Transcription en LaTeX de la section 6 du chapitre I du livre *Arbres, amalgames,* SL_2 de Jean-Pierre Serre

Les définitions concernant les arbres sont à trouver au paragraphe 2.2 du premier chapitre (voir sur la référence du site Numdam, dans la note de bas de page).

§ 6 – Amalgames et points fixes

Disons qu'un groupe G est un amalgame si on peut l'écrire $G \simeq G_1 *_A G_2$ avec $G_1 \neq G_2$. Dans ce §, on montre que certains groupes, par exemple $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, ne sont pas des amalgames ; comme on le verra, cela revient à prouver que, lorsque ces groupes opèrent sur des arbres, ils ont nécessairement des points fixes.

Convention – Tout groupe opérant sur un arbre est supposé opérer sans inversion, cf. 3.1.

6.1. La propriété de point fixe pour les groupes opérant sur les arbres

Soit G un groupe opérant (sans inversion) sur un arbre X.

L'ensemble X^G des points fixes de G dans X est un sous-graphe de X ; si P et Q sont deux sommets de X^G, la géodésique joignant P à Q est fixe par G, donc contenue dans X^G ; il en résulte que, si X^G est non vide, c'est un arbre. Nous nous intéressons aux groupes G ayant la propriété :

(FA) – *Quel que soit l'arbre X sur lequel opère G, on a $X^G \neq \varnothing$.*

Cette propriété est "presque" équivalente à celle de ne pas être un amalgame. Plus précisément :

Théorème 15 – *On suppose G dénombrable. Pour que G ait la propriété (FA), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *G n'est pas un amalgame.*

(ii) *G n'a pas de quotient isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

(iii) *G est de type fini.*

Démonstration :

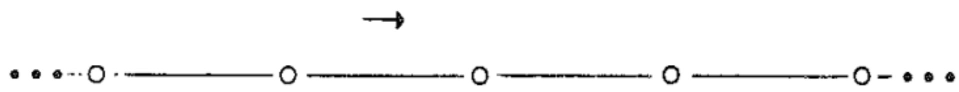
(FA) $\Longrightarrow$ (i) : Si G est un amalgame $G_1 *_A G_2$, avec $G_1 \neq A$ et $G_2 \neq A$, il existe un arbre X sur lequel G opère avec pour domaine fondamental un segment PQ , le stabilisateur de P (resp. de Q) étant G_1 (resp. G_2) , cf. n° 4.1, th. 7. Comme G est distinct de G_1 et G_2, on a donc $X^G \neq \varnothing$, ce

Référence : *Arbres, amalgames,* SL_2, Jean-Pierre Serre, Société Mathématique de France, Astérisque 46, 1977, p. 81-96. , Cours au Collège de France, rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, deuxième édition corrigée.
https://www.numdam.org/item/AST_1983__46__1_0.pdf.

Transcription : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

qui contredit (FA).

(FA) $\Longrightarrow$ (ii) : Si G a un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}$, on peut le faire opérer par translations sur une chaîne doublement infinie



et cela contredit (FA).

(FA) $\Longrightarrow$ (iii) : Comme G est dénombrable, il est réunion d'une suite croissante $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ de sous-groupes de type fini. Formons un graphe X dont l'ensemble des sommets est la somme disjointe des ensembles G/G_n, deux sommets étant joints par une arête si et seulement si ils appartiennent à deux ensembles consécutifs G/G_n et G/G_{n+1} et se correspondent par l'application canonique

$$G/G_n \to G/G_{n+1}.$$

On vérifie immédiatement que X est un arbre ; de plus G opère de façon évidente sur X. Si G a la propriété (FA), il existe un sommet P de X invariant par G ; si $P \in G/G_n$, cela entraîne que $G_n = G$ donc G est de type fini. Inversement, supposons que G ait les propriétés (i), (ii) et (iii), et qu'il opère sur un arbre X. Si $T = X/G$ désigne le quotient de X par G, le groupe fondamental $\pi_1(T)$ du graphe T est isomorphe à un quotient de G (n° 5.4, cor. 1 au th. 13). Comme $\pi_1(T)$ est un groupe libre, ce n'est possible, d'après (ii), que si $\pi_1(T) = \{1\}$. Ainsi, T est un arbre, et on peut le relever en un sous-arbre de X, cf. n° 3.1. Le groupe G s'identifie alors au groupe $G_T = \varinjlim(G, T)$ limite de l'arbre de groupes défini par les fixateurs G_P et G_y des sommets P et des arêtes y de T, cf. n° 4.5, th. 10. Il en résulte que G est réunion des groupes $G_{T'} = \varinjlim(G, T')$, où T' parcourt l'ensemble des sous-arbres finis de T. Comme G est de type fini, il existe au moins un T' tel que $G = G_{T'}$; choisissons T' minimal pour cette propriété. Si T' est réduit à un seul sommet P, on a $G = G_p$ et G a un point fixe. Sinon, T' possède un sommet terminal P, et $T'' = T' - \{P\}$ est un arbre (n° 2.2, prop. 9) ; si y désigne l'unique arête qui joint P à T'', on a

