Parcours d'un mathématicien
Alain Connes

Voilà, donc je m'excuse par avance pour le côté narcissique de mon exposé. Mais je veux dire, ça fait partie du jeu et bon, on m'a demandé de parler de mon parcours. Et donc, je vais vous expliquer un certain nombre de choses que vous ne trouverez pas dans d'autres conférences et que vous ne trouverez nulle part. La première scène, si vous voulez, elle se produit au lycée Thiers, donc à Marseille en l'année 1966, et c'est au mois de mai et je suis en train de passer le concours de l'École Normale Supérieure. Et c'est la première épreuve. Une épreuve qui dure six heures. Je suis assis sur un banc et j'ai un voisin immédiat. On nous donne le problème de math et mon voisin. Il commence à écrire, à gratter. Moi, je lis l'énoncé du problème. Et puis une heure passe et mon voisin, il continue à écrire. Moi, je ne comprend pas l'énoncé du problème. J'arrive pas, ça ne va pas quoi... Je veux dire. Au bout de deux heures, je regarde tout seul et je réfléchis à rien. Mon voisin écrit. Trois heures, Ça dure six heures, trois heures, rien. Quatre heures. 5. Rien. 6 heures. Je sors de la salle en rendant pratiquement copie blanche et en sortant de la salle, je trouve la solution du problème. Bon, alors là, normalement, la conclusion s'impose. Mais j'avais une bande de copains formidables. J'avais une bande de copains extraordinaires. Ils m'ont dit "Tu ne peux pas faire ça, tu ne peux pas t'arrêter, on va aller se baigner à Cassis !", donc ils m'emmènent me baigner au lieu de rentrer chez moi et de broyer du noir. Ils m'emmènent me baigner à Cassis. On se baigne et tout ça, je commence à me détendre, tout ça. Puis, le lendemain, je dis "j'y retourne". Allez hop ! Puis j'ai été reçu à l'École Normale. Donc, si vous voulez, ce à quoi j'ai réfléchi avant de faire cette conférence, c'est à essayer de vous donner des trucs qui pourront vous servir vraiment. Donc, quand on parle de ténacité, qu'est-ce que cela veut dire ? La ténacité, ça ne veut pas dire qu'on est têtu, etc. Non, ça veut dire que quand les circonstances sont les pires qu'elles puissent être (et là, c'était le cas, je veux dire l'épreuve principale, 6 heures, rien) donc, quand les circonstances sont les pires qu'elles puissent être, eh bien, il ne faut pas renoncer. Quand on peut continuer, il le faut. Il faut continuer. Voilà. C'est ça qui s'est produit au début, au tout début.

Et donc, je suis rentré à l'École Normale et à l'École Normale, j'ai trouvé une ambiance absolument extraordinaire, c'est-à-dire qu'à l'époque, on ne nous obligeait à rien, on ne nous obligeait à rien et en particulier, on ne nous obligeait pas à passer l'agreg. Et ce qui comptait simplement, c'était de se poser des problèmes les uns aux autres et d'essayer de les résoudre, etc. C'était ça l'ambiance de l'École et au bout de trois ou quatre ans, j'avais un prof qui était Gustave Choquet et j'avais été séduit par une théorie qui s'appelle l'analyse standard, qui existe toujours. Mais je ne m'étais pas aperçu au moment où j'avais été séduit par cette théorie qu'en fait, c'était quelque chose qui était un peu chimérique. Et mon prof Gustave Choquet m'avait envoyé à une école d'été de physique qui existe toujours, l'école d'été des Houches,

Conférence donnée dans le cadre du cycle Maths pour tous le 18.12.2017 à l'École Normale Supérieure, à Paris, visionnable ici https://www.youtube.com/watch?v=QfZLKxKTS2c qui a été créée par Cécile de Witt et qui est un endroit extrêmement intéressant pour la communication, justement, de gens plus chevronnés avec des étudiants. Et donc bon, je vais écouter des cours à l'École d'été des Houches et j'avais été repéré à ce moment-là et on m'avait envoyé l'année d'après... on m'avait invité à Seattle, aux Etats-Unis, au Battelle Institute, et on m'avait invité là. J'étais jeune marié et j'avais décidé d'accepter l'invitation. C'était surtout pour visiter les Etats-Unis. Et puis, avec ma femme, on était passés voir mon frère Bernard, qui était à ce moment-là à Princeton. C'était le mois de juillet et à Princeton, il faisait une température terrible. Mais vous savez, la chaleur humide, et il y avait un seul endroit dans le campus qui était agréable. C'était le Book Store. Donc, avec Danye, ma femme, on avait passé l'après-midi au Book Store. Et bon, à l'époque, je n'avais pas trop internet. Il y avait vraiment des livres très intéressants et j'avais cherché un livre parce que je savais qu'on avait décidé de traverser le Canada en train. Au lieu de prendre l'avion pour aller de Princeton, de New York à Seattle, on avait décidé d'aller au Canada, et ensuite, de traverser tout le Canada en train. Mais ça prenait cinq jours. Je m'étais dit cinq jours sans rien. Ça va faire beaucoup. Je vais essayer de trouver un bouquin de math et puis de le lire pendant le trajet, j'avais beaucoup hésité. J'avais regardé pas mal de bouquins, j'avais hésité entre pas mal de bouquins. J'avais fini par en prendre un, et je l'avais regardé, j'avais essayé de le comprendre, je ne comprenais pas tout. J'avais essayé de le comprendre pendant le trajet en train canadien. Il y avait des grandes plaines qu'on traversait pendant des jours et des jours et des jours. Et puis, on était arrivé à Vancouver et à Victoria, l'île de Victoria et enfin on était arrivé à Seattle au bout d'une semaine.

Et à Seattle, quand on arrive, j'étais allé au Battelle Institute pour regarder le programme des conférences. Et à ma grande stupéfaction, j'avais trouvé que l'auteur du livre, que j'avais acheté complètement par hasard quand j'étais passé à Princeton, faisait des conférences là. À ce moment-là, je me suis dit... Ah vraiment, si vous voulez, c'est quelque chose de tout à fait extraordinaire qui arrive, donc en fait, je n'écouterai aucune autre conférence. Je n'irai qu'à celle-là. C'étaient des conférences sur les algèbres de von Neumann, mon premier sujet et donc voilà, von Neumann, il est connu surtout pour autre chose, que les algèbres de von Neumann. Mais c'est lui, si vous voulez, qui a développé ce qu'on appelle les algèbres d'opérateurs. Et le personnage central qui était derrière le livre que j'avais acheté, c'est un mathématicien japonais qui s'appelle Tomita. Et dans l'histoire, c'est aussi une histoire tout à fait extraordinaire, donc je continue en vous racontant des histoires. J'espère que c'est OK. Tomita, si vous voulez, c'est un mathématicien japonais qui a échappé par miracle à la guerre entre le Japon et les Etats-Unis. Il était sourd depuis l'âge de deux ans et comme il était sourd, dans le régiment dans lequel il était, on l'a exempté d'aller dans l'expédition qui devait être faite, parce que comme il était sourd, il n'entendait pas bien les ordres. Ils l'ont laissé tranquille. Or, tout le régiment a été anéanti dans l'expédition qu'ils ont faite. Lui, il a trouvé une théorie absolument géniale, mais il avait un mal fou à communiquer et c'est un autre mathématicien japonais qui s'appelle

Takesaki, qui a écrit un livre dans ces années-là sur la théorie de Tomita, la théorie que Tomita avait inventée. Et donc, si vous voulez, ce qui s'est produit, c'est que j'ai écouté les conférences de Takesaki sur la théorie de Tomita et donc c'était toute une théorie assez nouvelle, etc. Et quand je suis rentré en France. Je me suis décidé à aller au séminaire de Jacques Dixmier. Donc, si vous voulez, Jacques Dixmier faisait un séminaire sur les algèbres d'opérateurs, algèbres d'opérateurs qui avaient été inventées par von Neumann. Elles ont été inventées pour comprendre la mécanique quantique. Pour comprendre ce qu'on appelle les sous-systèmes.

En mécanique quantique, donc, il y avait un formalisme de la mécanique quantique qui avait été bien développé et von Neumann voulait comprendre les sous-systèmes et il y a des sous-systèmes qui correspondent à des factorisations de l'espace de Hilbert. Mais en fait, von Neumann, avec Murray, avait découvert d'autres factorisations et il avait découvert trois types d'algèbres qu'on appelle les algèbres de von Neumann. Il y a ce qu'on appelle les algèbres de type I qui sont très simples. Il y a le type II, qui est beaucoup plus incompréhensible, et le type III, c'est ce qui reste, c'étaient les autres.

