Deux extraits du Que sais-je ? La logique de Jean Largeault

Gödel[1] a montré qu'il n'y a pas de matrice à un nombre fini de valeurs de vérité où seules les formules prouvables de la logique propositionnelle intuitionniste H seraient vraies (prendraient la valeur 1). À cette fin il se donne une $M = \{1, ...n\}$, élément désigné 1, avec une valuation S_n ainsi définie :

$p \vee q = min(p, q)$; $p \wedge q = max(p, q)$; $p \to q$ vaut 1 si $p \geq q$, et vaut q si $p < q$; $p \leftrightarrow q$ vaut 1 si $p = q$, et $\max(p, q)$ sinon ; $\neg p$ vaut n si $p \neq n$, et vaut 1 si $p = n$.

Une disjonction $F_r =$, pour $1 \leq i < j \leq r$, c'est-à-dire :

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \ldots \vee (p_1 \leftrightarrow p_r) \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \ldots \vee (p_2 \leftrightarrow p_r) \ldots \vee (p_{r-1} \leftrightarrow p_r)$$

est satisfaite si r est supérieur au nombre n des valeurs de vérité (alors pour au moins une paire $i, j, p_i = p_j$). F_{n+1} et les F_r avec un indice $r \geq n+1$ sont satisfaits, non pas les F_r avec $r \leq n$. Attendu que la réalisation S_n satisfait les axiomes de H et que les règles conservent cette propriété, aucune des disjonctions F_r n'est démontrable dans H. Il y a une infinité de matrices intermédiaires (une infinité de *logiques intermédiaires*) entre le système classique et H.

D'autre part, S_n ne réalise pas le tiers-exclus puisque pour $p \neq n$, $p \vee \neg p = min(p, n) > 1$ si $p \neq 1$. La logique intuitionniste, sans tiers-exclus, n'a pas *une* tierce valeur.

IV. La logique dans l'intuitionnisme

De l'intuitionnisme on ne retient souvent que le rejet du tiers-exclus, et la faute en incombe à Brouwer lui-même. La logique intuitionniste, malgré son intérêt mathématique (interprétation en termes de treillis des ouverts d'un espace topologique, interprétation des opérateurs intuitionnistes dans un univers de *topos*), et son affinement de la logique classique, n'est ni l'essentiel ni le plus fort de l'intuitionnisme.

Si une affirmation générale est permise, les constructivistes sont parmi ceux qui veulent que les mathématiques aient un sens. Dans ces contextes, *sens* veut dire *existence* : une expression a un sens s'il y correspond une réalité. Les constructivistes conçoivent ce sens ou cette réalité de diverses manières selon les écoles : tantôt un acte d'intuition éventuellement doué de pouvoir créateur (Brouwer, Poincaré) ou une connaissance directe portant sur des objets abstraits ou concrets (Weyl, Poincaré), tantôt des objets supposés immédiatement donnés, les entiers naturels (Kronecker, Bishop) ou bien munis d'algorithmes (école russe). À la différence des idéalistes et des

1. 1932, Collected Works, L, p. 222-225

formalistes, les constructivistes refusent d'identifier existence et non-contradiction : la logique ne contribue pas à un apport ontologique aux mathématiques.

Avec l'éloignement du temps, les idées de Brouwer ont paru désuètes aux penseurs d'avant-garde, qui estiment qu'une logique des mathématiques doit se fonder sur une théorie de la signification d'énoncés. La recherche d'une *théorie de la signification* aura rempli le siècle. Les versés ces sujets de haut niveau savent que la signification était fondamentale pour Frege, pour Bertrand Russell pour les néopositivistes, pour Wittgenstein et ses épigones, pour les épigones des néopositivistes, pour les épigones des épigones. L'énigme de la nature et de la fonction du sens n'en finit point d'occuper les professionnels de la philosophie verbale.

Les spécialistes de ce domaine posent en axiome que la signification est définie par les conditions de vérité : on a saisi le sens d'une phrase quand on sait si elle est vraie ou fausse, et en quelles circonstances elle est soit l'un soit l'autre. Les conditions de vérité classiques ne sont pas effectives, car elles ne permettent pas de savoir si elles sont réalisées ou non. Connaître à quelle condition une universelle (tous les x ont la propriété P) ou une existentielle (il existe un x qui a la propriété P) serait vraie ne fournit pas automatiquement de moyen de déterminer si elle l'est, pour peu que le parcours de valeurs de x soit infini (penser aux conjectures d'arithmétique non résolues). En de pareils cas, on ignore si les conditions de vérité sont réalisées ou non, la signification échappe à notre intelligence : elle n'existerait pour nous que si nous étions omniscients. Au contraire, convenir que p est vrai si on a une preuve de p replace la signification à portée de nos facultés intellectuelles, puisque, en principe, on sait reconnaître une démonstration quand on en a une. Aux conditions de vérité classiques l'*antiréalisme* substitue des conditions d'*affirmabilité*.