$$G = G_{T'} = G_{T''} *_A G_P \quad \text{avec } A = G_y.$$

Vu l'hypothèse de minimalité faite sur T', on a $G_{T''} \neq G$ et $G_P \neq G$, ce qui montre que G est un amalgame et contredit l'hypothèse (1).

Remarques

1) Lorsque G n'est pas dénombrable, le théorème 15 reste valable à condition de remplacer la condition (iii) par :

(iii') *G n'est pas réunion d'une suite strictement croissante de sous-groupes.*

Des exemples de groupes (non dénombrables) satisfaisant aux conditions (i), (ii), et (iii) ont été construits par J. Tits et S. Koppelberg.

2) On obtient des résultats plus complets en tenant compte des points fixes de G non seulement sur les sommets, mais aussi sur les bouts, des arbres sur lesquels il opère. Cf. n° 6.5, exerc. 2, ainsi que J. Tits [12].

6.2. Conséquences de la propriété (FA)

Proposition 21 – *Soit G un groupe avant la propriété (FA). Si G est contenu dans un amalgame $G_1 *_A G_2$, G est contenu dans un conjugué de G_1 ou de G_2.*

Cela traduit simplement le fait que G a un point fixe dans l'arbre associé à l'amalgame $G_1 *_A G_2$, cf. n° 4.1.

Proposition 22 – *Soit G un groupe dénombrable ayant la propriété (FA), et soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(k)$ une représentation linéaire de degré 2 de G sur un corps commutatif k. Alors, pour tout $s \in G$, les valeurs propres de $\rho(s)$ sont entières sur $\mathbb{Z}$.*

(Lorsque k est de caractéristique 0, ces valeurs propres sont donc des entiers algébriques lorsque k est de caractéristique $\neq 0$, ce sont des racines de l'unité).

Soit k_ρ le sous-corps de k engendré par les coefficients $\rho(s)$ des matrices pour $s \in G$. D'après le th. 15, G est de type fini, donc k_ρ est de type fini sur le corps premier. Soit v une valuation discrète de k_ρ, et soit O_v l'anneau de valuation correspondant. Notons X_v l'arbre associé à v (chap. II, § 1), arbre sur lequel opère $\mathrm{GL}_2(\mathrm{k}_\rho)$. Soit $\mathrm{GL}_2(k_\rho)^0$ le noyau de l'homomorphisme

$$v \circ \det \; : \; \mathrm{GL}_2(k_\rho) \to \mathbb{Z}.$$

cf. chap. II, n° 1.2. La condition (ii) du th. 15 montre que $\rho(G)$ est contenu dans $\mathrm{GL}_2(k_\rho)^0$, opère sans inversion sur X_v. Puisque G a la propriété (FA), il existe un sommet de X_v invariant par G. Cela entraîne (chap. II, n° 1.3) que $\rho(G)$ est contenu dans un conjugué de $\mathrm{GL}_2(O_v)$. Ainsi, pour tout $s \in G$, les coefficients du polynôme caractéristique de s appartiennent à l'intersection des O_v. Mais on sait que cette intersection est égale à l'ensemble des éléments de k_ρ qui sont entiers sur $\mathbb{Z}$ (cf. par exemple Grothendieck, EGA II, p. 140, cor. 7.1.8) ; les valeurs propres des $\rho(s)$ sont donc bien entières sur $\mathbb{Z}$.

Exercice

Soient A un sous-groupe d'un groupe H, et soit $\theta : A \to H$ un homomorphisme injectif de A dans H ; soit $\widetilde{H}$ le groupe déduit de (A, H, θ) par la construction (HNN), cf. n$^{\mathrm{os}}$ 1.4 et 5.1. Montrer que tout sous-groupe de $\widetilde{H}$ qui possède la propriété (FA) est contenu dans un conjugué de H.

