Conjecture de Goldbach (7 juin 1742)

- 271 ans

- **Énoncé** : Tout nombre pair (n) supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers ($n = p + q$).

- p et q impairs ; $3 \leqslant p \leqslant n/2$ et $n/2 \leqslant q \leqslant n - 3$

- $$\begin{aligned} 98 &= 19 + 79 \\ &= 31 + 67 \\ &= 37 + 61 \end{aligned}$$

Booléens

- On représente la primalité par des booléens.
- 0 signifie *est premier*, 1 signifie *est composé*.
- $23 \to 0$
- $25 \to 1$
- $\begin{array}{ccccccccccccccc} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \end{array}$

Copie de l'espace : 4 lettres pour 4 possibilités

- On représente les décompositions de n en sommes de deux nombres impairs par des lettres.

- $28 = \underset{p}{5} + \underset{p}{23} = \textit{premier} + \textit{premier} = a$

- $28 = \underset{c}{9} + \underset{p}{19} = \textit{composé} + \textit{premier} = b$

- $28 = \underset{p}{3} + \underset{c}{25} = \textit{premier} + \textit{composé} = c$

- $40 = \underset{c}{15} + \underset{c}{25} = \textit{composé} + \textit{composé} = d$

Mots de 40 et 42

	37	35	33	31	29	27	25	23	21
40	0	1	1	0	0	1	1	0	1
	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	a	*c*	*c*	*b*	*a*	*c*	*d*	*a*	*c*

	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
42	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
	c	*a*	*c*	*d*	*a*	*a*	*d*	*c*	*a*	*d*

Observer les mots diagonaux

6 :	a							
8 :	a							
10 :	a	a						
12 :	c	a						
14 :	a	c	a					
16 :	a	a	c					
18 :	c	a	a	d				
20 :	a	c	a	b				
22 :	a	a	c	b	a			
24 :	c	a	a	d	a			
26 :	a	c	a	b	c	a		
28 :	c	a	c	b	a	c		
30 :	c	c	a	d	a	a	d	
32 :	a	c	c	b	c	a	b	
34 :	a	a	c	d	a	c	b	a

Propriétés des mots diagonaux

- Les mots diagonaux (diagonales) ont leurs lettres soit dans l'alphabet A_{ab} soit dans l'alphabet A_{cd}.
- Une diagonale code en effet des décompositions de même second sommant et de premier sommant un nombre impair de la liste des impairs successifs à partir de 3.
- Par exemple, la diagonale *aaaba*, qui commence au *a* première lettre du mot de 26 code les décompositions $3 + 23, 5 + 23, 7 + 23, 9 + 23, 11 + 23$ et $13 + 23$.

Projection P

$H_{34,3}$: $Z_a = 5$, $Z_c = 2$

6 :	a							
8 :	a							
10 :	a	a						
12 :	c	a						
14 :	a	c	a					
16 :	a	a	c					
18 :	c	a	a	d				
20 :	a	c	a	b				
22 :	a	a	c	b	a			
24 :	c	a	a	d	a			
26 :	a	c	a	b	c	a		
28 :	c	a	c	b	a	c		
30 :	c	c	a	d	a	a	d	
32 :	a	c	c	b	c	a	b	
34 :	a	a	c	d	a	c	b	a

$B_{34,3}$: $Y_a = 5$, $Y_c = 3$

$\leftarrow X_a = 4, X_b = 1$

$X_c = 2, X_d = 1$

Exemple

- Intrication $Y_a(n), X_a(n), X_b(n)$

$$\begin{aligned} Y_a(34) &= \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} \\ \\ X_a(34) &= \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} \\ X_b(34) &= \#\{15+19\} \end{aligned}$$

- Intrication $Y_c(n), X_c(n), X_d(n)$

$$\begin{aligned} Y_c(34) &= \#\{3+21, 3+25, 3+27\} \\ \\ X_c(34) &= \#\{7+27, 13+21\} \\ X_d(34) &= \#\{9+25\} \end{aligned}$$

Propriétés d'intrication des variables

- $$Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n) \tag{1}$$
- $$Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n) \tag{2}$$
- $$Y_a(n) + Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{3}$$
- $$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{4}$$
- $$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor \tag{5}$$

Propriétés d'intrication des variables

- $$X_a(n) + X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p}(n) \qquad (6)$$

  avec $\delta_{2p}(n)$ qui vaut 1 si n est le double d'un nombre premier et 0 sinon.

- $$X_b(n) + X_d(n) = Z_c(n) + \delta_{2c-imp}(n) \qquad (7)$$

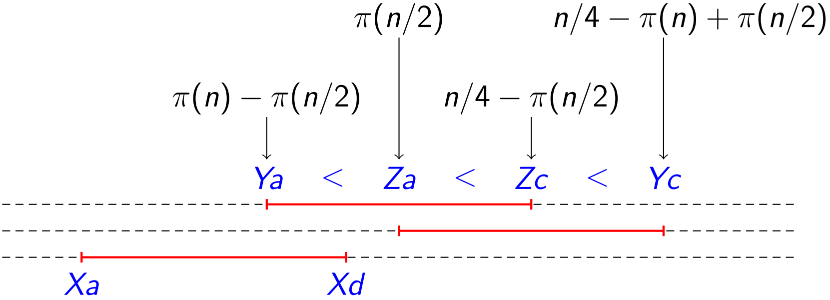
  avec $\delta_{2c-imp}(n)$ qui vaut 1 si n est un double d'impair composé et 0 sinon.