Alors quand je suis rentré, il y avait le séminaire Dixmier. Donc je suis allé pour la première fois au séminaire Dixmier et dans le séminaire Dixmier, Dixmier a proposé un sujet qui était la classification des algèbres et il a distribué des articles qu'ensuite on devait exposer dans son séminaire pour expliquer aux autres. Alors là aussi, j'ai levé la main pour avoir un article, je suis allé chercher l'article et quand je suis rentré en train en banlieue, il m'est apparu quelque chose de complètement évident qui était que l'article qu'il m'avait donné pour l'exposer dans le séminaire Dixmier, qui était a priori sur un sujet totalement différent, était en fait parfaitement relié à la théorie de Tomita. Et ça a été ça le début de ma thèse. Donc, en fait, ce que j'ai fait, j'ai écrit une petite lettre à Jacques Dixmier. Il m'a dit “Bon, votre lettre n'a qu'une demi page, ce n'est pas assez détaillé, etc. Renvoyez-moi une lettre plus détaillée.”. Je lui ai envoyé une lettre plus détaillée. Je suis allé le voir dans son bureau et la seule chose qu'il m'ait dite lorsque je suis allé le voir, il m'a dit “Foncez !”. Et à partir de là, les choses se sont déroulées de manière naturelle mais il y a eu une espèce de concours de circonstances qui a fait qu'au début au moins, les choses se sont passées de manière absolument merveilleuse. Alors, après, il y a eu une période, bien sûr, où il fallait faire des calculs extrêmement compliqués, etc. Et il y a eu un moment effectivement où il y a eu, si vous voulez, dans une vie entière, il y a très peu de moments comme ça. Il y en a peut être deux ou trois au grand maximum. Il y a eu un jour ou j'amenais Danye à son lycée et je rentrais en voiture et à un moment donné, il y avait un feu rouge. Alors là, je me suis rendu compte. Mon cerveau s'est rendu compte qu'il y avait une chose qui était complètement évidente, qui était devant moi, que je n'avais pas vue avant, et qui permettait de complètement débloquer la situation. Qu'est-ce que c'était ? C'était la chose suivante. C'était que Tomita et Takesaki, donc, avaient démontré, si vous voulez, que si on a une algèbre comme ça, qu'on appelle algèbre de

von Neumann. Si on donne un état de l'algèbre, c'est une chose assez compliquée, on a automatiquement un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre. Mais ce qui n'était absolument pas clair, c'était que ça, ça dépendait d'un état de l'algèbre. Qu'est-ce qui se passe lorsqu'on change l'état de l'algèbre ? Ce que j'ai compris lorsque j'étais au feu rouge, c'est qu'en fait, lorsqu'on change l'état, le groupe à un paramètre ne change pratiquement pas.
Il ne change pas. Si vous voulez. Si on néglige ce qu'on appelle les automorphismes intérieurs, qui sont les automorphismes qui apparaissent naturellement lorsqu'on prend un espace non-commutatif, lorsqu'on prend une algèbre non-commutative, automatiquement, les automorphismes qui viennent de la non-commutativité, lorsqu'on les efface, l'ambiguïté disparaît. Alors quel a été, si vous voulez, le message, quelle a été la conséquence philosophique de ce truc-là. C'est un truc qui m'a suivi toute mon existence mathématique. C'est le fait que la non-commutativité implique, engendre le temps, implique une évolution temporelle. Alors, je n'ai pas fait de transparent là-dessus, mais pour vous expliquer ce que c'est que la non-commutativité, il faut que je vous raconte à nouveau une histoire qui explique comment elle a été découverte en physique. Elle a été découverte en physique par Heisenberg. Donc Heisenberg était un physicien et à un moment donné, il était, je crois, à Göttingen et il a été victime d'un rhume des foins qui était terrible et qui faisait qu'à l'époque, on ne pouvait pas le soigner de manière efficace. La seule manière de soigner le rhume des foins, c'était d'envoyer les gens sur une île où il n'y avait pas de pollen. On l'a envoyé sur une île qui s'appelle Heligoland et bon, alors il était dans cette île, il était logé par une vieille dame et là, il s'est attelé à faire des calculs. Il était en train de faire des calculs et vers les 4 heures du matin, il a eu une illumination. Il a compris. En fait, il a vu un espèce de paysage qui s'est dévoilé sous ses yeux. Il a compris que les quantités physiques, par exemple, si vous écrivez $e = mc^2$ ou que vous mettiez c^2 fois m, ça fait pareil.

Heisenberg a compris que lorsqu'on regarde un système microscopique, ce n'est pas pareil. C'est-à-dire que si vous multipliez la position d'une particule par le moment ou le moment par la position, vous n'obtenez pas le même résultat. Et ça, c'était quelque chose de faramineux qu'il a trouvé. Et ce qu'il raconte dans ses mémoires, il raconte qu'au lieu d'aller se coucher lorsqu'il a fait cette découverte, il ne pouvait pas. Il est allé gravir un piton rocheux qui était au bord de l'île et il a attendu le lever du soleil en haut d'un piton rocheux. Donc, si vous voulez, la chose extraordinaire, c'est que les quantités physiques au niveau microscopique ne commutent pas. C'est ça qui a complètement débloqué la mécanique quantique et c'est ça qui a entraîné von Neumann à développer les algèbres de von Neumann parce que les algèbres de von Neumann sont précisément, si vous voulez, les algèbres qui vont rentrer dans la physique de la mécanique quantique. Et alors ? Donc, l'apport que j'ai fait dans ma thèse, si vous voulez, c'était de comprendre, justement, qu'en fait cette non-commutativité, elle va engendrer le temps de manière complètement canonique, complètement naturelle. Alors ça, bien sûr, ça a donné un tas d'invariants de ces algèbres. Ça a permis de les classifier, mais bien sûr, ça a pris beaucoup de temps de les classifier, c'est-à-dire que ça a aussi permis de résoudre le type III. Ça a permis de le réduire. C'est ce que j'ai fait dans la deuxième partie de ma thèse, c'est de réduire le type III au type II avec des automorphismes. Mais bien sûr, après, il fallait classifier les types II au moins dans le cas hyperfini et classifier les automorphismes, ça a pris, ça m'a pris un temps absolument considérable et il y a eu une période de mon existence mathématique qui a été très, très propice pour ça. Ça a été la période de mon service militaire. Alors bien sûr, vous allez rigoler parce que si j'avais fait vraiment mon service militaire, ça aurait été très difficile de faire des maths. Mais bon, j'ai eu de la chance. J'ai fait mon service militaire en coopération avec les pays sous développés, avec le Canada anglais.

Donc, c'était quand même drôlement sympa. Alors, j'étais dans une petite université qui est l'université de Kingston, dans l'Ontario. Et là, à nouveau, je veux dire, on a rencontré des gens extrêmement extraordinaires, humainement, autour de nous, dans un petit groupe. Et le fait que cette université n'était pas une université centrale, ce n'était pas Princeton, etc. Ça donnait une liberté de pensée qui est incroyable, c'est-à-dire si vous voulez, ça permet dans une petite université, ou bien si vous êtes dans un endroit comme ça, d'être un peu décalé. Ça permet de ne pas avoir le poids de la science, de toutes les connaissances, etc., sur les épaules, et ça permet d'avoir une certaine liberté. Donc, j'ai ressenti cette liberté peut-être plus que jamais dans cet endroit-là. Donc moi, j'étais très content à ce moment-là puisque j'avais pratiquement terminé ce que je voulais faire qui était de comprendre les facteurs, de comprendre le type III, etc.

Et puis, je suis rentré en France et quand je suis rentré en France, j'ai été invité à l'IHES à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Et là, quand je suis arrivé, j'ai eu un sacré choc, c'est-à-dire que je suis allé au déjeuner là où les gens vont déjeuner d'habitude, il y a une petite cafétéria et il y avait des gens qui parlaient de math. Je ne comprenais absolument pas ce qu'ils racontaient. C'est-à-dire que si vous voulez, j'étais un spécialiste d'un sujet pointu, bien sûr très difficile, mais je n'étais pas... je ne connaissais pas, par exemple, ce que c'est que le complexe de De Rham, etc. Il y avait tous ces trucs-là qui me passaient largement au-dessus de la tête et j'ai eu de la chance à nouveau. J'ai eu vraiment beaucoup de chance. J'ai rencontré un mathématicien qui s'appelle Dennis Sullivan qui, à l'époque, était l'un des piliers de l'IHES. Ça, c'était en 1976. Et ce mathématicien, il avait la propriété suivante, très, très unique. Il avait la propriété suivante, qui était que quand il voyait quelqu'un de nouveau, il venait s'asseoir à côté de lui, et il lui posait des questions en commençant par “Sur quoi vous travaillez ?”. Bon, alors, on discutait avec lui et au début, on pensait qu'il était complètement idiot, parce qu'il posait des questions naïves, si vous voulez. Puis ça continuait comme ça et il continuait à poser des questions de nature naïve. Et puis, au bout d'une dizaine de questions, vous vous aperceviez que vous ne compreniez pas de quoi vous parliez.