6.3. Exemples

6.3.1. Un groupe de torsion de type fini a la propriété (FA).

Vu le th. 15, il suffit de vérifier qu'un tel groupe ne peut pas être un amalgame $G_1 *_A G_2$. Or c'est clair, car si l'on prend $s_1 \in G_1 - A$ et $s_2 \in G_2 - A$, l'élément $s_1 s_2$ est cycliquement réduit (au sens du n^o 1.3), donc d'ordre infini d'après la prop. 2.

6.3.2. Si G a la propriété (FA), il en est de même de tout quotient de G.

C'est clair.

6.3.3. Soit H un sous-groupe distingué de G. Si H et G/H ont la propriété (FA), il en est de même de G.

En effet, si G opère sur un arbre X, le groupe G/H opère sur l'arbre X^H, donc a un point fixe.

6.3.4. Soit G' un sous-groupe d'indice fini de G. Si G opère sur un arbre X et si $X^{G'} \neq \varnothing$, alors $X^G \neq \varnothing$.

En effet, soit H un sous-groupe distingué d'indice fini de G contenu dans G' (par exemple l'intersection des conjugués de G'). On a $X^H \neq \varnothing$, et G/H opère sur l'arbre X^H ; comme G/H est fini, il a un point fixe ; d'où $X^G \neq \varnothing$.

En particulier, si G' a la propriété (FA), il en est de même de G.

6.3.5. Par contre, il ne faudrait pas croire que, si G a la propriété (FA), il en est de même de ses sous-groupes d'indice fini. Voici un contre-exemple (on en verra d'autres au n^o 6.5, exerc. 3 et 4) prenons pour G le groupe de Schwarz défini par deux générateurs a et b , liés par les relations

$$a^A = b^B = (ab)^C = 1,$$

où A, B, C sont des entiers ≥ 2. Le groupe G a la propriété (FA). En effet, si G opère sur un arbre, les éléments a, b et ab ont chacun un point fixe (puisqu'ils sont d'ordre fini, cf. 4.3, prop. 19), et le cor. 1 à la prop. 26 du n^o 6.5 ci-après montre qu'il existe un point fixe commun à a et b, donc fixe par G. D'autre part, si A, B, C sont tels que $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq 1$, il est bien connu que G contient un sous-groupe H d'indice fini isomorphe au groupe fondamental d'une surface orientable compacte de genre ≥ 1 ; un tel sous-groupe H a un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}$, et ne satisfait donc pas à (FA).

6.3.6. On trouvera au n^o 6.6 d'autres exemples de groupes ayant la propriété (FA).

6.4. Points fixes d'un automorphisme d'un arbre

Géodésique joignant deux sous-arbres

Si P et Q sont deux sommets d'un arbre, on note $P - Q$ la géodésique joignant P à Q (n^o 2.2, prop. 8).

Lemme 9 – Soient T_1 et T_2 deux sous-arbres disjoints d'un arbre X, et soit n la distance de T_1 à T_2 (i.e. la borne inférieure des $\ell(P, Q)$, pour $P \in \operatorname{som} T_1$ et $Q \in \operatorname{som} T_2$).

(a) *Il existe un couple* (P_1, P_2) *et un seul dans* $\operatorname{som} T_1 \times \operatorname{som} T_2$ *tel que* $\ell(P_1, P_2) = n$.

(b) *On a* $\ell(Q_1, Q_2) = \ell(Q_1, P_1) + n + \ell(P_2, Q_2)$ *si* $Q_1 \in \operatorname{som} T_1$ *et* $Q_2 \in \operatorname{som} T_2$.

(c) *Tout sous-arbre de* X *rencontrant à la fois* T_1 *et* T_2 *contient la géodésique* $P_1 - P_2$.

(On dit que $P_1 - P_2$ est la géodésique joignant T_1 à T_2).

Soient $P_1 \in \operatorname{som} T_1$ et $P_2 \in \operatorname{som} T_2$ tels que $\ell(P_1, P_2) = n$. Aucun des sommets de $P_1 - P_2$ distinct des extrémités n'appartient ni à T_1 ni à T_2. Il en résulte que, si $Q_1 \in \operatorname{som} T_1, Q_2 \in \operatorname{som} T_2$, le chemin obtenu en juxtaposant les géodésiques $Q_1 - P_1, P_1 - P_2$, et $P_2 - Q_2$ est sans aller-retour. On a donc $\ell(Q_1, Q_2) = \ell(Q_1, P_1) + n + \ell(P_2, Q_2)$, ce qui démontre (b) ; les assertions (a) et (c) en résultent aussitôt.