Dans les années 1925 s'était répandue à Vienne l'opinion que le sens d'un théorème réside dans sa démonstration. Ce slogan se retourne car il est aussi légitime de considérer que le sens (l'idée, la finalité, la raison) d'une démonstration réside dans l'énoncé du théorème. En tout cas l'accord de ce pseudo-axiome avec l'esprit de l'intuitionnisme historique est douteux : substituer des vérifications à la vérité est plutôt conforme à l'idéologie pragmatiste. "Les vérités qui se font" (W. James) sont utiles à la volonté. Cela va dans une direction opposée à l'attitude de désintéressement où Brouwer voyait un idéal. Des vérités qui procèdent d'une intelligence travaillant dans le cadre du principe d'individuation sont illusoires.

Pour descendre à un point de vue plus terre à terre, le fondateur conçoit la pensée abstraite et le langage comme deux ordres interdépendants. Puisqu'il attribue un rôle primordial à une pensée intuitive *sans langage*, il *ne peut pas* avoir de théorie de la signification d'énoncés. Il disait que les démonstrations sont des constructions introspectives, sans préciser quoi entendre par une construction : un processus, un résultat de processus, une réflexion sur un processus ? Brouwer admettait, à ce titre, des schémas dynamiques qui ne sont pas forcément des algorithmes d'engendrement (des suites de nombres non prédéterminées par une loi ou un principe génératif, à la différence de $\sqrt{2}$ ou de π), ce qui sort du constructivisme strict.

Détacher la logique intuitionniste des exemples et contre-exemples qui l'ont façonnée, la présenter comme un système baladeur qu'on choisirait de préférence à d'autres (par sympathie vérificationiste ou par haine du platonisme), risque d'être un contresens. De toute façon, ce tableau est inexact : parmi les systèmes non classiques, la logique intuitionniste occupe une place à part à cause de sa connexion étroite avec une conception originale et cohérente des mathématiques. Cette connexion est l'une des causes de son *intérêt*. Rien n'empêche, par changement de contexte, de considérer que la logique intuitionniste dépend d'une *philosophie du langage* ou d'une théorie de la signification (*enveloppe* serait moins inacceptable que *dépend*). L'honnêteté exigerait d'avertir qu'on en prend à sa guise avec la vérité historique. Dans l'intention du fondateur et de Heyting, la logique intuitionniste dépend d'une *philosophie des mathématiques*. Le problème auquel répond cette logique est de savoir comment une information finie peut permettre d'énoncer des propositions sur des objets infinis. On doute que les occurrences de la vie quotidienne nous placent devant ce genre de problème. Hilbert croyait qu'on atteint l'infini indirectement, par le moyen des signes (*Sur l'infini*, 1925). Brouwer était d'un autre avis : nous avons l'intuition d'un infini en devenir, présent dans l'itération du passage de l'unité à la deux-ité. La logique intuitionniste est la codification de formes de raisonnement sur des objets potentiellement infinis, autant que le contenu de ces raisonnements a déjà été éprouvé. (L'expérience introspective est la seule garantie de leur correction.

V. La critique intuitionniste du tiers exclu

Le non-contradictoire n'est pas le vrai. La logique intuitionniste inclut la critique du tiers-exclus, dont les raisons passent souvent inaperçues. Brouwer tenait à convaincre le monde mathématique que vérité et non-contradiction ne coïncident pas (la non-contradiction de la mathématique formelle n'entraîne pas sa vérité). Par expérience de pensée, il avait découvert la possibilité de systèmes incomplets, et de systèmes consistants non corrects. Dire que des théories peuvent être non contradictoires et non vraies[2] revient à dire que la correction n'y est pas réalisée. Là-dessus Brouwer anticipait les découvertes des logiciens qui, au cours des années 1930, ont exhibé des phénomènes d'incomplétude, et confirmé la possibilité de systèmes consistants non corrects.

2. 1929, *Recueil Vrin*, XVIII, etc.

Dans un système correct, ce qui est démontrable ($D : \vdash$) est vrai (V) et par conséquent $D \subset V$, tandis que les formules réfutables (R), c'est-à-dire les q telles que $\vdash \neg q$ sont fausses (autrement dit, $V \cap R = \Lambda$). Par suite $R \cap D = \Lambda$, ce qui est une définition de la consistance. Un système correct est donc consistant, mais *un système consistant peut ne pas être correct*, éventualité indiquée par Gödel, qui, *exactement comme Brouwer*, soutient que dès l'arithmétique, la non-contradiction n'assure pas la vérité [3]. En conséquence le programme de Hilbert est insuffisant, que les démonstrations de consistance aboutissent ou non.

