Traduction de l'article Une preuve du théorème de Morley

de Clarence Lubin, Université de Cincinnati

Le théorème de Morley surgit comme un sous-produit de résultats géométriques plus profonds que F. Morley [1] a obtenu il y a environ cinquante ans. Il peut être énoncé comme suit : *Les points d'intersection des trisectrices adjacentes des angles intérieurs d'un triangle sont les sommets d'un triangle équilatéral.* La plupart des nombreuses démonstrations de ce théorème qui ont été proposées sont soit géométriques [2] soit trigonométriques [3]. La procédure suivie ici, d'un autre côté, trouve les coordonnées des points d'intersection des angles trisecteurs dans le plan complexe [4].

Pour amener la preuve, référons-nous à la figure, où ABC peut être n'importe quel triangle. Dessinons le cercle circonscrit à ABC, appelons son rayon r, déterminons l'origine comme étant le centre du cercle, et faisons passer l'axe réel positif par le sommet C du triangle. Les sommets A et B sont représentés par les nombres complexes $re^{i\alpha}$ et $re^{i\beta}$, respectivement, où α et β sont positifs et inférieurs à 2π. Alors les trisectrices des angles intérieurs du triangle couperont le cercle en les points dont les coordonnées complexes sont fournies sur la figure.

Pour trouver les points d'intersection des trissectrices des angles, on utilise le résultat suivant [5], qui peut être simplement établi : *Si deux droites coupent le cercle $|z| = r$ en des points de coordonnées complexes a, b et c, d respectivement, le point d'intersection des droites est donné par*

$$z = (a^{-1} + b^{-1} - c^{-1} - d^{-1})/(a^{-1}b^{-1} - c^{-1}d^{-1}).$$

L'application de cette formule aux deux trissectrices adjacentes se coupant en N donne pour N le nombre complexe

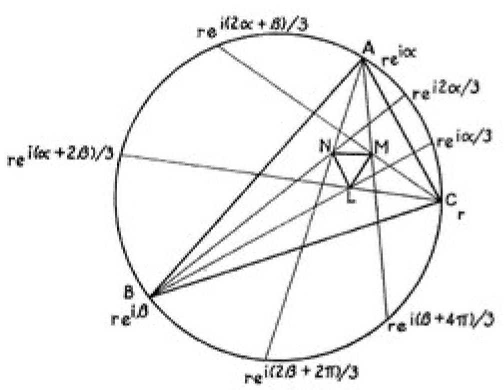
$$z_N = r\frac{e^{-i\beta} + e^{-i2\alpha/3} - e^{-i(2\beta+2\pi)/3} - e^{-i\alpha}}{e^{-i(\beta+2\alpha/3)} - e^{-i[\alpha+(2\beta+2\pi)/3]}}$$

Avec la notation

$$p = e^{i\alpha/3}, \qquad q = e^{i\beta/3}, \qquad \epsilon = e^{ir/3},$$

l'expression pour z_N se réduit aisément à

$$z_N = r(\epsilon p^2 q - \epsilon^2 q^2 p + p^2 - pq\epsilon + q^2\epsilon^2).$$



De façon similaire, pour les points d'intersection L et M, on trouve

$$z_L = r(q^2p - q^2 + qp - q + p)$$

Traduction de l'article A proof of Morley's theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 62, n$^{\circ}$2 (Février 1955), p. 110-112.

et

$$z_M = r(p^2q + \epsilon^2 pq - \epsilon^2 p^2 + p\epsilon - \epsilon q).$$

Le vecteur $\overrightarrow{LN}$ est donné par le nombre complexe

$$z_N - z_L = r[\epsilon p^2 q - (\epsilon^2 + 1)q^2 p + p^2 + (\epsilon^2 + 1)q^2 - pq(\epsilon + 1) + q - p]$$

qui peut être factorisé et réécrit

$$\overrightarrow{LN} = -r(q-p)(\epsilon^2 - q)(1-p)\epsilon.$$

De façon similaire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM} &= -r(q-p)(\epsilon^2 - q)(1-p), \\ \overrightarrow{MN} &= -r(q-p)(\epsilon^2 - q)(1-p)\epsilon^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|\overrightarrow{LM}| = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{NL}|,$$

et on conclut que le triangle LMN est équilatéral.

La longueur du côté du triangle équilatéral est donnée par

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{LN}| &= r|q-p||\epsilon^2 - q||1-p| \\ &= r.\ 2\ \sin[(\beta - \alpha)/6]\ 2\ \sin[(2\pi - \beta)/6]\ 2\ \sin(\alpha/6).\end{aligned}$$

En fonction des angles A, B, C du triangle ABC, cela devient

$$8r \sin(A/3) \sin(B/3) \sin(C/3),$$

une formule fournie par Kowaleski [3].

Bibliographie

1. F Morley, Extensions of Clifford's chain theorem, Amer. J. Math., vol. 51, 1929, p. 469.
   L'auteur donne là les références suivantes :
   F. Morley, vol. 6 (Décembre, 1924), Mathematical Association of Japan for Secondary Mathematics.
   F. Morley, Metric geometry of the plane n-line Trans. Amer. Math. Soc., vol. 1, 1900, p. 115.
   F. Morley, Reflexive Geometry, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 8, 1907, p. 14-24.
2. F. G. Taylor and W. L. Marr, The six trisectors of each of the angles of a triangle, Proc. Edinburgh Math. Soc. vol. XXXII, 1914, p. 119-123.
   J. M. Child, Proof of Morley's theorem, Math. Gaz., vol. 11, 1923, p. 171.
   J. Marchand, Sur une méthode projective dans certaines recherches de géométrie élémentaire, L'Enseignement Mathématique, vol. XXIX, 1930, p. 291.
   K. Lorenz, Ein Dreiecksatz, Deutsche Mathematik, vol. 2, 1937, p. 587-590.
   M. Zacharias, Uber der Zusammenhang des Morleyschen Satzes von den winkeldrittelnden Eckenlinien, eines Dreiecks mit den trilinearen Verwandschaften im Dreieck und mit einer Konfiguration (12, 16) der Dreiecksgeometrie, Deutsche Mathematik, vol. 3, 1938 p. 36-37.
   J. Mahrenholz, Bibliographische Notizen zu : K. Lorenz, Ein Dreiecksatz, Deutsche Mathematik, vol. 3, 1938, p. 272-274.
   H. v. Kaven, Ein Satz uber die Winkeldreiteilenden im Dreieck, Zeitschrift, fur Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen, vol. 69, 1938, p. 155-157.
   J. E. Hofman, Ein neuer Beweis der Morleyschen Satzes, Deutsche Mathematik, vol. 4, 1939, p. 589.
3. M. J. Neuberg, Sur les trisectrices d'un triangle, Mathesis, vol. 37, 1923, p. 356-357.
   H. v. Kaven, as above.
   G. Kowaleski, Beweis des Morleyschen Dreiecksatz, Deutsche Mathematik, vol. 5, 1940, p. 265-266.
4. R. Bricard, Sur les droites moyennes d'un triangle, Nouvelles Annales de Mathématique, 5th series, vol || (|xxx|), 1923, p. 241-254. This author proved Morley's theorem and extensions by means of an ingenious use of sets of concurrent lines without finding their points of intersection.
   H. Lebesgue, Sur les n-sectrices d'un triangle, l'Enseignement Mathématique, vol. 38, 1939-1940, p. 39-58.
5. This MONTHLY, Problem E 1106, vol. 61, 1954, p. 194, p. 643.