Automorphismes ayant des points fixes

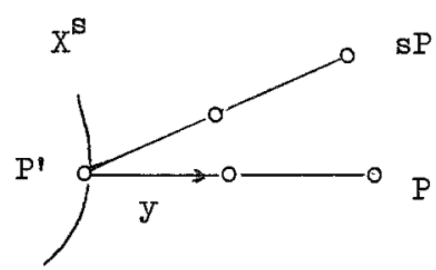
Soit s un automorphisme (sans inversion) d'un arbre X. On dit que s a un point fixe si le sous-graphe X^s de X formé des points fixes par s est non vide, auquel cas c'est un arbre (6.1).

Proposition 23 – *Supposons que* s *ait un point fixe. Soit* $P \in \operatorname{som} X$, *soit* n *la distance de* P *à* X^s, *et soit* $P - P'$ *la géodésique joignant* P *à* X^s. *Alors la géodésique* $P - sP$ *s'obtient en juxtaposant les géodésiques* $P - P'$ *et* $P' - sP = s(P' - P)$.

C'est clair si $n = 0$ car alors $P = P' = sP$. Si $n \geq 1$, notons y l'arête de $P - P'$ d'origine P'. On a $sy \neq y$, sinon l'extrémité de y appartiendrait à X^s. Il en résulte que le chemin obtenu en juxtaposant $P - P'$ et

$$s(P' - P) = P' - sP$$

est sans aller-retour ; c'est donc bien la géodésique joignant P à sP.



Corollaire 1 – *On a* $\ell(P, sP) = 2n$.

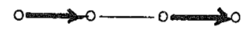
Corollaire 2 – *Le milieu de la géodésique* $P - sP$ *est fixe par* s.

En effet, ce milieu n'est autre que P' qui appartient à X^s.

Corollaire 3 – *Supposons* $n \geq 1$. *Soit* P_1 *(resp.* P_2*) le sommet de* $P - sP$ *à distance 1 de* P *(resp.* sP*). On a* $sP_1 = P_2$.

Cela résulte du fait que s transforme $P - P'$ en $sP - P'$.

Soient y et y' deux arêtes. Posons $a = \ell(o(y), o(y')), b = \ell(t(y), t(y'))$. On a $b - a = 0, 2$ ou -2. Disons que y et y' sont :

cohérentes si $b = a$ 

incohérentes convergentes si $b = a - 2$ 

incohérentes divergentes si $b = a + 2$  .

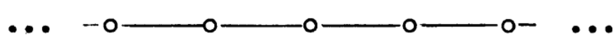
(Autrement dit, y et y' sont cohérentes si et seulement si elles sont orientées de la même façon sur l'unique géodésique qui les contient).

Avec cette terminologie, le cor. 3 équivaut à :

Corollaire 4 – *Si $y \in \operatorname{ar} X$ n'est pas fixe par s, alors y et sy sont incohérentes.*

Automorphismes sans points fixes

Convenons d'appeler droit chemin une chaîne doublement infinie :



Proposition 24 (Tits) – Supposons l'automorphisme s sans point fixe. Posons :

$$m = \operatorname*{Inf}_{P \in \operatorname{som} X} \ell(P, sP) \quad \text{et} \quad T = \{P \in \operatorname{som} X \mid \ell(P, sP) = m\}.$$

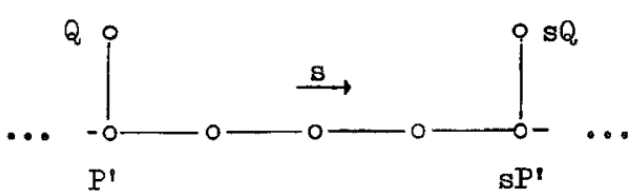
Alors :