Gödel imagine un énoncé $\exists x F(x)$ formellement dérivable, dont la négation $\forall x \neg F(x)$ serait contentuellement vraie. Les nombres naturels qui vérifient F ne sont pas nommables, ils sont *idéaux.* Les conceptualisations du formalisme débordent la sphère du constructif. Pourvu que toutes les inférences contentuelles soient représentables dans le formalisme, et si les conceptualisations et les moyens d'inférence du formalisme ont été convenablement restreints, l'énoncé dont la négation est vraie contentuellement cesse d'être formellement dérivable : le désaccord entre la théorie formelle et la réalité constructive s'évanouit, mais (dernier alinéa) à partir du moment où une théorie formelle est incomplète, on peut lui ajouter un énoncé contentuellement faux choisi parmi les propositions indécidables, sans en détruire la consistance.

> *Selon la doctrine formaliste, aux propositions douées de sens de la mathématique on ajoute des pseudo-assertions transfinies. qui en elles-mêmes sont dépourvues de sens [i.e. n'ont pas d'objets. N.d.T.], mais qui servent seulement à arrondir le système, exactement comme en géométrie on arrondit un système en introduisant des points à l'infini [exemple d'objet idéal]. Cette doctrine présuppose que, si on adjoint au système S des propositions douées de sens, le système T des propositions et axiomes transfinis, et que si on prouve un théorème de S moyennant un détour par les théorèmes de T [en langage hilbertien : si on ajoute les propositions idéales aux propositions réelles], le théorème obtenu est aussi contentuellement vrai, et donc que par l'adjonction des axiomes transfinis aucun théorème contentuellement faux ne devient démontrable. Cette exigence est ordinairement remplacée par celle de consistance. Or je voudrais souligner qu'on ne peut pas, sans autre cérémonie, tenir ces deux exigences pour équivalentes. Car si dans un système formel consistant A (disons celui de la mathématique classique) une proposition douée de sens p est démontrable moyennant les axiomes transfinis, il suit seulement de la consistance de A que non-p n'est pas formellement dérivable à l'intérieur du système A. Néanmoins il reste concevable qu'on pourrait voir la vérité de non-p grâce à des argumentations contentuelles (intuitionnistes) non formellement représentables dans A. En ce cas, malgré la consistance de A, une*

3. Diskussion zur Grundlegung der Mathemaök, 1931, CW, I, p. 200 et suiv.

proposition serait démontrable dans A dont on pourrait voir la fausseté par des argumentations finitaires. Dès qu'on interprète de manière suffisamment stricte la notion de proposition douée de sens (par exemple quand on la restreint à des équations numériques finitaires), rien de ce genre ne se peut produire. Toutefois il est très possible, par exemple, qu'on puisse prouver un énoncé de la forme $\exists x F(x)$, où F est une propriété finitaire de nombres naturels (la négation de la conjecture de Goldbach est de cette forme), par les moyens transfinis de la mathématique classique, et par ailleurs affirmer grâce à des argumentations contentuelles, que tous les nombres ont la propriété non-F : en fait, et c'est là-dessus que j'insiste, cela reste possible même quand on a démontré la consistance du système formel de la mathématique classique, Car d'aucun système formel ne se peut affirmer avec certitude que toutes les argumentations contentuelles y sont représentables.

Sous l'hypothèse de la consistance de la mathématique classique, on peut même donner des exemples de propositions (celles du type Goldbach ou Fermat) qui, quoique vraies contentuellement, sont indémontrables dans le système formel de la mathématique classique. Par conséquent si on ajoute aux axiomes de la mathématique classique la négation d'une de ces propositions, on obtient un système consistant dans lequel une proposition contentuellement fausse est démontrable."

Gödel a donc décrit une partie des raisons qu'avait Brouver de rejeter le tiers-exclus plus clairement que Brouwer lui-même. Pour que l'incomplétude et la possibilité de systèmes consistants non corrects gardent un sens, il faut maintenir une différence entre une réalité mathématique et sa description théorique ou formelle. Les propriétés qu'on vient de mentionner sont des propriétés des formalismes considérés par rapport à une réalité extérieure aux formalismes. Si la théorie est la réalité, il n'en peut être question. En général on admet une dualité entre l'expérience et ce dont on a l'expérience (réalisme *naïf*). Au contraire, les idéalistes identifient réalité et expérience. "La réalité est l'expérience" (Bosanquet). Brouwer aussi les identifie, mais selon lui la dualité ne disparaît pas, elle est située ailleurs, dans la différence entre expérience introspective (actes de pensée) et théorie logique (représentation linguistique) : l'expérience introspective est la réalité ; la théorie formelle, une expression.

