Séminaire Delange-Pisot-Poitou
(Théorie des Nombres)
1980-81

Comment l'hypothèse de Riemann ne fut pas prouvée

[Extraits de deux lettres de P. Cartier à A. Weil, datées du 12 août et du 15 septembre 1979]

P. Cartier
IHES
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette, France

Comme tu t'en souviens, je poursuis depuis plus de dix ans l'étude numérique de la fonction zêta de Selberg. J'ai mené ces recherches dans un grand scepticisme ambiant, personne ne voulant (ou n'osant) croire à un lien entre la fonction zêta de Selberg et celle de Riemann. J'avais un peu abandonné ce travail depuis quelques années. quelque peu découragé et je m'étais contenté à l'automne dernier de faire le point sur mes résultats, dans une note publiée de manière un peu confidentielle, et dont je t'enverrai une copie à mon retour sur le continent.

Or, il y a du nouveau, et assez surprenant ! En avril dernier, je donnais un exposé au Séminaire de théorie des nombres, dit DPP, où je mentionnais l'analogie entre ta forme du facteur local dans les "formules explicites" (d'après ta note russe) et la manière dont M. F. Vigneras a traduit l'équation fonctionnelle pour la fonction zêta de Selberg. Mon exposé ne contenait aucun résultat nouveau, mais eut pour résultat que je reçus de M. F. Vigneras un appel téléphonique quelques jours plus tard, pour me signaler des résultats numériques de Neunhoffer (Heidelberg). Je n'ai eu connaissance de ces résultats que de manière indirecte, par l'intermédiaire de Ms Audrey Terras (La Jolla, Californie) et de M. F. Vigneras (Paris), mais je vais prendre contact directement avec Neunhoffer.

La situation est résumée dans les tables que je te joins. La première est extraite de ma note citée ci-dessus et coïncide avec les resultats de Neunhoffer. En voici la signification. Soit $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ opérant sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$. On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})_0$, formé des fonctions f sur $\mathbb{H}$ invariantes par Γ, telles que $\int_0^1 f(x+iy)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $y > 0$, et que

$$\int_D |f(x+iy)|^2 \, \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{y^2}$$

soit fini (D est le domaine fondamental bien connu de Γ opérant dans $\mathbb{H}$). Sur cet espace opèrent la symétrie S définie par $Sf(z) = f(-\bar{z})$ et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$L = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \; ;$$

on a $S^2 = 1$ et $SL = LS$; donc L laisse stables les sous-espaces $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 respectivement de S. Le spectre de L dans chacun des ces espaces est

de

discret et l'on peut le mettre sous la forme des nombres

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 \qquad n = 1, 2, ... \qquad \text{pour } \mathcal{H}_- ,$$

$$\mu_n = \frac{1}{4} + s_n^2 \qquad n = 1.2.... \qquad \text{pour } \mathcal{H}_+$$

La table I donne les nombres $r_1, \ldots, r_{11}$.

J'ai obtenu ces nombres r_n par analyse directe du problème sous forme de valeurs propres d'un opérateur différentiel. Les détails sont dans ma note. Je dirai seulement qu'il m'a fallu des moyens de calcul puissants (Plusieurs heures du monstre IBM 370/168). J'ignore tout de la méthode de Neunhoffer, mais tout cela était obtenu dès août 1975.

La table II contient les nombres s_1 à s_8 d'après Neunhoffer. J'ai essayé de les retrouver par mes méthodes, mais malgré trois semaines de travail acharné en mai 1979, je n'y suis pas parvenu. La raison est bien connue des spécialistes d'analyse numérique : un problème avec conditions aux limites du type Neumann est toujours beaucoup plus délicat que le cas des conditions de Dirichlet.

La table III contient les (parties imaginaires) des premiers zéros de la fonction ζ de Riemann (d'après Haselgrove) et la table IV contient les premiers "zéros" de la fonction de Dirichlet

$$L(\chi_3, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)^s - \sum_{n=0}^{\infty} (3n+2)^s$$

(d'après R. Spira). Rappelons que $\zeta(s)L(\chi_3, s)$ est la fonction ζ du corps $\mathbb{Q}(3\sqrt{1})$.