i) *T est l'ensemble des sommets d'un droit chemin de X.*

ii) *s induit sur T une translation d'amplitude m.*

iii) *Tout sous-arbre de X stable par s contient T.*

iv) *Si un sommet Q de X est à distance d de T, on a*

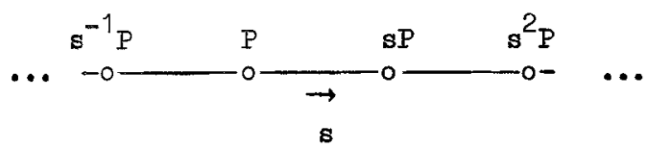


$(m = 4 \ , \ d = 1)$

Démonstration

Soit $P \in T$ et soient $P_0 = P, P_1, \ldots, P_m = sP$ les sommets de la géodésique $c = P - sP$. Les géodésiques s et sc définissent un chemin sans aller-retour joignant P à s^2P. En effet, sinon, on aurait $P_{m-1} = sP_1$; or ceci est impossible si $m = 1$ puisque m opère sans inversion, et c'est impossible si $m \geq 2$ puisque la distance $\ell(P_1, sP_1)$ serait alors $m - 2 < m$. On en déduit aussitôt, par itération, que les géodésiques $s^n c$ ($n \in \mathbb{Z}$) forment un droit chemin

(T_P)



stable par s, et que s est une translation d'amplitude m sur T_P. Si Q est un sommet de X à distance d de T_P, et si P' est le sommet de T_P le plus proche de Q (cf. lemme 9), le chemin formé des $Q - P'$, $P' - sP'$ et $sP' - sQ$ est sans aller-retour. On a donc $\ell(Q, sQ) = d + m + d = m + 2d$. En particulier, on ne peut avoir $\ell(Q, sQ) = m$ que si $d = 0$; d'où le fait que $T = T_P$, ce qui démontre i), ii) et iv) D'autre part, si un sous-arbre X' de X est stable par s, et si l'on choisit Q dans X', la géodésique $Q - sQ$ est contenue dans X' ; il en est donc de même, avec les notations ci-dessus, de $P' - sP'$, donc aussi de T_P, qui est réunion des $s^n(P' - sP')$.

Corollaire – *Soit $y \in \mathrm{ar}\, X$. Pour que y et sy soient cohérentes, il faut et il suffit que y soit une arête du droit chemin T associé à s.*

Cela résulte, par exemple, de iv).

En combinant les prop. 23 et 24, on obtient :

Proposition 25 – *Soit s un automorphisme de l'arbre X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *s opère sans point fixe ;*

(b) *il existe une arête y de X telle que y et sy soient cohérentes et distinctes ;*

(c) *il existe un droit chemin de X stable par s et sur lequel s induit une translation d'amplitude non nulle.*

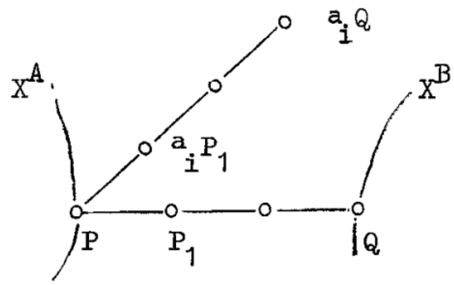
Un automorphisme ayant ces propriétés est parfois dit hyperbolique (cette terminologie provient du cas de SL_2, cf. chap. II, n$^\circ$ 1.3).

Exercice

Les notations étant celles de la prop. 24, soit Γ le groupe engendré par s. Montrer que Γ opère librement sur X, et que le graphe quotient $\Gamma\backslash X$ contient un circuit et un seul, à savoir $\Gamma\backslash T$; ce circuit est de longueur m. L'injection $\Gamma\backslash T \to \Gamma\backslash X$ est une équivalence d'homotopie.

6.5. Groupes ayant des points fixes (résultats auxiliaires)

Proposition 26 – *Soit G un groupe engendré par des éléments a_i, b_j, et soit A (resp. B) le sous-groupe de G engendré par les a_i (resp. les b_j). On suppose que G opère sur un arbre X de telle sorte que $X^A \neq \varnothing, X^B \neq \varnothing$, et que, pour tout couple (i,j), l'automorphiame $a_i b_j$ ait un point fixe. Alors G a un point fixe (i.e. $X^G \neq \varnothing$).*



On a $X^G = X^A \cap X^B$. Supposons que les deux arbres X^A et X^B soient disjoints, et soit $P - Q$ la géodésique les joignant, avec $P \in \operatorname{som} X^A, Q \in \operatorname{som} X^B$ (cf. lemme 9). Soit P_1 le sommet de cette géodésique à distance 1 de P. On a $P_1 \neq X^A$, et il existe donc un indice i tel que $a_1 P_1 \neq P_1$. Le chemin obtenu en juxtaposant les géodésiques $Q - P$ et $P - a_i Q = a_i(P - Q)$ est donc sans aller-retour : c'est la géodésique $Q - a_i Q$; son milieu est P. Mais on a $a_i Q = a_i b_j Q$ pour tout j ; comme $a_i b_j$ a un point fixe, le cor. 2 à la prop. 23 montre que le milieu P de $Q - a_i b_j Q$ est fixe par $a_i b_j$. On a donc $a_i b_j P = P$, i.e. $b_j P = a_i^{-1} P = P$, ce qui montre que P est fixe par tous les b_j, contrairement au fait que $P \notin X^B$.

