}(M), t \in \mathbb{R}$.

Il m'est agréable de remercier Alain Connes pour m'avoir expliqué certains points importants du chapitre 1. J'ai également plaisir à remercier Benjamin Enriquez et François Golse dont les commentaires ont permis d'améliorer ce texte.

Éric Leichtnam,
CNRS, Université Paris VI,
Institut de Mathématiques de Jussieu