- $$Z_c(n) - Y_a(n) = Y_c(n) - Z_a(n) - \delta_{4k+2}(n) \qquad (8)$$

  avec $\delta_{4k+2}(n)$ qui vaut 1 si n est un double d'impair et 0 sinon.

- $$Z_c(n) - Y_a(n) = X_d(n) - X_a(n) - \delta_{2c-imp}(n) \qquad (9)$$

Propriétés d'intrication des écarts



n	X_a	X_b	X_c	X_d	Y_a	Y_c	A	Z_a	Z_c	B	$\delta_{2p}(n)$	$\delta_{2cimp}(n)$	$\delta_{4k+2}(n)$
14	2	0	1	0	2	1	3	2	0	2	1	0	1
16	2	0	1	0	2	1	3	3	0	3	0	0	0
18	2	0	1	1	2	2	4	3	0	3	0	1	1
20	2	1	1	0	3	1	4	3	1	4	0	0	0
22	3	1	1	0	4	1	5	3	1	4	1	0	1
24	3	0	1	1	3	2	5	4	1	5	0	0	0
26	3	1	2	0	4	2	6	4	1	5	1	0	1
28	2	1	3	0	3	3	6	5	1	6	0	0	0
30	3	0	2	2	3	4	7	5	1	6	0	1	1
32	2	2	3	0	4	3	7	5	2	7	0	0	0
34	4	1	2	1	5	3	8	5	2	7	1	0	1
36	4	0	2	2	4	4	8	6	2	8	0	0	0
38	2	2	5	0	4	5	9	6	2	8	1	0	1
40	3	1	4	1	4	5	9	7	2	9	0	0	0
42	4	0	3	3	4	6	10	7	2	9	0	1	1
44	3	2	4	1	5	5	10	7	3	10	0	0	0
46	4	2	4	1	6	5	11	7	3	10	1	0	1
48	5	0	3	3	5	6	11	8	3	11	0	0	0
50	4	2	4	2	6	6	12	8	3	11	0	1	1
52	3	3	5	1	6	6	12	8	4	12	0	0	0
54	5	1	3	4	6	7	13	8	4	12	0	1	1
56	3	4	5	1	7	6	13	8	5	13	0	0	0
58	4	3	5	2	7	7	14	8	5	13	1	0	1
60	6	0	3	5	6	8	14	9	5	14	0	0	0
62	3	4	7	1	7	8	15	9	5	14	1	0	1
64	5	2	5	3	7	8	15	10	5	15	0	0	0
66	6	1	4	5	7	9	16	10	5	15	0	1	1
68	2	5	8	1	7	9	16	10	6	16	0	0	0
70	5	3	5	4	8	9	17	10	6	16	0	1	1
72	6	2	4	5	8	9	17	10	7	17	0	0	0
74	5	4	6	3	9	9	18	10	7	17	1	0	1
76	5	4	6	3	9	9	18	11	7	18	0	0	0
78	7	2	4	6	9	10	19	11	7	18	0	1	1
80	4	5	7	3	9	10	19	11	8	19	0	0	0

Intrications des variables et des écarts (invariants)

n	$X_a(n)$	$X_b(n)$	$X_c(n)$	$X_d(n)$
999 998	4 206	32 754	37 331	175 708
1 000 000	5 402	31 558	36 135	176 904
9 999 998	28 983	287 084	319 529	1 864 403
10 000 000	38 807	277 259	309 705	1 874 228

n	$Y_a(n)$	$Y_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$	$Z_a(n)$	$Z_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$	$\delta_{2p}(n)$	$\delta_{2ci}(n)$	$\delta_{4k+2}(n)$
999 998	36 960	213 039	249 999	41 537	208 461	249 998	0	1	1
1 000 000	36 960	213 039	249 999	41 537	208 462	249 999	0	1	0
9 999 998	316 067	2 183 932	2 499 999	348 511	2 151 487	2 499 998	1	0	1
10 000 000	316 066	2 183 933	2 499 999	348 512	2 151 487	2 499 999	0	1	0

Bijections

- $n = 32$

$a, c \to a$

$b, d \to c$

$a, b \to a$

$c, d \to c$

$3+3$ a	$3+29$ a	$3+29$ a
$3+5$ a	$5+27$ c	$3+27$ c
$3+7$ a	$7+25$ c	$3+25$ c
$3+9$ c	$9+23$ b	$3+23$ a
$3+11$ a	$11+21$ c	$3+21$ c
$3+13$ a	$13+19$ a	$3+19$ a
$3+15$ c	$15+17$ b	$3+17$ a