Corollaire 1 – *Soient a, b et c trois automorphismes d'un arbre tels que $abc = 1$. Si a, b, c ont chacun un point fixe, ils ont un point fixe commun.*

Cela résulte de la prop. 26 appliquée à $a_i = a, b_j = b$.

Corollaire 2 – *On suppose G engendré par des éléments $s_1, \ldots, s_m$, en nombre fini, tels que les s_j et les $s_i s_j$ aient des points fixes. Alors G a un point fixe.*

Cela se démontre par récurrence sur m, en appliquant la prop. 26 avec

$$a_1 = s_1, \ldots, a_{m-1} = s_{m-1} \quad \text{et} \quad b_1 = s_m.$$

Corollaire 3 – *Si G est de type fini, et si chacun de ses éléments a des points fixes, il en est de même de G.*

Cela résulte du cor. 2.

Remarque : On peut aussi déduire le cor. 2 du cor. 1 : soit X_i le sous-arbre de X fixé par s_i ; le cor. 1 montre que $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ pour tout couple (i,j), et l'on peut appliquer le lemme suivant :

Lemme 10 – *Soient $X_1, \ldots, X_m$ des sous-arbres d'un arbre X. Si les X_i se rencontrent deux à deux, leur intersection est non vide.*

Démonstration : raisonnant par récurrence sur m, on peut supposer que

$$Y = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{m-1}$$

est non vide. Si Y ne rencontre pas X_m, soit $P - Q$ la géodésique joignant Y à X_m. Si $i \leq m-1$, l'arbre X_i rencontre à la fois Y et X_m, donc contient $P - Q$ d'après le lemme 9 c). On a donc $P - Q \subset Y$, ce qui est absurde.

Cas des groupes nilpotents

Rappelons qu'un groupe est dit nilpotent si l'un des termes de sa suite centrale descendante est égal à $\{1\}$ (cf. Bourbaki, A-I, § 6).

Proposition 27 – *Soit G un groupe nilpotent de type fini opérant sur un arbre X. Deux cas seulement sont possibles (et s'excluent mutuellement) :*

(a) *G a un point fixe.*

(b) *Il existe un droit chemin T stable par G sur lequel G opère par translations au moyen d'un homomorphisme non trivial $G \to \mathbb{Z}$.*

Supposons d'abord que l'on soit dans le cas (b). Choisissons un élément s de G dont l'action sur T soit une translation non triviale. D'après la prop. 25, s n'a pas de point fixe ; cela montre que (a) et (b) s'excluent. De plus, la prop. 24 montre que T est unique : c'est l'intersection des sous-arbres de X stables par s.

Ceci étant, choisissons une suite de composition

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

telle que les quotients successifs G_i/G_{i-1} soient cycliques, et raisonnons par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons donc $n \geq 1$, et appliquons l'hypothèse de récurrence au groupe $H = G_{n-1}$. Si H a un point fixe, le résultat cherché résulte de la prop. 26, appliquée à l'action du groupe cyclique G/H sur l'arbre X^H. Si H n'a pas de point fixe, le droit chemin T stable par H est stable par G (puisque H est distingué dans G) et l'on obtient ainsi un homomorphisme $G \to \mathrm{Aut}(T)$ dont l'image contient un groupe non trivial de translations. Cette image est donc, soit le groupe diédral infini, soit le groupe $\mathbb{Z}$ (opérant par translations). Mais le premier cas est impossible, le groupe diédral infini n'étant pas nilpotent. Il reste donc seulement le second cas, i.e. le cas (b).

Corollaire 1 – *Si G est engendré par des éléments qui ont des points fixes, alors G a un point fixe.*

Supposons que l'on soit dans le cas (b), et que G soit engendré par une famille (s_i). Puisque $G \to Z$ est non trivial, l'un au moins des s_i a une image $\neq 0$ dans $\mathbb{Z}$; d'après la prop. 25, un tel élément s_i

ne peut pas avoir de point fixe.

