L'invariant du pouss-pouss
Traduction d'un extrait de *Mathématiques en instantanés*
Hugo Steinhaus

Il n'existe pas de théorie mathématique du jeu d'échecs, mais il y en a une pour certains jeux plus simples. Par exemple, celui de la figure 1, le jeu du "taquin", qui utilise une boîte, avec 15 pions carrés numérotés, laissant vide l'emplacement d'un pion supplémentaire. Il s'agit de disposer les pions dans la boîte selon un ordre choisi quelconque (fig. 2) puis, par une suite de déplacements convenables, de les remettre dans leur ordre primitif. La théorie est la suivante : désignons par "16" l'emplacement vide ; dès lors, chaque arrangement des pions est une permutation des nombres 1, 2, 3, ..., 15, 16. Or, à partir des nombres 1 ... 16, écrits dans leur ordre naturel, on peut obtenir n'importe quel ordre choisi d'avance par une série adéquate d'opérations qui consistent à échanger deux nombres voisins. Par exemple, pour obtenir l'arrangement 2, 1, 3, 4, 5, 16, il faut un échange entre 1 et 2. Appelons "coup" un tel échange.

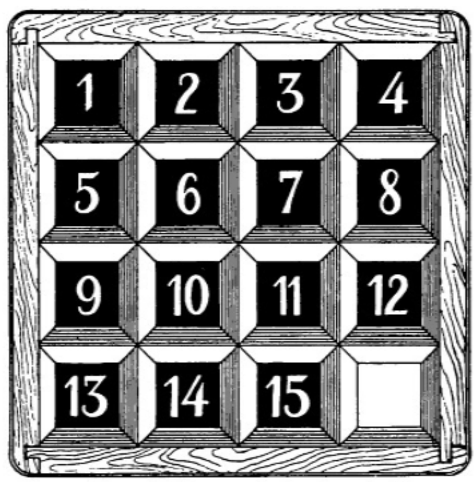

Fig. 1

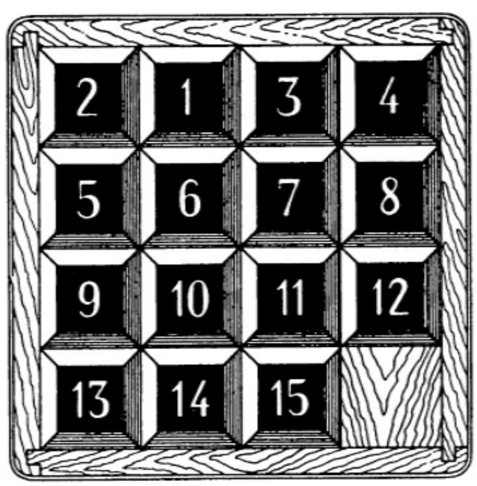

Fig. 2

éditions Flammarion, 1964.

Transcription en LaTeX: Denise Vella-Chemla, mars 2025. [Petit encart de la transcriptrice : J'ai vécu de multiples émois mathématiques, durant mon enfance, de l'étude de ma petite maison aux formes géométriques, à celle du pouss-pouss (taquin) que m'avait offert mon père, ou encore à celle de ma petite étoile de Galilée en plastique noir et blanc.]

Certains arrangements nécessitent un nombre impair de coups, d'autres un nombre pair. Mais, si un arrangement doit être atteint par un nombre impair de coups, il est impossible de l'obtenir aussi par un nombre pair. Imaginons le contraire, c'est-à-dire un arrangement qui s'obtiendrait aussi bien par un nombre pair que par un nombre impair de coups. Partant de l'ordre naturel, si on réalisait le nombre pair de coups, puis le nombre impair, cette fois en sens inverse, on devrait revenir à l'ordre naturel. Ainsi, on pourrait partir de l'ordre naturel et y revenir par un nombre de coups qui, au total, serait impair, chose impossible, car chaque coup est un échange de deux nombres voisins. Considérons d'abord les seuls coups qui échangent 5 et 6. Le premier coup de cette sorte fait passer de 56 à 65, le second de 65 à 56, et ainsi de suite ; lorsqu'en fin de compte, on doit rétablir l'ordre naturel 56, le nombre des coups considérés est pair. Le même raisonnement s'applique aux couples 1-2, 2-3,…, jusqu'à 15-16 : pour chaque couple, il faut un nombre pair de coups. Ainsi, le nombre total de coups permettant de partir de l'ordre naturel et d'y revenir est forcément pair, puisque c'est une somme de nombres pairs.

Nous pouvons ainsi classer tous les arrangements en deux catégories : les arrangements "pairs" et les arrangements "impairs". Considérons la disposition des pions dans la boîte comme un arrangement de nombres, en convenant de les lire ligne par ligne, de haut en bas. Quand nous déplaçons les pions dans la boîte, nous ne pouvons échanger l'emplacement vide "16" qu'avec l'un des pions voisins. Si ce pion est le voisin de droite ou celui de gauche, l'échange est un "coup" au sens déjà défini, car tout se passe comme si l'ensemble des lignes horizontales formait une seule ligne. Par contre, si nous échangeons le pion "16" avec son voisin supérieur ou son voisin inférieur, l'opération équivaut à échanger deux pions qui, dans la ligne globale, sont distants de 4. Un tel échange requiert 7 coups, c'est à dire 7 échanges de pions voisins. Pour résoudre notre problème, nous devons dans tous les cas ramener le pion "16" à la position initiale qu'il occupait dans la boîte : le coin inférieur droit ; on doit donc déplacer ce pion le même nombre de fois vers le haut et vers le bas, le même nombre de fois vers la droite ou vers la gauche. Le nombre de déplacements horizontaux est par conséquent un nombre pair $2h$ et le nombre de déplacements verticaux également un nombre pair, $2v$. L'ensemble du processus est de la sorte équivalent à $2h$ coups plus $2v \times 7$ coups $= 2h + 14v$ coups et ce dernier nombre est pair.

Par conséquent, si un arrangement a été obtenu à partir de l'arrangement fondamental par un nombre impair de "coups", le problème de rétablir l'ordre naturel est insoluble. Par exemple, nous ne pouvons pas, en déplaçant les pions, passer de l'arrangement de la figure 2 à celui de la figure 1, pas plus que nous ne pouvons passer de 1 à 2. Pourquoi ? L'ensemble des arrangements qui peuvent être obtenir par un nombre pair de "coups" définit les problèmes solubles ; le lecteur peut essayer de démontrer ce point.