S'ensuit que le rôle de la logique dans les mathématiques intuitionnistes est *nul.* Entendons par logique un ensemble de règles pour la direction des raisonnements (la théorie des modèles, l'étude des propriétés générales de systèmes d'axiomes, etc., sont hors de cause). La logique agit dans les mathématiques classiques, puisqu'il y a des théorèmes qu'on ne sait pas prouver par des moyens constructifs.

Cela jette du jour sur la critique brouwerienne du tiers-exclus. Nier ou accepter le tiers n'est pas une affaire de choix d'une logique. La question n'est pas de savoir si telle logique est plus idoine qu'une autre. *Aucune ne l'est.*

Le rejet du tiers-exclus est lié d'une part à cette conception négative du rôle de la logique dans les mathématiques, d'autre part à la question de savoir s'il existe toujours une correspondance entre une réalité sémantique (contentuelle) et une description formelle. Cela peut se traduire en termes de logique en disant qu'il y a des propositions ni démontrées ni réfutées constructivement, évidence que Brouwer obligea de reconnaître à force de contre-exemples. Répugnant à se servir des notions des logiciens (complétude, correction, etc.), il ne pouvait guère s'exprimer autrement. Il n'argumente ni pour ni contre la bivalence : comment croire que changer de logique créerait des intuitions là où il n'y en a pas ? Il voulait montrer que quand on prend pour base une conception de ce qui vaut comme fait mathématique (à savoir des actes de pensée constructifs), on doit constater que le principe du tiers exclu ne déduit pas de *faits*, ou que ces faits ne sont pas constructifs. “L'intuitionnisme recherche en quelle mesure les principes logiques sont susceptibles de faire fonction de moyens de passage sûrs entre constructions mathématiques... Pour le tiers-exclus il apparaît qu'il n'y a pas en général de réalité mathématique qui correspond à ses énonciations ni aux inférences reposant sur lui”[4].

Dans l'absolu les autres lois de l'inférence et *la logique dans son ensemble ne sont pas en meilleure posture* parce qu'elles ne peuvent pas tenir lieu d'intuition. Brouwer a concentré sa critique sur le tiers-exclus dont le cas est *typique*. Il contestait la conception classique de la connaissance “objective”, c'est-à-dire détachable de l'expérience vivante d'un sujet de pensée. De son point de vue la logique intuitionniste, image plus fidèle de déductions intuitivement justifiées, jouit d'une petite supériorité ; pour le fond elle n'a pas plus de pertinence que la logique classique, car elle *n'est pas* davantage *la réalité mathématique*, elle est juste une application des mathématiques à leur langage d'accompagnement, une *mathématique du second ordre* : “Les vérités sont souvent véhiculées par des mots ou des complexes de mots... La logique met le sujet en mesure de déduire, de systèmes de complexes de mots qui transportent des vérités, d'autres complexes de mots qui en général transportent des vérités eux aussi... Cela ne signifie nullement que ces nouveaux complexes de mots transportent des vérités avant que ces vérités aient été objet d'expérience, ni que ces vérités puissent toujours être objet d'expérience. Autrement dit. la logique n'est pas un instrument à quoi on se puisse fier pour découvrir des vérités, et elle ne peut pas déduire des vérités qui ne seraient pas tout aussi accessibles par quelque autre moyen qu'elle”[5]. Des énoncés qui ne seraient prouvables que par des raisonnements sans contenu mathématique, moyennant le tiers-exclus ou la loi de réciprocité, ne sont pas admis comme vrais.

4. 1929, *Recueil Vrin*, XVII p. 266.
5. 1948, *Recueil Vrin*, XXIV, p. 433.

Libre à M. Dummett de reconstituer la critique du tiers-exclus à partir de l'analyse du langage. Il voit l'heure à son clocher : rien à redire sinon que l'essentiel de ce que voulait suggérer Brouver est perdu. Subsiste l'idée d'autonomie de la connaissance, qui se rattache à l'empirisme britannique du XVIII^{e} siècle. Qu'à cela ne tienne, la philosophie analytique est un paradigme réducteur universel équipollent à la scolastique de l'époque de Galilée ; elle fournit réponse à toute question que l'on se peut poser. Ne devrait-on point envier aux philosophes la possession d'un aussi bel instrument ?