Il avait un pouvoir socratique absolument extraordinaire. Donc, j'ai commencé à discuter, à discuter en détail avec lui, etc. Et en discutant avec lui, il m'a appris un tas de choses, m'a appris quantité de choses que je ne connaissais pas. Il m'a appris la géométrie et ce qui m'embêtait beaucoup, c'était que les travaux que j'avais faits sur les algèbres de von Neumann, si vous voulez, ça paraissait être dans un endroit assez excentré des mathématiques. Il y a une espèce de paysage des mathématiques et dans ce paysage, il y a des endroits qui sont vraiment tout à fait au centre. Et puis, il y a des endroits qui sont beaucoup plus périphériques et j'avais l'impression que c'était relié à la physique, bien sûr, mais j'avais l'impression que les algèbres de von Neumann, c'était quelque chose quand même qui restait assez périphérique. Et je me suis rendu compte, en discutant avec Dennis Sullivan, qu'en fait, on pouvait associer à une donnée géométrique qui est parfaitement connue, qui est ce qu'on appelle un feuilletage, on pouvait lui associer une algèbre de von Neumann. Et qu'est ce que ça permettait de faire ? Ça permettait d'illustrer la classification que j'avais faite à partir d'objets géométriques qui étaient des objets géométriques parfaitement compréhensible. Le plus simple des feuilletages, vous savez, le feuilletage, vous avez pensé à un feuilletage inversé. C'est en gros. C'est un espace comme ici, le tore. Mais le feuilletage, ce sont les lignes qui s'enroulent ici. Mais ce qui est frappant dans un feuilletage, c'est le fait qu'alors que l'espace total est compact et fini, si vous voulez, les feuilles là dans l'enroulement, sont infinies, c'est-à-dire que les feuilles, lorsqu'on regarde localement comme à droite, on voit quelque chose qui est très simple, c'est un produit. Mais lorsqu'on regarde globalement les feuilles, elles ne reviennent pas au même endroit. Elles s'enroulent indéfiniment, d'accord. Alors ça a été un point absolument crucial parce que les feuilletages, en géométrie, les gens savent très bien ce que c'est. Et ils en ont quantités d'exemples. Et il se fait que la classification que j'avais faite avec les facteurs de type III_λ, de type III, etc, qui paraissait quelque chose d'assez bizarre et d'assez reculée, d'assez excentrée dans le paysage mathématique, en fait, elle était parfaitement illustrée par les feuilletages les plus naturels, les plus géométriques qu'on puisse imaginer. Par exemple, ce feuilletage-là, c'est un feuilletage de type II_∞. Et si on prend par exemple un feuilletage géodésique et cyclique, c'est un feuilletage de type III, etc. Donc, si vous voulez, ça, ça, donnait un sens aux objets algébriques que j'avais trouvés, ça leur donnait un sens géométrique. Une autre rencontre qui a été absolument cruciale pour moi à ce moment-là, c'était en 78, j'étais invité à donner une conférence d'une heure au Congrès international des mathématiciens. J'ai été très frappé par la chose suivante, c'est que quand j'ai fait mon exposé, je l'avais préparé et préparé, préparé. Quand j'ai fait mon exposé, bien sûr, mon exposé était sur mes résultats, sur la classification des facteurs. Mais à la fin, j'avais rajouté des résultats sur les feuilletages, une annexe, et alors de manière très, très bizarre, pour moi, la partie sur les feuilletages, c'est une partie complètement triviale et par contre, la partie vraiment vraiment dure, très, très dure, c'était la partie sur les algèbres d'opérateurs. Après mon exposé, Armand Borel est venu me voir et il était tout excité par la partie sur les feuilletages.

Et du coup, il m'a invité à Princeton et j'ai été invité à Princeton dans l'année

78-79 et là, à Princeton, j'ai fait une rencontre qui allait jouer un rôle essentiel dans ma vie mathématique. C'est la rencontre de mon collaborateur qui s'appelle Henri Moscovici, qui est professeur à Colombus, aux Etats-Unis, et avec lequel, si vous voulez, j'ai vraiment collaboré, la plupart de mes articles ont été écrits en collaboration avec lui. Il faut aussi que je vous raconte une autre histoire sur Princeton. J'avais un collègue à l'École Normale qui avait fait un séjour à Princeton avant, très longtemps avant. Je crois qu'il avait fait un séjour pendant qu'on était encore élèves à l'École. Et c'était quelqu'un d'assez gros. Et alors qu'il était un peu rond, il avait passé un an à Bristol et quand il était revenu, il était absolument filiforme. On lui avait demandé “Mais qu'est ce qui s'est passé ?”. Il nous avait raconté qu'il avait passé un an à Princeton, qu'il n'avait parlé à personne, qu'il n'avait parlé à personne, c'est-à-dire que c'était un endroit qui était tellement, comment dire, hiérarchisé, etc., qu'en fait, il n'avait réussi à parler à personne. Donc, il y avait ce côté-là, il y avait ce côté-là, vraiment, à Princeton. Et moi, j'ai eu une chance inouïe qui a été de rencontrer Henri et avec Henri, bien sûr, on a tout de suite commencé à travailler et on a collaboré ensemble.

Donc, si vous voulez, quel point essentiel est apparu jusque-là ? Quel était le point essentiel ? En fait, j'ai compris à ce moment-là, à cause des feuilletages, j'ai compris la portée de ce qui se passait parce qu'en fait, ce qui se passe, si vous voulez, lorsque vous regardez ce type d'espace, ce qui se passe, c'est que l'on a en fait un espace qui, si on essaye de chercher sa cardinalité au niveau ensembliste du mot... Si on regarde l'espace des feuilles d'un feuilletage, d'accord, si on regarde l'espace des orbites ici, si on regarde l'espace des feuilles d'un feuilletage, on s'aperçoit que si on prend la théorie des ensembles ordinaires, cet ensemble a la cardinalité du continu. Mais qu'en fait, on ne peut pas le mettre en bijection avec le continu de manière constructive. En fait, on s'aperçoit qu'il est impossible, on peut le démontrer, il est impossible de construire une injection de cet ensemble dans les nombres réels. Donc, en fait, je me suis aperçu très, très progressivement que ces espaces en fait, si on cherchait à les comprendre de la manière usuelle avec la théorie des fonctions, etc., on n'y arriverait absolument pas et que la seule manière de les comprendre, c'était de leur associer une algèbre non-commutative. Et c'est là le début de la géométrie non-commutative. Pourquoi est ce que c'est le début ? Le tout début, parce que l'algèbre des fonctions associée à un tel espace ne voit cet espace qu'au niveau de la théorie de la mesure. Or, la théorie de la mesure, c'est une théorie extrêmement floue qui vous permet de déchirer l'espace en plusieurs parties, etc. Mais qui n'en donne pas la topologie, qui ne donne pas tout le reste. Et graduellement, la géométrie non-commutative, c'est une théorie qui a permis, si vous voulez, de redéfinir, de reconstruire toutes les notions habituelles qui vont de la théorie de la mesure, bien sûr, à la topologie, à la géométrie différentielle et même à la vraie géométrie, à la géométrie riemannienne. Si vous voulez, dans le cas commutatif, des espaces comme ça, en fait, ce qui s'est dévoilé à ce moment-là, c'est qu'il y avait tout un univers complètement nouveau, d'espaces complètement nouveaux qui ne demandaient qu'à être compris. Mais dans la compréhension, il était d'abord nécessaire de savoir que ce serait forcément intéressant. Pourquoi était-on sûr que ce serait intéressant ? On était sûr que ça serait intéressant parce qu'un tel espace était automatiquement un objet dynamique. C'est-à-dire qu'un tel espace a automatiquement son propre temps, il engendre son propre temps, alors qu'un espace ordinaire comme une variété, etc., c'est statique, ça ne bouge pas. Alors que ces espaces-là, ils tournent avec le temps. Donc c'est quelque chose d'absolument extraordinaire. Donc, on savait que ce serait tout à fait extraordinaire. Mais bon, bien sûr, après, il fallait développer la théorie et donc il fallait développer la géométrie. Si vous voulez, des espaces dans les corps, ils ne commutent pas. Le premier exemple, bien sûr, c'était l'exemple qu'avait trouvé Heisenberg, c'est-à-dire l'exemple de la mécanique quantique. Donc, il fallait complètement retrouver, redéfinir la géométrie pour ces espaces.

Alors, quand on parle de géométrie, bien sûr, bon, en mathématiques, il y a toutes sortes de géométries que les gens ont inventées et qui sont plus ou moins élaborées. Mais bon, la géométrie la plus, la plus pertinente, la plus importante, c'est la géométrie de l'espace dans lequel on vit. Donc, en fait, c'est ça qui va m'intéresser, c'est ça qui m'a intéressé pendant des années. C'est la géométrie de l'espace dans lequel on vit. Et ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'en fait, ce travail est basé sur la mécanique quantique, il est basé sur le formalisme quantique, etc. En fait, je réponds à une question qui était posée par Riemann dans sa leçon inaugurale. Dans sa leçon inaugurale, Riemann était parfaitement conscient du fait que la notion de géométrie qu'il avait formulée, lui, à partir de Gauss, etc., à partir de ce qu'on savait à l'époque, la notion que Riemann avait formulée n'était pas nécessairement une notion qui continuerait à avoir du sens dans l'infiniment petit. Qu'est-ce que ça veut dire ? Il était clair à son époque que ça couvrait les grandes distances, mais Riemann était extrêmement précautionneux. Et ce qu'il explique, c'est que les raisons pour lesquelles il ne croit pas que ça continue à avoir un sens dans l'infiniment petit, c'est que le concept de corps solide ou le concept de rayon lumineux n'a plus de sens dans l'infiniment petit. En fait, on est tout de suite dans le domaine quantique quand on regarde ça. Donc oui, il écrit explicitement dans ses écrits que dans l'infiniment petit, il est tout à fait probable que la notion de géométrie ne sera pas conforme à ce qu'elle est, à celle qu'il avait donnée dans sa leçon inaugurale. Alors, en fait, ce qui se produit, donc, il continue bien sûr et continue. Et il explique d'ailleurs qu'en fait, le fondement des rapports métriques doit être cherché dans les forces de liaison qui agissent dans l'espace. Je ne sais pas comment il a fait pour avoir cette intuition absolument extraordinaire. Donc, ce que dit Riemann, si vous voulez, c'est que pour comprendre vraiment la géométrie de l'espace dans lequel on vit, il faut en fait comprendre les forces qui tiennent les choses ensemble. Alors, bien sûr, depuis Riemann, il y a eu des progrès absolument extraordinaires par rapport à ce qu'a dit Riemann. C'est que, bien sûr, il faut la non-commutativité.