La comparaison est intéressante. Dans la table de Neunhoffer, les nombres s_n se répartissent en trois classes A, B, C. La classe A comprend les nombres qui sont aussi "zéros" de la fonction $\zeta(s)$, et de même B pour $L(\chi_3, s)$, enfin la classe C rassemble tous les autres. Bien sûr, l'égalité doit être comprise avec la précision numérique donnée. La classe A contient tous les "zéros" de $\zeta(s)$ de l'intervalle étudié, alors que la classe B contient les "zéros" de $L(\chi_3, s)$ de l'intervalle étudié, à l'exception du 4° égal à 18,26199... (par défaut). Mais, comme l'a remarqué Audrey Terras, il doit exister une planète inconnue, et Neunhoffer a dû laisser échapper une valeur propre. En effet, d'après un résultat classique de Courant, la n-ième valeur propre pour le problème de Neumann est toujours majorée par la n-ième valeur propre pour le problème de Dirichlet, c'est-à-dire qu'on a toujours $s_n \leq r_n$. Les tables I et II contredisent cette inégalité sauf à admettre que Neunhoffer a manqué s_7 qui serait le 4^e "zéro" de $L(\chi_3, s)$, lui aussi brillant absent.

Ceci conduit donc à postuler que les zéros de la fonction $\zeta_{\mathbb{Q}(3\sqrt{1})}$ sont parmi les zéros de la fonction zêta de Selberg, et cette affirmation est plus forte que l'hypothèse de Riemann (conformément au rêve inavoué de Selberg).

Tout ceci est fort beau ; précisons que j'ai examiné attentivement les tables de R. Spira, qui donnent les zéros de certaines séries $L(\chi, s)$ et qu'il semble que seule $L(\chi_3, s)$ joue un rôle ; même la fonction ζ du corps de Gauss $\mathbb{Q}(i)$ ne semble pas intervenir. Bien sûr, en remplaçant $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par un sous-groupe de congruence, on peut raisonnablement espérer retrouver au moins les fonctions zêta des corps quadratiques.

Voici maintenant le dernier acte. Utilisant une suggestion de Deligne, qui avait entrepris une première vérification numérique, et profitant du calme de la Corse, je viens de faire une série étendue de calculs sur mon calculateur programmable portatif HP-97. L'idée est d'utiliser la formule des traces de Selberg que je mets sous la forme $U = V$ avec

$$\begin{aligned} U &= h\left(\frac{i}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} h(r_n) - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n}\, g(\log\, n^2) - 2\sum_{n=3}^{\infty} H(n) \frac{\log\, u_n}{\sqrt{n^2-4}}\, g(\log\, u_n^2) \\ V &= S + A + B + g(0)\cdot \log\frac{\pi}{2} + E + F - \sum_{n=1}^{\infty} h(s_n). \end{aligned}$$

On a posé

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}\int_0^{\infty} t\ \tanh\ \pi t\ h(t)\mathrm{d}t \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\mathrm{d}t \\ B &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{e^{2\pi t/3} - 1 + e^{-2\pi t/3}}\mathrm{d}t \\ E &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} h(t)\ \log\ t\ \mathrm{d}t \\ F &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{e^{t/2}-1} - \frac{t}{2}\right]\ g(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dans ces formules, on désigne par $g(x)$ une fonction d'une variable réelle x qui satisfait à $g(x) = g(-x)$ et $|g(x)| = \mathrm{O}(|x|^{-c})$ avec $c > \frac{1}{2}$ convenable. La fonction $h(t)$ est sa transformée de Fourier $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(x)\ \mathrm{d}x$ définie pour t complexe avec $|\mathfrak{Im}\ t| < c$ (d'où $h\left(\frac{i}{2}\right)$!). Les nombres r_n et s_n ont été introduits plus haut, et sont l'objet de notre intérêt. Le symbole $\Lambda(n)$ a la signification arithmétique usuelle, i.e., $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$. On a posé $u_n = \dfrac{1}{2}(n + \sqrt{n^2-4})$ et $H(n)$ est un nombre pondéré de classes de conjugaison dans le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Il se calcule explicitement comme suit : posons $n^2 - 4 = f^2 D$, où D est le discriminant du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2-4})$ et où $f \geq 1$ est entier. Notons $h(D)$ le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n^2-4})$ et ε_D le générateur du groupe des unités positives de ce corps. Il existe un entier $t \geq 1$ tel que $u_n = \varepsilon_D^t$. Enfin si $f = \prod p^{\alpha}$ (décomposition en facteurs premiers), posons $\Phi(f, D) = \prod \{p^{\alpha} + \left(1 - \left(\dfrac{D}{p}\right)\right)(1 + p + \ldots + p^{\alpha-1})\}$. On a $H(n) = \dfrac{2}{t} h(D) \cdot \Phi(f, D)$. On désigne comme d'habitude par $\left(\dfrac{D}{n}\right)$ le symbole de résidu quadratique de Kronecker. Les autres termes S, A, B, E et F se comprennent de soi.