Corollaire 2 – *Soit G' le groupe des commutateurs de G, et soit un élément de G tel que $s^n \in G'$ pour un entier $n \geq 1$. Alors s a un point fixe.*

C'est clair si G a un point fixe. Sinon, on est dans le cas (b), et l'hypthèse faite sur s entraîne que son image par l'homomorphisme $G \to \mathbb{Z}$ est nulle. L'élément s laisse donc fixe le droit chemin T.

Remarque :

On a un résultat analogue à la prop. 27 chaque fois que G admet une suite de composition dont les quotients successifs sont cycliques, ou ont la propriété (FA).

Exercices

1) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-arbres d'un arbre X. Soit N le nerf de cette famille, i.e. le complexe simplicial dont l'ensemble de sommets est I, une partie J de I étant un simplexe si et seulement si $\bigcap\limits_{j\in J} X_j \neq \varnothing$. Montrer que N a le même type d'homotopie que la réunion des X_i. En déduire que toute composante connexe de N est contractile. (Cela fournit une autre démonstration du lemme 10.)

2) (Tits) Soit G un groupe opérant sur un arbre X. On suppose que tous les éléments de G ont des points fixes, mais que G n'en a pas. Si $P \in \operatorname{som} X$, soit $s \in G$ tel que $sP \neq P$, et soit P_1 le sommet de la géodésique $P - sP$ à distance 1 de P. Montrer que P_1 ne dépend pas du choix de s. Soit $f\ :\ \operatorname{som} X \to \operatorname{som} X$ l'application $P \mapsto P_1$; on a $f \circ s = s \circ f$ pour tout $s \in G$. Montrer que, pour tout $P \in \operatorname{som} X$, les $f^n P$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tendent vers un bout de X, qui est indépendant de P, et fixe par G.

3) (Généralisation de 6.3.5) Soit W un groupe de Coxeter, défini par une matrice finie (m_{ij}) telle que $m_{ij} \neq \infty$ pour tout (i, j), cf. Bourbaki, [36], § 1 ; soit W^+ le sous-groupe de W formé des éléments de longueur paire (loc. cit., exerc. 9). Montrer que W et W^+ jouissent de la propriété (FA) (appliquer le cor. 2 à la prop. 26).

4) Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué nilpotent de G. On suppose qu'il n'existe aucun sous-groupe N' de N, qui soit distingué dans G, et tel que N/N' soit isomorphe à $\mathbb{Z}$. Montrer que, si G opère sur un arbre X, alors N a un point fixe dans X (utiliser la prop. 27). En déduire que, si G/N a la propriété (FA), il en est de même de G.

Exemple : on prend $N = \mathbb{Z}^2$, et on prend pour G le produit semi-direct d'un groupe cyclique C d'ordre 3, 4 ou 6 par N, l'action de C sur N étant non triviale. Comme $G/N = C$ est fini, on en déduit que G possède la propriété (FA), alors que N, qui est d'indice fini dans G, ne la possède pas.)

5) Soit $\omega = (1 + \sqrt{-3})/2$ une racine primitive 6^{ieme} de l'unité, et soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$. On pose

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega' \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega' = \omega^{-1}.$$

a) Montrer que x et y engendrent le sous-groupe de Borel $B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ de G et que x, y, w engendrent G.

b) Montrer que B a la propriété (FA) (utiliser l'exercice précédent), et que xw et yw sont d'ordre fini.

c) En déduire, au moyen de la prop. 26, que G a la propriété (FA).

d) Mêmes questions pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

6.6. Le cas de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$

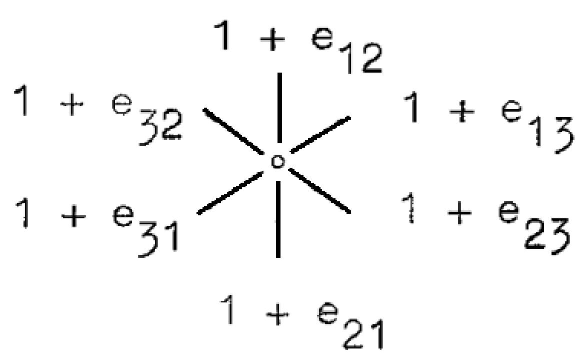
Théorème 16 – Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a la propriété (FA).

Vu le th. 15, cela entraîne :

Corollaire – *Le groupe* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ *n'est pas un amalgame.*

Démonstration du th. 16.