Cela conduit directement au domaine qui est la physique, qui ne fait pas partie des math. Mais bon, il explique en quel sens la réflexion mathématique est cruciale pour ça.

Et ce qui est très important, surtout, c'est que Riemann fait référence à Newton. Et Newton avait pressenti lui aussi que lorsqu'on va dans des distances beaucoup plus petites, celles qu'on ne peut pas observer avec l'œil, il y aura sûrement de nouvelles forces qui apparaîtront. Donc, ce que dit Newton, c'est que l'attraction de la gravité ou du magnétisme, et l'électricité sont visibles à grande distance. Donc, on peut les observer de manière usuelle. Mais bien sûr, on sait tout ce qui va se passer à distance.

Les distances eaucoup plus courtes échappent à l'observation. Et il y a un livre que je vous recommande sur l'histoire de la physique des particules dont l'auteur est Abraham Pais et dans lequel il explique justement comment, en 1895, c'était après Riemann, puisque Riemann s'était dans les années 1860, entre 1895 et maintenant, on a réussi au niveau vision dans l'infiniment petit, à augmenter la vision par un facteur 10. C'est quelque chose de colossal et en faisant cela, en fait, le vrai microscope, le vrai microscope qui a permis de voir dans cette toute petite distance, c'est le LHC.

D'accord ? C'est au LHC, en fait, qu'on a réussi à percer la structure à un niveau beaucoup plus, beaucoup plus petit. Mais lorsqu'on parle de distances beaucoup plus petites, ça revient à dire des énergies beaucoup plus grandes. Donc maintenant, effectivement, on arrive à 10 TeV, c'est-à-dire à 10 puissance 13 électronvolts.

Donc, ce qui s'est produit, c'est que le formalisme que j'avais dû mettre au point pour des raisons purement mathématiques, pour faire la géométrie des espaces non-commutatifs, s'est révélé, ce formalisme, dans les années 85, à partir du moment où je suis rentré au Collège de France, il s'est révélé incroyablement adapté pour comprendre la structure géométrique de l'espace dans lequel on vit. Mais à partir des résultats expérimentaux, c'est-à-dire pour arriver à comprendre que l'espace dans lequel on vit n'est pas simplement le continu à toutes les échelles, qu'il a une structure fine, mais que cette structure fine, en fait, elle est exactement, selon les mots de Riemann, dictée par les forces qui agissent dans l'infiniment petit.

Et alors, comment est-ce que le paradigme a changé ? Ça, je peux parfaitement l'expliquer. Le paradigme a changé de la manière suivante. Donc, le but du voyage ?

Si vous voulez, ce à quoi on est arrivé dans les années très récentes, c'est à comprendre cet espèce d'énorme mécanisme qu'on appelle le modèle standard couplé avec la gravitation. Mais le comprendre comme étant simplement la gravitation, simplement sur un espace qui est plus subtil, qui est plus compliqué et qui a une structure plus fine que celle de l'espace ordinaire. Mais alors, que se passe-t-il au niveau des concepts ? Au niveau des concepts, ce qui se passe, c'est quelque chose de très simple à comprendre. Au moment de Riemann, au moment où Gauss, etc., définissaient leur métrique, les mesures des distances étaient faites en essayant de prendre le chemin le plus court qui va du point A au point B.

C'est ce qui est montré ici sur cette image et en fait, il y a eu toute une expédition qui a été faite à la fin de la Révolution et puis jusqu'aux années 1799, par deux Français. Je ne sais pas si vous avez entendu parler de ça, mais c'est eux qui ont mesuré le méridien. C'est eux qui ont essayé de définir l'unité de longueur en mesurant la distance entre Dunkerque et Barcelone et à partir de leurs mesures. Bon, il y a eu toutes sortes d'épisodes, mais à partir de la mesure, on a défini une unité de longueur qu'on appelait le mètre.

Et quand j'allais à l'école, on apprenait que l'unité de longueur, c'était le mètre-étalon qui était déposé au Pavillon de Breteuil, près de Paris. C'était une barre de platine. Mais les choses ont évolué. C'est l'ancienne géométrie qui consiste à mesurer les longueurs comme ça.

Mais ce qui s'est produit, il s'est produit quelque chose d'extraordinaire qui est qu'un jour, il y avait une réunion de la conférence des poids et mesures. Et il y a quelqu'un dans la salle qui a dit “votre unité de longueur, eh bien, elle change de longueur.”. C'est embêtant quand même si l'unité de longueur change de longueur. Et qu'est ce qui s'était produit ? Ce qui s'était produit, c'est que l'homme en question avait mesuré le mètre étalon en le comparant à la longueur d'onde du krypton.

Et il s'était aperçu que la longueur changeait. De fil en aiguille, les physiciens ont beaucoup réfléchi et ils en sont arrivés à définir l'unité de longueur non plus comme étant le mètre-étalon qui est déposé quelque part au pavillon de Breteuil, etc. Il faut bien réfléchir que quand vous dites l'unité de longueur, c'est le mètre-étalon déposé au Pavillon de Breteuil, si vous voulez unifier le système métrique dans la galaxie, si vous expliquez aux gens d'une autre planète de notre système solaire que pour mesurer leur lit, il faut qu'ils viennent au Pavillon de Breteuil, ce sera un peu compliqué, donc il a trouvé une bien meilleure solution.

Ils ont trouvé une bien meilleure solution qui était de définir l'unité de longueur. D'abord, ils l'ont pris à partir de la longueur d'onde, du krypton, etc. Après, ils ont défini à partir de la longueur d'onde de ce qu'on appelle la transition hyperfine du césium. Le césium a une certaine transition hyperfine dans la longueur d'onde. C'est une longueur d'onde de type micro-ondes qui est de l'ordre de 3,5 cm et ça permet de mesurer de manière très, très efficace.

Et alors ? Évidemment, là, ça change tout. Parce que si, par exemple, on définissait l'unité de longueur à partir du spectre de l'hydrogène, par exemple, l'hydrogène est présent dans tout l'univers. Donc là, ce serait parfaitement valable. D'accord. Alors, il se fait que la transition entre l'ancienne définition du maître localisé à Breteuil et la définition à partir de la longueur d'onde du spectre du césium, c'est exactement la transition entre l'ancienne géométrie et la géométrie non-commutative.

C'est exactement ça.

C'est une géométrie de type spectral, de nature spectrale. Et donc, c'est ça, le changement, c'est le changement de l'unité de longueur. Donc, c'est une géométrie de nature spectrale et en plus, si vous voulez la non-commutativité, il y a la non-commutativité de l'algèbre, elle est pratiquement imposée par ce qu'on appelle les théories de jauge. Les physiciens ont découvert les interactions fortes, par exemple, ils ont découvert qu'il n'y a pas seulement l'électrodynamique, mais qu'il y a aussi des interactions fortes qui tiennent ensemble les quarks dans un atome.

Et pour cela, ils ont eu besoin de théories de jauge non-abéliennes. Eh bien, c'est ça, c'est ça qui est vraiment à la racine du fait que l'espace a une toute petite structure fine qui est non-commutative.

Donc, il y a une saga, une saga très, très longue que je ne veux pas vous raconter. Mais je vous raconterai seulement la fin, il y a eu des hauts et des bas, c'est-à-dire ? J'ai eu des collaborateurs, comme Chamseddine, avec qui on a donc fait un modèle si vous voulez, un modèle de l'espace-temps qui était basé sur ces idées-là, sur la structure hyperfine, sur la structure qui vient de la géométrie non-commutative. Il y a eu des hauts et des bas.

Il y a eu, en 98, la découverte du neutrino, du mélange des neutrinos, les modèles de Calabi-Yau. Donc là, on a abandonné, on a abandonné pendant un certain nombre d'années. Après, on est revenu en 2005 avec une nouvelle idée qui était de changer une dimension. Tout a marché. Formidable. Sauf qu'en 2008, il y a eu. Il y a eu une exclusion de la masse du Higgs qui contredisait notre travail.