J'ai d'abord vérifié numériquement la formule $U = V$ pour $g(x) = e^{-x^2/2}, h(t) = \sqrt{2\pi}e^{-t^2/2}$. On peut négliger les sommes $\sum_{n\geq 1} h(r_n)$ et $\sum_{n\geq 1} h(s_n)$ si l'on admet qu'on a $r_1 \geq 8, s_1 \geq 8$. On trouve $U - V = 0.000\ 000\ 293$ les calculs étant faits avec dix décimales, c'est-à-dire $U - V = 0$ à la précision du calcul des cinq intégrales $S, ..., F$.

J'ai ensuite étudié le cas

$$g(x) = \cos\ mx\ e^{-x^2/2}, \quad h(t) = \frac{\pi}{2}\left(e^{-(t+m)^2/2} + e^{-(t-m)^2}\right).$$

Alors U et V sont des fonctions de m. J'admets pour valeurs r_n celles de la table I, obtenues par des moyens indépendants. L'évaluation numérique de U, pour toute valeur de m raisonnable, ne pose aucun problème. J'ai considéré le cas $m \leq 24$ et tronqué convenablement les trois séries infinies de manière à obtenir une erreur inférieure à 10^{-10}. Pour le calcul des intégrales $S, ..., F$, je me suis limité au cas $8 \leq m \leq 18$ ce qui permet des simplifications.

- Dans S, on peut remplacer $\tanh\ \pi t$ par 1, d'où $S = \dfrac{\pi m}{6}$.
- On néglige A et B inférieurs à 10^{-8}.
- On remplace E par les premiers termes de son développement asymptotique, soit

$$E = -2\ \log\ m + \frac{1}{m^2} + \frac{3}{2m^4} + \frac{5}{m^6} + \frac{105}{4m^8} + \frac{189}{m^{10}} + \frac{3465}{2m^{12}}.$$

- On néglige F.

Les approximations introduites sur S, A, B, E donnent une erreur de l'ordre de 10^{-8}. Par contre, une évaluation un peu imprécise donne $|F| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{100}\right)$ (si j'ose écrire ceci !).

J'ai donc tabulé U et V comme fonctions de m pour $m = 8(0,1)18$ (i.e., avec un pas de $\dfrac{1}{10}$ entre 8 et 18). Dans ce calcul, **je n'ai retenu que les nombres de la classe C**. On trouve alors que $U - V$ **est inférieur à** 10^{-3} **dans les limites de la table.**

Autrement dit, tout se passe **comme si dans la table II, il ne fallait conserver que les nombres de la classe C**. Naturellement, ceci contredit encore plus le principe de Courant que les résultats de Neunhoffer.

Le mystère reste entier. De nouvelles (et ardentes) recherches seront nécessaires pour retrouver le coupable.

... Depuis ma dernière lettre, les choses se sont clarifiées. Il n'y a plus de contradiction en mathématiques, et je ne puis donc démontrer à la fois l'hypothèse de Riemann et sa négation. Mais, hélas, il faut redire : "Adieu veau, vaches, cochons, couvée !". Il ne semble plus y avoir de lien explicite entre la fonction zêta de Selberg et celle de Riemann.

Venons-en à la première contradiction. Il semblait que mes résultats numériques contredisaient les principes généraux de Courant sur les valeurs propres des opérateurs différentiels. En fait, cette contradiction résultait d'une lecture trop superficielle de la référence classique, mais parfois peu précise, sur le sujet (Courant et Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, p. 409-410). De manière plus précise, avec les notations de ma lettre précédente, les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$L = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

dans l'espace $\mathcal{H}_+$ (conditions aux limites de type Neumann) sont les nombres $\mu_0 = 0$ (que j'avais oublié !) et les nombres $\mu_n = \dfrac{1}{4} + s_n^2$. Mais il se trouve que le domaine fondamental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma$ opérant dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ n'est pas compact, comme l'on sait bien. En conséquence, il y a un spectre continu s'étendant sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right]$ et dont les fonctions propres sont décrites explicitement par des séries d'Eisenstein. Posons alors $\overline{\mu}_0 = \mu_0 = 0$, $\overline{\mu}_n = \inf\left(\mu_n, \dfrac{1}{4}\right)$ pour $n = 1, 2, ...$; autrement dit, rabattons vers le bas du spectre continu toutes les valeurs propres plongées dans ledit spectre continu.