Si $i, j \in \{1, 2, 3\}$, convenons de noter la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont ruls, sauf celui de la i^{ieme} ligne et j^{ieme} colonne qui est égal à 1. On sait que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est engendré par les $1 + e_{ij}$, avec $i \neq j$. Il est commode d'indexer de façon circulaire ces six matrices :



(cela correspond au fait que les "racines" de SL_3 forment un hexagone régulier). On est ainsi conduit à poser :

$$z_0 = z_6 = 1 + e_{12}, \quad z_1 = 1 + e_{13}, \quad z_2 = 1 + e_{23}, \quad z_3 = 1 + e_{21},$$

$$z_4 = 1 + e_{31}, \quad z_5 = 1 + e_{32} \quad \text{et} \quad z_{i+6} = z_i \quad \text{pour tout } i.$$

On a les propriétés suivantes :

(i) z_i commute à z_{i+1} et z_{i-1},

(ii) le commutateur (z_{i-1}, z_{1+1}) est égal à z_i^{-1} ou z_i suivant que i est pair ou impair.

En particulier, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est engendré par $\{z_1, z_3, z_5\}$ De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, les éléments z_{i-i} et z_{i+1} engendrent un groupe nilpotent B_i, et z_i appartient au groupe dérivé de B_i.

Supposons maintenant que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ opère sur un arbre. Le cor. 2 à la prop. 27, appliqué au groupe B_i, montre que z_i a un point fixe. Comme ceci est vrai pour tout $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on voit que B_i est engendré par des éléments qui ont des points fixes, donc a un point fixe d'après le cor. 1 à la prop. 27. En particulier, $z_{i-1}z_{i+1}$ a un point fixe. Le cor. 2 à la prop. 26, appliqué à $\{z_1, z_3, z_5\}$, montre alors que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a un point fixe.

Remarque : Au lieu d'utiliser le cor. 2 à la prop. 26, on aurait pu appliquer le lemme 10 aux trois arbres formés des points fixes de z_1, z_3, z_5 : ces arbres se rencontrent deux à deux, donc ont une intersection non vide.

Généralisations

1) Soit N un entier ≥ 1, et soit G_N le sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ engendré par z_1^N, z_3^N, z_5^N. Le même argument que celui utilisé ci-dessus montre que G_N possède la propriété (FA). Or :

a) tout sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ contient un G_N (c'est immédiat) ;

b) G_N est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ (cela a été démontré par Tits, C.R. Acad. Sci. Paris, 283, 1976, p. 693-695).

Vu 6.3.4, cela entraîne :

Théorème 16' (Margulis-Tits). *Tout sous-groupe d'indice fini de* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ *a la propriété (FA).*

2) Les théorèmes 16 et 16' s'étendent aux groupes $G(A)$, où G est un groupe "de Chevalley" simple de rang ≥ 2, et A est l'anneau des entiers (ou plus généralement des "S-entiers") d'un corps de nombres algébriques (Tits, loc. cit.). En particulier, les groupes

$$\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{N}\right]\right), \quad n \geq 3, \quad \mathrm{SP}_{2n}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{N}\right]\right), \quad n \geq 2, \ldots, E_8\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{N}\right]\right),$$

ont la propriété (FA).

3) Pour SL_2, la situation est différente. Il est clair que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la propriété (FA). Il en est de même de $\mathrm{SL}_2(A)$, lorsque A est l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire non isomorphe à $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, car un tel groupe a un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}$ (cf. [20], Théorème 9, p. 519). Par contre, si K est un corps de nombres algébriques qui n'est isomorphe, ni à $\mathbb{Q}$, ni à un corps quadratique imaginaire, on peut montrer que tout sous-groupe arithmétique de $\mathrm{SL}_2(K)$ possède la propriété (FA) ; cela s'applique notamment aux groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{D}])$ et à leurs sous-groupes d'indice fini (D étant un entier > 1 sans facteur carré).

4) Margulis a obtenu récemment des résultats généraux sur les sous-groupes discrets des groupes semi-simples qui contiennent comme cas particuliers le th. 16' et ses généralisations mentionnées ci-dessus.

Références

[12] J. Tits, *A "Theorem of Lie-Kolchin" for Trees, Contributions to Algebra*, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, p. 377-388, Academic Press, 1977.

[20] J.-P. Serre, *Le problème des groupes de congruence pour* SL_2, Ann. of Math., 92 (1970), p. 489-527.

[36] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, chap. IV, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits, Hermann, Paris, 1968.