Par exemple, j'ai écrit un blog, j'avais écrit en citant Lucrèce qui parle des gens qui se réjouissent du malheur des autres. Donc effectivement, là, on était très malheureux, très malheureux. Et puis il y a eu une période, donc ça, c'était à partir de 2008. Et puis, il y a eu une espèce de résurrection à nouveau, simplement, c'est la raison pour laquelle je vous dis ça, c'est qu'il ne faut jamais se décourager.

Faut jamais se décourager.

Il y a eu une période de découragement qui était très longue à partir de 2008 et en 2012, mon collaborateur m'a envoyé un mail et il m'a dit la chose suivante, il m'a dit : “Ecoute, il y a 3 équipes différentes de physiciens qui ont réussi à stabiliser le modèle standard jusqu'à le rendre compatible avec la masse du Higgs.” Bon, alors d'accord, je continue à lire son mail et il me dit “ils ont fait ça en rajoutant un champ scalaire qui vérifie certaines propriétés de couplage avec le vide.”. Puis, je continue à lire son message, il me dit : “ce champ scalaire, on l'avait dans notre article de 2010, mais on l'avait négligé.”. Donc en fait, on l'avait. En fait, on s'était découragé. Quoi ? C'est-à-dire qu'on avait dit : “Le champ scalaire, il ne change rien.”. Si on avait été courageux, vraiment courageux, on l'aurait pris en compte et on aurait vu que tout marchait merveilleusement. Donc voilà ça, c'est pour ce côté-là.

Et en fait, donc, ce qui s'est produit si vous voulez, au niveau de mon développement mathématique, c'est qu'après avoir développé la théorie qu'on appelle la géométrie non-commutative, donc c'est une théorie qui est quand même... je ne voudrais pas vous faire croire que c'est une théorie qui est simple, c'est une théorie qui est très élaborée, elle a un tas de relations avec un tas de concepts différents, etc. Et en gros, chacun des concepts qui intervient dans la géométrie dont on a l'habitude doit être modifié et on le regarde d'une manière complètement différente.

Même l'intégrale, même la notion d'intégrale est changée, elle est remplacée par ce qu'on appelle la trace de Dixmier et qui est un concept qui a été inventé par Dixmier et qui joue un rôle absolument central dans cette théorie. Bon, elle est reliée à un tas d'autres théories, mais je ne voulais pas vous embêter avec ça. Maintenant, je vais vous expliquer ça...

Alors en fait, il s'est produit un autre phénomène assez bizarre, c'est que dans l'année 1996, j'ai été à nouveau invité à Seattle. Je ne pouvais pas refuser si j'étais à nouveau invité à Seattle, et c'était pour l'anniversaire d'Atle Selberg, qui était un grand théoricien des nombres, et j'avais été invité parce qu'avec mon collaborateur Jean-Benoît Bost, on avait écrit un article dans lequel on trouvait qu'on avait ce qu'on appelle une transition de phase sur un système de mécanique statistique et on trouvait que la fonction de partition du système était la fonction zêta de Riemann.

Donc, comme cette conférence était une conférence sur la fonction zêta de Riemann, ils m'avaient invité, alors j'avais bien fait, j'avais un peu suivi le même parcours qu'avant. Je m'étais arrêté à Victoria, puis après, j'étais allé à Seattle et à Seattle, j'avais donné ma conférence et après la conférence, j'avais vu Selberg qui m'avait dit : “It is not clear that what you are doing will be related to...”. Si vous voulez, bien sûr, on connaît la fameuse conjecture. Il m'avait dit ça, il m'avait dit ça. Et bon, évidemment, je veux dire, on aime bien aussi être provoqué, on aime bien que les gens vous critiquent. Ça manque pas, ça, en mathématiques, pas de difficulté là-dessus.

Et d'ailleurs, je dois rajouter une chose, c'est que non seulement les gens vous critiquent, mais vous avez de bons amis qui vous répercutent les critiques. Donc ça ne manque pas, mais ça a un côté positif. Ça a un côté positif parce que non seulement il faut être accrocheur, mais il faut être capable d'être, de transformer la frustration que vous avez lorsque les gens vous critiquent en énergie positive. Cela, c'est une qualité absolument cruciale. C'est une qualité essentielle, c'est-à-dire que si quelqu'un vous critique d'une manière ou d'une autre, il faut arriver à prendre ça et à le considérer comme un potentiel d'énergie, pas comme quelque chose de négatif. Il faut être capable de se distancier par rapport à soi-même et de le voir comme une énergie positive. D'accord, donc, quand je suis rentré de Seattle au lieu de... je ne me suis pas occupé du décalage horaire. C'est-à-dire ? Je suis resté sur l'heure de Seattle, je suis resté sur l'heure de Seattle et ce que j'ai fait, c'est que pendant une semaine, je n'ai pas travaillé.

Je lisais le livre qui s'appelle *The Staff*, je ne sais pas si vous connaissez ce livre, c'est un livre sur les astronautes et sur Apollo 13, etc. Sur toute cette histoire, c'est un livre magnifique. Bon, je lisais ce livre, je l'ai lu, je l'ai dégusté sur place, on aurait pu, j'aurais pu le lire en quelques heures.

Mais en fait, je l'ai dégusté petit à petit et au bout d'une semaine, j'ai compris qu'en fait, ce que les gens cherchaient lorsqu'ils cherchaient une réalisation spectrale des zéros de zêta, ils la cherchaient tous sous la forme de ce qu'on appelle un spectre d'émission, c'est-à-dire un spectre d'émission, c'est un spectre, vous aurez un fond noir et vous aurez des raies d'émission. Par exemple, si vous prenez du sodium et que vous le chauffez, le sodium va vous donner un spectre. Si vous faites passer la lumière à travers un prisme, il va vous donner un certain nombre de raies très brillantes, mais bien isolées comme ça, sur un fond noir. D'accord, mais en fait, ce n'est pas comme ça qu'on a vu les spectres pour la première fois. Les spectres, c'est Fraunhofer qui les a découverts vraiment et il les a découverts en prenant la lumière qui venait du soleil, on avait déjà regardé cette lumière à travers un prisme, le prisme décompose la lumière en couleurs différentes, les couleurs de l'arc en ciel.

Mais ce qu'a fait Fraunhofer, il a eu une idée géniale. Il a eu l'idée géniale de regarder ça au microscope. Et quand il a regardé au microscope, il s'est aperçu qu'en fait, il y avait plein de raies noires. D'abord, il a nettoyé son truc, d'accord. Et puis, en fait, il s'est aperçu que quel que soit l'instrument qu'il prenait, il y avait les mêmes raies noires. Et alors ? L'histoire merveilleuse qui était derrière, c'est qu'après, il y a Bunsen et Kirchhoff qui ont réussi en chauffant des corps comme le sodium, etc., à produire les mêmes raies, mais à les produire comme spectres d'émission. Pas comme des raies noires, l'inverse, sauf qu'il manquait encore d'essayer avec la lumière du soleil. Il y avait des raies noires qu'on ne pouvait pas produire par émission. Alors évidemment, les physiciens sont toujours malins, ils ont dit ces raies noires, c'est un nouveau corps qu'on va appeler Hélium, comme le soleil, bien sûr, quand ils l'ont appelé Hélium, bien sûr, c'est un peu comme la matière noire.

Vous allez me dire qu'est-ce que c'est que cette histoire ? Sauf qu'il y a eu une éruption du Vésuve. Et quand ils ont fait les spectres d'émission de la lave du Vésuve, ils ont trouvé de l'hélium dedans. D'accord donc, ce que j'avais compris en rentrant de Seattle, c'était qu'en fait, au lieu de chercher un spectre d'émission, ce qui était ce que les gens cherchaient, mais il y avait un signe "-" qui ne marchait pas, il y avait toujours un signe "-" dans la formule qui ne marchait pas.

En fait, il fallait chercher le spectre comme un spectre d'absorption. Et alors ? J'avais déjà l'espace non-commutatif qu'il fallait pour ça. J'avais déjà l'espace non-commutatif qu'il fallait. Et je savais démontrer que cet espace non-commutatif donnait les bons termes dans ce qu'on appelle la formule de Riemann. Mais j'avais vu alors après, bien sûr, comme je savais qu'il fallait chercher un spectre d'absorption. J'ai regardé si ça, effectivement, ça donnait la réalisation spectrale. Et alors, le miracle, c'est que ça donnait la réalisation spectrale.

C'est ça que j'ai compris en rentrant de Seattle. Après une période d'ennui total, que je ne recommanderais jamais assez. Il n'y avait pas de mails à cette époque. Moi, je n'étais pas connecté. D'accord. C'était une période qui était propice à laisser le cerveau fonctionner parce que je lisais autre chose. Je ne faisais pas de math. D'accord. Je lisais autre chose et au bout d'un moment, c'est venu comme quelque chose qui est devenu complètement naturel. Et alors, qu'est ce que ça voulait dire ?