L'opérateur L agissant dans l'espace $\mathcal{H}_-$ (conditions aux limites de Dirichlet) n'a pas de spectre continu, de sorte que l'on peut garder les valeurs propres (à un décalage d'indice près) et poser $\overline{\lambda}_n = \lambda_{n+1}$ pour $n = 0, 1, 2, ...$

L'application correcte du principe maximinimal de Courant-Weyl conduit aux inégalités pour $n = 0, 1, ...$

$$\overline{\mu}_n \leq \overline{\lambda}_n \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Comme on a $\overline{\mu}_0 = 0$, $\overline{\mu}_n = \dfrac{1}{4}$, pour $n \geq 1$, ces inégalités se réduisent à $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_n = \dfrac{1}{4}$ pour $n \geq 2$. Elles sont trivialement satisfaites puisque $\overline{\lambda}_n = \dfrac{1}{4} + r_n^2$ avec r_n réel, ceci quelles que soient les valeurs exactes des nombres r_n et s_n.

Le raisonnement précédent peut se formuler de la manière suivante. Considérons la fonction zêta de Selberg $Z(s)$ Elle peut se factoriser en $Z(s) = Z_+(s) \cdot Z_-(s)$ avec la propriété suivante : un nombre s tel que $0 < \mathfrak{Re}\ s < 1$ annule la fonction Z_+ (resp. Z_-) si et seulement si le nombre $\lambda = s(1-s)$ est valeur propre de L agissant dans l'espace $\mathcal{H}_+$ (resp. $\mathcal{H}_-$). Comme le spectre de L est réel, les zéros non-triviaux de chacune des fonctions Z_+ et Z_- sont donc, ou compris dans l'intervalle $]0, 1[$, ou sur la droite critique $\dfrac{1}{2} + i\mathbb{R}$. Appelons zéros exceptionnels ceux de la première espèce. Alors, si la fonction Z_+ n'a pas de zéro exceptionnel, la fonction Z_- a au plus un zéro exceptionnel. En fait, nous savons qu'il n'y a pas de zéro exceptionnel pour Z_+, ni pour Z_-, mais le raisonnement précédent est sans doute susceptible de généralisations, et il est à rapprocher d'un résultat fameux de Siegel sur les zéros exceptionnels des séries L associées aux corps de nombres.

Les fonctions Z_+ et Z_- ont une interprétation plus directe, qui m'a été suggérée par une remarque de Deligne au début de l'été et par la lecture récente d'un article de A. B. Venkov (*Izv. Akad. Nauk URSS*, série Math. 1978 tome 42, p. 484-499). Le demi-plan de Poincaré est aussi l'espace homogène $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/N$, où N est le groupe des similitudes directes ou inverses du plan, composé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ (avec a, b réels, $a^2 + b^2 \neq 0$) . De manière explicite, la matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ transforme le point $z \in \mathcal{H}$ en $\dfrac{az+b}{cz+d}$ si $g > 0$ et en $\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ si det $g < 0$ Si l'on considère le groupe $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, il agit de manière proprement discontinue sur $\mathbb{H}$ et les transformations correspondantes de $\mathbb{H}$ forment le groupe engendré par $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $I : z \to -\overline{z}$ (symétrie par rapport à l'axe imaginaire). Définissons les caractères χ_+ et χ_- de Δ par

$$\chi_+(g) = 1, \quad \chi_-(g) = \det g.$$

On a alors $Z_\pm = Z(\Delta, \chi_\pm)$ au sens des fonctions zêta de Selberg associées aux caractères de groupes discrets. Chacune de ces fonctions zêta correspond à une formule des traces, que Venkov écrit explicitement, et que l'on pourrait utiliser pour le calcul numérique des zéros des fonctions Z_+ et Z_-, en séparant ces deux fonctions. Peut-être le ferai-je.

Nous voici un peu loin de la première contradiction. Peut-être ne m'en serais-je pas sorti si Bourbaki ne m'avait précisément demandé de lui expliquer par écrit les principes du minimax !