Mais ça voulait dire que cette géométrie très abstraite qui était venue de loin, n'est-ce pas, et qui était venue de von Neumann, qui était venue de Heisenberg, etc. Elle avait l'air de marcher, elle avait l'air de marcher aussi bien pour l'espace dans lequel on vit que pour l'espace sans doute le plus difficile qui existe, qui est celui qui comprend la nature des nombres premiers, de l'ensemble des nombres premiers, parce que ce qui est derrière la réalisation spectrale, la fonction d'état, etc., c'est exactement la nature de l'ensemble des nombres premiers. Alors ça, c'était le point de départ, c'était le point de départ. J'ai écrit une petite note aux Comptes-Rendus. J'ai été invité à Princeton.

Et alors là, ce qui s'est produit, moi, j'appelle ça un gag, je trouve ça très marrant. C'est-à-dire que j'ai fait ma conférence à Princeton. Bon, etc. C'est vrai que ce qu'il faut savoir, c'est que le sujet en question, qui est l'hypothèse de Riemann dès qu'on s'approche, c'est un sujet qui est miné. Donc, il faut savoir que c'est protégé par des montagnes de scepticisme. D'accord. Mais toujours est-il que bon, j'avais trouvé quand-même quelque chose.

Je suis allé là bas. J'ai fait mon exposé, j'avais sûrement compris quelque chose, si vous voulez, c'était la compréhension de la formule de Riemann-Weil sous forme de formule de traces. Et puis, il y a deux personnes que je connaissais et que je connais très bien. Il y a une personne avec laquelle j'avais collaboré, Paula Cohen et Bombieri qui ont fait un canular. En fait, un canular pour le 1^{er} avril, c'est-à-dire le 1^{er} avril, vous savez, d'habitude, on fait des canulars, on voit des trucs. Donc, ils ont envoyé un canular par email en disant qu'après ma conférence, il y avait un Russe qui était là et qui avait réussi à démontrer l'hypothèse de Riemann. Bon, alors c'était très drôle.

J'ai rigolé, etc. Sauf que je n'avais pas réalisé ça, c'était en 98, en mars 98, et je n'avais pas réalisé que ce canular allait être envoyé un peu partout. Alors c'est envoyé un peu partout. Forcément, il y a des gens qui l'ont pris au sérieux. Et alors ? Ce qui est absolument incroyable, c'est qu'il a été pris au sérieux. C'était en 1998. C'est une année où le Congrès international des mathématiciens avait lieu à Berlin. Bon, je n'ai rien contre les Allemands, mais bon, si vous voulez, il y a eu, en gros, il y a eu des Allemands qui ont pris ça au sérieux. Et alors, qu'est ce qu'ils ont décidé de faire ?

C'est quelque chose qui est absolument incroyable. Je m'en suis rendu compte seulement récemment parce que je veux dire, à l'époque, j'avais ignoré ce jeu. Je haussais les épaules. Qu'est-ce qu'ils ont décidé de faire ? Ils ont décidé d'inviter pour parler une heure au congrès, la personne qui était la mieux placée pour être mon compétiteur. D'accord. Donc, au lieu de m'inviter, moi, par exemple, ils ont invité une personne qui travaillait sur le même sujet et ils lui ont donné un boulevard.

Et bon bah, je me souviens que Selberg, quand je l'ai revu la même année, c'était après le congrès. Il m'a dit qu'il n'avait jamais entendu un exposé aussi vide. Et moi, je ne savais pas à cette époque-là, je n'avais pas regardé, j'ai regardé récemment et j'ai été estomaqué parce que je me suis aperçu que cet exposé, en fait, c'est un exposé qui reprenait mes idées sans vraiment les citer. Ou plutôt en les citant avec ce que Grothendieck appelle la technique pouce. La technique pouce, c'est la suivante si ça peut vous servir, c'est... vous savez, vous empruntez l'idée de quelqu'un. Mais vous ne voulez pas vraiment le citer. Vous mettez son article en bibliographie, mais vous le citez pour autre chose. Ça marche très, très bien. D'accord, donc ça, c'est le prototype de ce qui m'est arrivé à ce moment-là. C'est le prototype de l'expérience qui arrive lorsqu'on s'approche de ce sujet, lorsque on s'intéresse à ce sujet-là, etc.

Mais d'un autre côté, on ne peut pas avoir peur. Il ne faut pas avoir peur. Ça, c'est une chose absolument essentielle. Il faut être capable de supporter ce genre d'avanies sans en tirer de conséquences. Et justement, en essayant de les transformer en énergie positive. D'accord, alors, ce qui s'est produit depuis ? Je vais, je ne vais pas tarder... je ne sais pas. Qu'est-ce qui s'est produit depuis. Si vous voulez, ce qui s'est produit depuis ce moment-là, c'est la chose suivante. C'est que j'ai collaboré avec Katia Consani. Et à l'époque, à l'époque de Grothendieck, je n'avais qu'une idée, c'était de fuir les sujets que Grothendieck traitait. Pourquoi ? Parce qu'il y avait une sorte de snobisme autour. Il y avait une espèce de cour qui l'entourait, etc. C'est pour ça que j'avais fait des algèbres d'opérateurs. Donc là, j'ai commencé à apprendre la géométrie algébrique avec Katia Consani.

Et en 2014, ça ne fait pas longtemps. Ça veut dire qu'il ne faut jamais se décourager. En 2014, on a fait une découverte tout à fait incroyable. C'est qu'on a découvert que cet espace non-commutatif que j'avais utilisé pour faire la réalisation spectrale, etc., mais que les gens pouvaient considérer comme un espace tout à fait bizarre parce que non-commutatif, etc., en fait, c'était l'espace des points d'un topos de Grothendieck d'une simplicité incroyable, qu'on appelle le topos des fréquences, simplement la demi-droite produit semi-direct par l'action, par les entiers, par multiplication. Donc, c'est quelque chose qui est merveilleusement simple. Mais quand on calcule les points de ce topos, parce que la notion de topos, elle est suffisamment subtile pour que lorsque vous calculez les points, ça soit quelque chose. C'est en général très, très difficile lorsque vous calculez les points de ce topos. Vous trouvez un espace non-commutatif et cet espace non-commutatif, c'est exactement l'espace que j'avais construit pour avoir la réalisation spectrale.

Et qu'est ce que ça nous a donné avec Katia Consani ? Ça nous a donné sur cet espace le faisceau structurel, c'est-à-dire avant, on n'aurait jamais imaginé cela et on a vu, on a compris que ce faisceau structurel, c'était en fait un faisceau qu'on appelle tropical, c'est-à-dire qui est relié à ce qu'on appelle la géométrie tropicale. Et donc, ça nous permet d'avancer. Ça nous permet d'avancer. J'ai fait mes deux derniers cours du Collège en grande partie là-dessus.

Donc ça nous a permis, si vous voulez, on n'est pas loin du but. Bien sûr, on ne peut pas le dire tant qu'on n'est pas arrivé au but, on ne peut rien dire. On ne peut absolument rien dire. Et si on disait quelque chose ? Les gens nous taperaient dessus à coups de marteau. Il faut surtout ne rien dire, mais si vous voulez, ce qu'on a découvert, peu importe qu'on arrive ou pas. Parce que dans cette conjecture, ce qui est merveilleux, c'est que si on connait vraiment les dessous des mathématiques, on s'aperçoit que cette conjecture, elle est à la racine de la plupart des concepts qui ont été élaborés au XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Je ne vous ferai pas une description, mais en fait, dans presque chacun des concepts mathématiques qui ont été développés, ils ont été développés avec ça en tête, derrière, donc ici, en fait, on est arrivé à un espace. Bon, maintenant, ça progresse aussi : on est arrivé à un espace qui est beaucoup plus, comment dire, géométrique, qui est beaucoup plus compréhensible, mais qui n'est, comment dire ? qui n'est compréhensible que parce que Grothendieck a eu cette merveilleuse idée des topos. Et cette idée des topos de Grothendieck, en fait, cette idée-là, elle a la même relation avec la géométrie non-commutative que la relation qui existe dans le programme de Langlands entre la théorie de Galois et les fonctions automorphes. Donc, c'est exactement la même, la même relation qui apparaît encore.

Alors pour terminer, juste une chose que je voulais dire, c'est qu'il y a une autre collaboration qui a été cruciale et qui est ce qu'on a réussi à faire avec Chamseddine et Mukhanov qui est un chercheur qui fait de la cosmologie, donc ce qu'on a réussi à faire : on a réussi à comprendre quelle était la racine profonde du modèle standard couplé avec la gravitation. Parce qu'avant, on mettait la structure fine dont je parlais, on la mettait à partir des expériences, on partait des résultats expérimentaux et tout ça, on disait qu'il fallait telle algèbre pour que ça colle avec l'expérience. Et on n'avait aucune raison conceptuelle de dire pourquoi il fallait mettre cette algèbre et pas une autre. Et ça, cette raison, on l'a trouvée et on l'a trouvée par un concours de circonstances. On cherchait à résoudre un problème géométrique, purement géométrique, et en résolvant ce problème géométrique, on est tombé sur la bonne algèbre de Clifford qu'on avait mise à la main avant.