Venons-en à la deuxième contradiction. Entre temps, elle a été résolue par Hejhal. Une correction tout d'abord. Les valeurs numériques attribuées dans ma lettre précédente à Neunhoffer (en me fiant aux informations d'Audrey Terras) ne sont pas de lui à proprement parler. Voici un bref historique. En 1977, dans un "Diplomarbeit" de l'université de Heidelberg, H. Haas, un étudiant de Neunhoffer, a obtenu la table II de ma lettre précédente. Il semble qu'Harold Stark soit le premier à avoir remarqué que le nombre 14,13473 est la partie imaginaire du premier zéro de $\zeta(s)$. En avril 1979, Audrey Terras communiqua cette remarque à Hejhal, qui tout de suite remarqua la présence des zéros de la série de Dirichlet $L(\chi_3, s)$ où $\chi_3(n) = \left(\dfrac{-3}{n}\right)$. Avec une détermination remarquable, Hejhal se mit à la programmation pour contrôler les résultats de Haas. À cette époque, j'étais en possession de mes méthodes de "collocation", qui sont très proches de celles de Haas et Hejhal, et je disposais d'un jeu de programmes parfaitement au point. Je n'ai annoncé publiquement ces résultats qu'en septembre 1978, mais j'en avais parlé en privé à plusieurs reprises aux principales personnes intéressées. Il est clair que si une liaison efficace avait pu s'établir, nous aurions épargné bien du travail.

Aux faits ! Les calculs d'Hejhal ont fourni deux résultats qu'il qualifie proprement d'expérimentaux :

1) Les **"valeurs propres" de la classe C, c'est-à-dire les nombres** $13,77975, 17,73856, 19,42348$ **sont confirmées.**

2) **Les nombres des classes A et B ne correspondent pas a des "valeurs propres", et de plus la table de Haas est incomplète :** une erreur banale lui avait fait omettre le nombre $18,261997$ (quatrième zéro de $L(\chi_3, s)$) qui devrait occuper la 7e place dans la table de Haas.

Tout ceci est **en accord complet** avec les résultats que j'ai rapportés dans ma dernier lettre. C'est le moment de citer la lettre de Fermat à Pascal :

> "*Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et l'autre que la raison et la vérité.*"

Il reste à expliquer pourquoi Haas a obtenu ces fausses valeurs propres. Je reproduis ici la brillante démonstration d'Hejhal qui éclaire le rôle inattendu du corps $\mathbb{Q}(j)$ avec $j = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Posons $\rho = \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$, d'où $j = \rho^2$ et introduisons la fonction

$$G_S(z;\rho) = -\frac{\Gamma(s)^2}{4\pi\Gamma(2s)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left[1 - \left|\frac{\gamma\cdot z-\rho}{\gamma\cdot z-\overline{\rho}}\right|^2\right]^s F\left[\begin{matrix} s & s \\ & 2s \end{matrix} \,\middle|\, 1 - \left|\frac{\gamma\cdot z-\rho}{\gamma\cdot z-\overline{\rho}}\right|^2\right].$$

où $F\left(\begin{matrix}\alpha & \beta \\ & \gamma\end{matrix} \,\middle|\, u\right)$ est la fonction hypergéométrique classique. Si l'on choisit pour s un zéro de la fonction $\zeta_{\mathbb{Q}(j)}$, la fonction $G_s(z;\rho)$ jouit des propriétés suivantes :

a) elle est définie et analytique réelle dans le demi-plan de Poincaré privé des points de la forme $\gamma\cdot\rho$ avec γ parcourant $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$;

b) elle satisfait à l'équation différentielle

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G_s(x+iy;\rho) = s(1-s)G_s(x+iy;\rho) \;;$$

c) on a $G_s(\gamma\cdot z;\rho) = G_s(z;\rho)$ pour γ dans Γ ;

d) on a $G_s(x+iy;\rho) = \mathrm{O}(e^{-2\pi y})$ uniformément en x pour $y\to+\infty$;

e) il existe une constante $\alpha \neq 0$ telle que

$$G_s(z;\rho) = \alpha\,\log|z-\rho| + \mathrm{O}(1)$$

lorsque z tend vers ρ.

S'il n'y avait pas la singularité logarithmique décrite en e), on aurait une fonction automorphe à la Maass. En fait, on peut faire la construction précédente lorsque ρ est remplacé par un nombre d'un corps quadratique imaginaire pourvu que s soit choisi tel que $E(\rho, s) = 0$ (série d'Eisenstein). Une construction très analogue est due à D. Zagier (Bonn).