Donc c'est ça. Et il y a un théorème très profond qui permet de montrer qu'on a réalisé comme ça toutes les variétés. C'est un théorème qui, géométriquement, est basé sur sur ce genre d'images. Voilà donc je crois que je vais m'arrêter. J'ai oublié de vous dire quelque chose. D'accord, mais bon, j'ai oublié de vous dire quelque chose, c'est qu'en fait, ce qui sous-tend mon exposé est quelque chose qui avait déjà été compris par Shakespeare.

Je vais vous dire ce que Shakespeare écrit, il y a la traduction aussi, mais j'ai essayé de traduire. Shakespeare est toujours bien meilleur que sa traduction. Donc, ce que dit Shakespeare, c'est la chose suivante :

There is a tide in the affairs of men,
Which taken at the flood, leads on to fortune.
Omitted, all the voyage of their life
Is bound in shallows and in miseries.
On such a full sea are we now afloat.
And we must take the current when it serves
Or lose our ventures.

Il est une marée dans les affaires des hommes,
Qui, prise à son apogée, conduit à la fortune.
Ignorée, tout le voyage de leur vie
Est confiné aux bas-fonds et aux écueils.
Sur une telle mer, nous sommes maintenant à flots
Et devons suivre le courant quand il forcit
Ou réduire à néant nos projets.

C'est la seule chose que je veux que vous reteniez : quand vous voyez la marée, il faut la suivre. Mais il faut la sentir, bien sûr, il faut sentir qu'elle est là, d'accord. C'est l'intuition. C'est ce qu'on appelle intuition, c'est quelque chose qui est impossible à définir. C'est pas quelque chose que l'on peut rationnaliser, mais c'est quelque chose qui est fondamental dans le métier qu'on fait.

(Applaudissements).

L'un des étudiants de l'ENS qui ont organisé le cycle Maths pour tous : Merci beaucoup pour cet exposé. Si vous avez des questions, n'hésitez pas. On a un peu de temps, je pense.

Question : Shakespeare a dit je crois que le monde est un théâtre, est-ce pareil pour les mathématiques ?

Oui, il y a beaucoup de vrai et c'est formidable que vous ayez dit ça parce que ça me permet de vous expliquer ce que c'est qu'un topos. C'est formidable, c'est absolument formidable, je vais vous expliquer ce que c'est qu'un topos. Le théâtre usuel des mathématiques, c'est la théorie des ensembles. On connaît tous la théorie des ensembles, on connaît les groupes, on connaît les algèbres, on connaît... C'est le théâtre usuel des mathématiques. Qu'est-ce que c'est qu'un topos ? C'est quelque chose d'extraordinaire parce que... le théâtre est le même, les acteurs sont les mêmes, ... Mais il y a derrière les coulisses une espèce de Deus Ex Machina, qui rend les choses variables, qui introduit une variabilité.

Ça veut dire que dans la théorie des ensembles, il va y avoir une variabilité et ça veut dire quelque chose d'extraordinaire qui est qu'un espace géométrique, il n'est pas perçu par ce qu'il est, il n'est pas au devant de la scène du tout. C'est le Deus ex machina qui est dans les coulisses, qui fait varier les choses. Et c'est en comprenant comment les choses varient qu'on comprend l'espace géométrique qui est caché derrière ça. C'est purement du théâtre, c'est purement du théâtre.

La théorie des ensembles ordinaire, c'est le théâtre statique, mais le topos est beaucoup plus intéressant. D'accord, ça, c'est une idée fondamentale de Grothendieck, mais vous, vous ne la verrez jamais expliquée comme ça dans les bouquins.

Question : C'est une question peut-être un peu souvent posée, mais est-ce que pour vous, on découvre les mathématiques, c'est quelque chose qui existe sans la rationalité de l'homme ?

Bien sûr. Alors, bien sûr, on découvre... La raison... J'ai eu cette très longue discussion dans ce livre avec Changeux, avec Jean-Pierre Changeux, je vais dire... Jean-Pierre Changeux voulait démontrer qu'en fait, les mathématiques, c'était le fonctionnement du cerveau.

Mais non. Mais à mon avis, ça ne tient pas. Et la raison pour laquelle ça ne tient pas, c'est la chose suivante, c'est que grâce aux mathématiques, on explique le tableau de Mendeleïev, on explique, si vous voulez, pourquoi il y a des corps chimiques, etc., etc. Bon, alors, la comparaison que je prends toujours, je prends deux comparaisons. La comparaison que je prends, c'est, prenez Watson et Crick. Quand Watson et Crick découvrent la structure en double hélice de l'ADN, ils la découvrent, ils ne l'ont pas inventée. Ce n'est pas eux qui l'ont inventée. Les maths, c'est exactement ça, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que... Et surtout maintenant qu'on a l'ordinateur. Si vous voulez, c'est terrible maintenant, ça, je n'en ai pas parlé. Mais le fait d'avoir des ordinateurs et des ordinateurs qui sont tellement puissants, ça permet de se colleter à la réalité mathématique. Mais tout le temps, tout le temps. C'est-à-dire que quel que soit le problème que vous avez, vous pouvez toujours le tester avec l'ordinateur, toujours.

Et si c'est un problème de calcul symbolique, vous pouvez le résoudre avec l'ordinateur. Donc, je vais dire, l'ordinateur, il n'invente pas. Je vais dire merde, on lui met un problème, d'accord, je veux dire, il vous dit si ce que vous avez trouvé est correct ou pas, etc. Donc non, c'est une vraie réalité, c'est une vraie réalité. Ce n'est pas une réalité qui est réalisée concrètement dans le monde tel qu'il est, mais c'est une réalité qui est tout aussi résistante, tout aussi impossible à modifier que la réalité extérieure.

Ça, c'est sûr, c'est certain. On invente des outils, car Watson et Crick observent la double hélice. Ils utilisent le microscope électronique. On invente des outils, mais il y a une réalité qui est là, une réalité qui est là, qui est impossible à modifier.

Question : Toujours dans la même optique, est-ce que vous pensez que l'on pourrait aussi découvrir des intuitions qui nous étaient auparavant totalement cachées, et qu'on se retrouve à faire des maths avec des choses qui sortent de pouvoirs humains, récemment découverts et qu'une nouvelle branche que l'on explore...

Quel genre de pouvoir récemment découvert ?

Suite de la question de l'étudiant : C'est-à-dire, par exemple, quand vous traitez de sujets comme les topos par exemple, ce ne sont pas des choses que directement, on pourrait saisir par l'intuition qui n'est pas éduquée mathématiquement. Est-ce que, *d'après vous, après une maîtrise du domaine, maîtrise plus ou moins relative, on pourrait approcher une intuition...*

Mais alors, c'est une très bonne question. C'est une très bonne question parce que l'esprit humain n'est pas n'est pas entraîné au quantique. L'esprit humain est entraîné au classique et donc l'esprit humain en particulier a l'habitude de donner toujours une image classique de choses quantiques. Ce qui est certain, c'est qu'il y a de plus en plus d'instruments maintenant qui sont basés sur le quantique. Par exemple, il y a un instrument qui fabrique des nombres aléatoires, qui est fait par des Suisses et avec un téléphone portable, on fabrique des nombres aléatoires, on les fabrique avec du quantique et le quantique est de plus en plus répandu maintenant. Et alors ? Si on arrivait effectivement à s'entraîner au quantique, à entraîner, bon... c'est évident que le quantique ne servait pas beaucoup pour la sélection naturelle jusqu'à présent, donc on n'est pas entraînés à ça. Mais si on arrivait effectivement à se familiariser beaucoup plus avec l'optique quantique, avec le quantique, etc., c'est absolument évident qu'on ferait des progrès. C'est évident. Ça, c'est évident.

Je ne parle pas du machine learning et de l'intelligence artificielle parce que pour moi, c'est exactement l'opposé de ce qu'on fait en math, c'est-à-dire de chercher à comprendre et de chercher à inventer, à inventer des outils, donc à trouver les concepts qui sont derrière ce qu'on découvre. Et ça, bon le machine learning, il résout des problèmes. Mais si on résout un problème sans savoir comment, ce n'est pas vraiment intéressant.

Question : J'ai une question sur ce papier que vous avez écrit avec Mukhanov. J'ai eu l'impression que vous travaillez avec une métrique riemannienne mais notre notre monde n'est pas riemannien. Bon, ça marche aussi ? ou...

Bien sûr, ça marche. Mais la vraie réponse, c'est la suivante, la vraie réponse est que quand on fait ça, les physiciens le savent très bien, c'est que quand on fait la théorie des champs et quand on fait les intégrales fonctionnelles, etc., il y a un truc qu'on appelle l'astuce du I_ε de Feynmann, c'est-à-dire qu'on rajoute au propagateur un terme I_ε, et si on réfléchit bien à ce que ça signifie, ça signifie qu'on travaille en euclidien. Donc, en fait, on veut faire les intégrales fonctionnelles en euclidien et la vraie intégrale fonctionnelle qu'on veut faire, dans ce cas-là, c'est qu'on prend deux espaces riemanniens à trois dimensions et on regarde les cobordismes entre les deux et on fait l'intégrale euclidienne là-dessus, d'accord ? Mais c'est parfaitement vrai ce que vous dites.

Est-ce que vos théories mathématiques permettent de bien comprendre ce qu'est l'intrication quantique ?

Ah, c'est... Alors là, je suis parti encore pour une heure... Alors là, merveilleuse question, bien sûr, mais j'ai déjà fait des exposés qui sont sur Internet là-dessus. Si vous voulez, c'est une question merveilleuse. Pourquoi ? Parce que ce que je vous ai expliqué, c'est qu'un objet non-commutatif engendre son propre temps. Donc, il est évident qu'on veut comprendre en quel sens c'est relié au temps qui nous est familier, etc. On a beaucoup réfléchi à ça et j'ai eu un épisode que je raconte, qu'on raconte dans notre livre *Le théâtre quantique* avec un physicien qui s'appelle Carlo Rovelli.

Et si vous voulez ce qui se produit, c'est la chose suivante. J'ai réfléchi beaucoup plus, beaucoup plus encore, après, sur ce temps qui apparaît, etc. Et ce qu'on a dit dans le livre sur le théâtre quantique, on a une phrase qui résume l'idée. La phrase, c'est "*L'aléa du quantique est le tic tac de l'horloge divine.*", c'est-à-dire que c'est l'aléatoire du quantique, le fait que quand on fait une expérience deux fois, on fait passer un électron à travers une toute petite fente et on regarde l'endroit où il arrive.

Il n'arrivera jamais au même endroit. On connaît seulement la probabilité, donc ça, c'est l'aléa du quantique, et la théorie qui est basée là-dessus, si vous voulez, c'est que justement, cet aléa quantique engendre le temps. Mais en fait, quand on y réfléchit plus avant et à cause de l'intrication, on s'aperçoit qu'on commet tout le temps une erreur. Toute la physique qu'on connaît, elle est écrite par des équations en fonction du temps.

Pour revenir à mon année de maths spé, j'avais un prof de maths spé et une fois, il m'avait fait passer au tableau et il m'avait dit "Monsieur Connes ? Quel est le paramètre ?" *(AC dessine une courbe dans l'espace devant lui.)* J'ai réfléchi, réfléchi... Puis, au bout d'un moment, j'avais dit "C'est le temps !". Il était très content. Donc vous voyez, toutes les équations de la physique, sont écrites comme des dt, dt^2. Ce que je pense en fait, pour répondre à ça, et je répondrai à votre question.

Je pense que le temps n'est qu'une variable émergente et que la vraie variabilité... puisque nous, nous attribuons toute variabilité au passage du temps. Mais je pense que la vraie variabilité est plus primitive que le temps et que cette vraie variabilité, c'est l'aléa du quantique. Alors, quelle est la signification de l'intrication, la signification de l'intrication, c'est que l'aléa du quantique, il est synchronisé dans deux événements qui sont en corrélation. Il est synchronisé, c'est-à-dire au lieu d'être purement aléatoire et purement indépendant. Il est synchronisé. Donc, il faudrait une réflexion très profonde, que je ne suis pas capable d'avoir, et qui consisterait à dire que la variabilité dans la physique, elle vient de l'aléa du quantique et que le temps n'est qu'un phénomène émergeant et comprendre l'intrication de cette manière-là. Parce que l'intrication est incompréhensible, sinon. Pourquoi elle est incompréhensible ? Parce que ce que dit l'intrication d'un phénomène de mécanique quantique qui est intriqué, c'est que vous allez avoir, dès que vous faites une observation sur A, ça va se répercuter immédiatement sur B. Mais ça ne transmettra pas d'informations, mais quand même, ce sont deux évènements qui sont causalement indépendants. Donc vous ne pouvez pas dire qu'il y en a un qui est avant l'autre. Donc, c'est complètement incompréhensible. Et ce que je dis, c'est que justement, l'erreur, l'hérésie terrible, c'est de tout essayer d'écrire en fonction du temps et qu'on a besoin d'une réflexion plus profonde et qui devrait être basée sur ces choses-là.

C'est une deuxième question qu'on doit vous poser souvent aussi, mais est ce que pour vous, l'hypothèse de Riemann est vraie ?

Eh bien là, je ne résiste pas à la tentation. Je ne résiste pas à la tentation, mais je n'ai pas le droit d'en parler. C'est qu'on est en train de terminer un livre dont on a rendu les épreuves aujourd'hui chez Odile Jacob et dans lequel on raconte une histoire qui est l'histoire d'un mathématicien, un peu comme moi, qui a suffisamment travaillé sur cette hypothèse et qui est prêt à vendre son âme au Diable. Alors, il est prêt à vendre son âme au Diable, pas pour récupérer de la jeunesse ou quoi que ce soit, parce que bon, il en a marre. Il est découragé, il veut savoir, il veut vendre son âme au Diable. Et alors, si vous voulez, le problème, c'est comment rencontrer le Diable. Et en fait, un jour, il va à une conférence sur le machine learning. Alors là, lui, il faisait un tas de calculs, si vous voulez, un tas de trucs, et il reconnaît dans les calculs que fait le gars parce que vous savez, on dit en mathématiques "le diable est dans les détails". Il reconnaît dans l'exposé du gars, du spécialiste de machine learning, il reconnaît le Diable. Alors, je ne vais pas vous raconter la suite de l'histoire parce que vous la saurez dans un livre, je ne vous la raconte pas à l'avance.

Tu ne veux pas que je raconte, Danye ? Je ne vous la raconte pas, mais vous verrez que c'est une histoire très, très élaborée, et à la fin du bouquin, eh bien, il y a un truc comme ça, voilà. Bon, maintenant, voilà. Donc je vais dire, comme je le disais dès le départ, on ne peut rien savoir tant qu'on n'est pas au bout et sans doute qu'il ne faudrait pas arriver au bout parce qu'il y a un autre aspect des mathématiques dont je n'ai pas parlé, parce que c'est un aspect plus, comment dire, plus difficile.

C'est toujours la peur de se tromper et j'imagine que si on arrivait au bout, on ne vivrait plus parce qu'on aurait constamment la peur d'avoir fait une erreur quelque part. Et ce serait une situation absolument invivable. D'accord, ce n'est pas souhaitable, vraiment. D'accord, voilà. En tout cas, vous aurez tous les détails bientôt de l'histoire, cette histoire du Diable.

Une dernière question : Oui, c'est peut être un peu prosaïque, mais tout à l'heure, vous avez parlé des ordinateurs ? Vous avez dit que vous pouviez résoudre des calculs symboliques ou qu'on pouvait se confronter à la réalité. Mais vous-même, vous l'utilisez ou... ?

Terriblement, terriblement.

En ce moment, je suis branché sur les grosses machines de Polytechnique pour faire un calcul. Je l'utilise terriblement.

Terriblement, bien sûr, bien sûr. C'est formidable. C'est formidable parce que dès qu'on a un peu de pratique, on arrive à mettre n'importe quel problème. Par exemple, le problème le plus bizarre auquel vous puissiez penser, vous penserez "non, on ne peut pas le faire résoudre par ordinateur, si, si.". Et on peut comprendre un tas de choses, un tas de choses. Même pour des problèmes de géométrie, etc. Donc, parce que surtout, la visualisation, la capacité à visualiser, le *manipulate* et tout ça.

C'est formidable. C'est formidable. C'est un outil merveilleux, merveilleux, merveilleux, merveilleux. Je ne dirai jamais assez que c'est un outil merveilleux.

Dernière question, oui.

Dernière question : Vous diabolisez, apparemment, le machine learning, il y a quelque chose qui ne va pas avec le machine learning. Alors moi, je voudrais comprendre, justement. Le machine learning, c'est encore un autre domaine, qu'est ce que vous avez essayé de faire avec le machine learning, en fait, et qui vous énerve, et que vous n'arrivez pas à faire ?...

Imaginez que le machine learning vous dise "l'hypothèse de Riemann est vraie." mais ne vous donne pas de raison, ne vous donne pas de concepts qui ont été inventés pour l'occasion, etc. Ce serait triste, triste à mourir. Donc, ce que je reproche, je ne reproche pas, mais je veux dire, j'ai compris à un moment donné, en discutant avec Alain Prochiantz l'analogie qu'il y avait entre la sélection naturelle et le machine learning. C'est vrai qu'on arrive à un résultat, mais si on arrive par exemple à un résultat, et qu'on ne comprend pas pourquoi et qu'on n'en dégage pas un concept. Je suis frustré. Personnellement, je suis très, très frustré. Si ce n'est pas renouvelable...

Il faut que vous en tiriez une énergie positive ;-)

Comment ? Ah oui, en tirer une énergie positive, là, je veux dire, il y a de quoi faire. Bien sûr, bien sûr. Non, mais je ne dis pas, mais pour le moment, ça ne marche pas terrible, parce que quand on a le machine learning au téléphone, c'est vraiment pas terrible. "Répétez, je ne comprends pas ce que vous dites.". Bon, ça va s'améliorer, ça, c'est sûr.

L'organisateur : Merci beaucoup, encore une fois pour votre exposé.

(Applaudissements).