Du point de vue numérique, la méthode utilisée par Haas, Hejhal et moi-même est essentiellement la même. Au départ, on développe une fonction propre de l'opérateur L invariante par le groupe Γ sous la forme que tu donnais dans ta lettre

$$
f(x+y) = \sum_{N=1}^{\infty} c_N W_{0,ir}(2\pi N y) \begin{cases} \sin(2\pi N x) & \mathcal{H}_- \\ \cos(2\pi N x) & \mathcal{H}_+. \end{cases} \tag{1}
$$

On a $Lf = \left(\frac{1}{4} + r^2\right) f$ et la fonction de Whittaker $W_{0,\nu}$ est reliée aux fonctions de Bessel par les formules classiques

$$
W_{0,\nu}(2z) = \frac{2z}{\pi} K_\nu(z) \tag{2}
$$

$$
K_{ir}(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh\, t} \cos(rt)\, \mathrm{d}t \tag{3}
$$

On choisit ensuite M points $z_1, ..., z_M$ sur l'arc $C \ : |z| = 1,\ 0 < \mathfrak{Re}\ z < \frac{1}{2}$ et l'on écrit que la fonction

$$
f_M(z) = \sum_{N=1}^{M} c_N W_{0,i\,r}(y)\ \cos(2\pi N x)
$$

a une dérivée normale nulle aux points $z_1, ..., z_M$. Un certain déterminant fabriqué avec des fonctions de Whittaker doit s'annuler et ceci donne une valeur approchée $r^{(M)}$ de r.

Là où nous différons, c'est dans le calcul des fonctions de Whittaker. Hejhal utilise une méthode d'intégration numérique pour évaluer l'intégrale (3) alors que j'utilise un développement en fraction continue de $K_{ir}(z)$ en fonction de $\frac{1}{z}$ (pour z grand). En fait, l'ex-mari d'Audrey Terras a des méthodes meilleures, mais personne ne les a encore utilisées.

Or il se trouve que la fonction $G_s(z;\rho)$ a aussi un développement de la forme (1) qui converge dans le domaine fondamental classique de Γ. Comme la seule singularité de $G_s(z;\rho)$ se trouve à l'extrémité ρ de l'arc C, la méthode précédente fournit aussi cette fonction, d'où les zéros de $\zeta_{\mathbb{Q}(j)}$ dans la table de Haas, alors qu'ils ne correspondent pas à des fonctions automorphes de Maass. Ce qui distingue les vraies des fausses fonctions propres, ce sont les propriétés de la série de Dirichlet

$$
\Phi_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_N \cdot N^{-s}.
$$

Pour une vraie fonction propre, on a le produit eulérien que tu connais bien

$$
\Phi_f(s) = \prod_p (1 - c_p \cdot p^{-s} + p^{-1-2s})^{-1} \qquad (p\ \text{ premier}) \tag{4}
$$

et aussi les majorations

$$
|c_p| \leq 1 + \frac{1}{p}. \tag{5}
$$

En particulier, on a $c_6 = c_2 c_3, \quad c_4 = c_2^2 - \dfrac{1}{2}$, etc.

Toutes ces relations cessent d'être vraies pour les fausses fonctions propres $G_s(z;p)$ (avec $\zeta_{\mathbb{Q}(j)}(s) = 0$).

Lors de mes essais au mois de mai dernier, j'avais retrouvé des valeurs de r voisines du premier zéro de $L(\chi_3, s)$, à savoir 8.039 mais je ne parvenais pas à vérifier les inégalités (5) ou les relations qui suivent. Haas avait omis cette vérification, et il était dès lors tombé dans la trappe.

Ceci clôt provisoirement notre histoire !

Table I
Problème de Dirichlet

n	r_n	
1	9,533695	Cartier et Haas
2	12,17301	Cartier et Haas
3	14,35851	Cartier et Haas
4	16,13807	Cartier et Haas
5	16,64426	Cartier et Haas
6	18,18092	Cartier et Haas
7	19,48471	Cartier et Haas
8	20,10669	Cartier et Haas
9	21, 47905	Cartier
10	22, 19467	Cartier
11	24, 41965	Cartier

Table II
Problème de Neumann

n	s_n	catégorie	
1	8, 039737	B	
2	11, 24921	B	
3	13, 77975	C	
4	14, 13473	A	
5	15, 70462	B	
6	17, 73856	C	
7	?	B	?
8	19, 42348	C	
9	20, 45578	B	

Table due à Haas

Table III
Zéros de $\zeta(s)$

n	u_n
1	14,13473
2	21,02204
3	25,01086
4	30,42488
5	32,93506
6	37,58618

Table extraite de Haselgrove

Table IV
Zéros de $L(\chi_3, s)$

n	u_n
1	8,039737
2	11,24920
3	15,70462
4	18,26200
5	20,45577
6	24,05941

Table due à Spira