$Z_a = X_a + X_c = 5$

$Z_c = X_b + X_d = 2$

$$Z_a + Z_c = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor = 7$$

$Y_a = X_a + X_b = 4$

$Y_c = X_c + X_d = 3$

$$Y_a + Y_c = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = 7$$

$X_a = 2$

$X_b = 2$

$X_c = 3$

$X_d = 0$

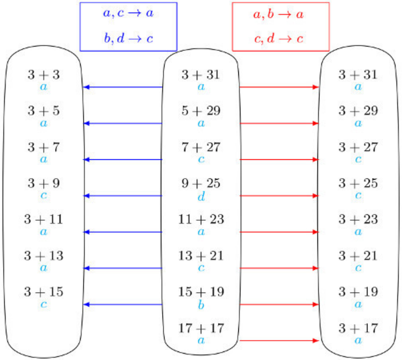
Bijections

- $n = 34$

$Z_a = X_a + X_c = 5$

$Z_c = X_b + X_d = 2$

$Z_a + Z_c = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor = 7$



$Y_a = X_a + X_b = 5$

$Y_c = X_c + X_d = 3$

$Y_a + Y_c = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = 8$

$X_a = 4$

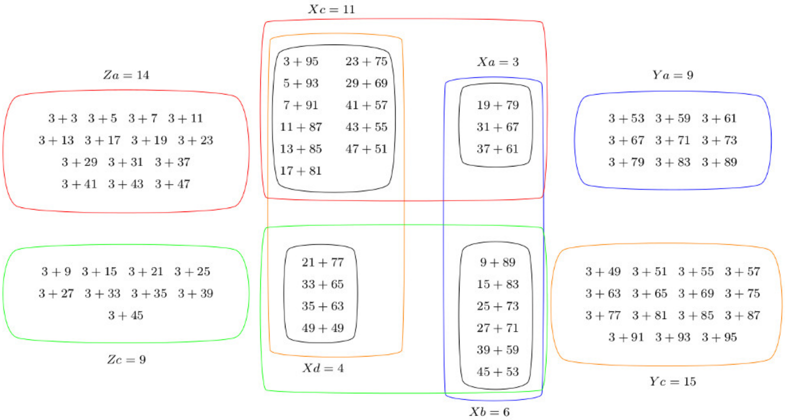
$X_b = 1$

$X_c = 2$

$X_d = 1$

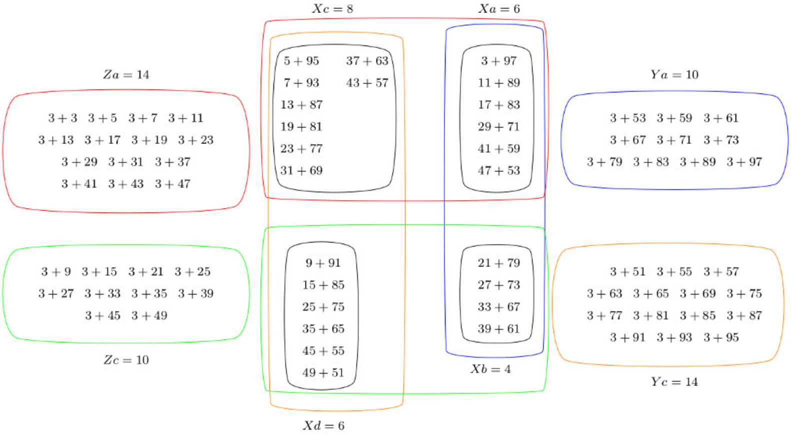
Bijections : visualisation du double comptage

- $n = 98$



Bijections : visualisation du double comptage

- $n = 100$



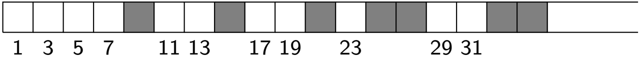
Les tirettes de Laisant

- **Charles-Ange Laisant** : Sur un procédé expérimental de vérification de la conjecture de Goldbach, Bulletin de la SMF, 25, 1897.

- *"Ce fameux théorème empirique : Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l'objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d'établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l'a vérifiée numériquement jusqu'à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités."*

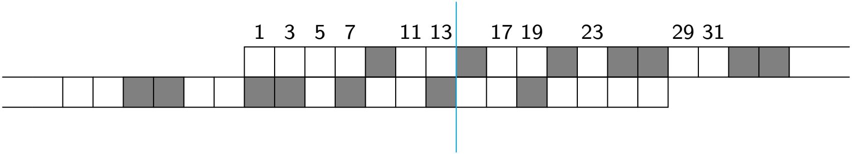
Les tirettes de Laisant

- *"Voici un procédé qui permettrait de faire sans calculs la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions. Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d'Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu'à une limite quelconque 2n."*



Les tirettes de Laisant

- *"Si l'on a construit deux réglettes pareilles, et si l'on place la seconde au-dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case* 1 *à* $2n$*, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour* $2n$*, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre* 28 *donnera la figure 2 et montrera qu'on a les décompositions* $28 = 5 + 23 = 11 + 17$*."*



Résumé

- $X_a : p + p$
- $X_b : c + p$
- $X_c : p + c$
- $X_d : c + c$
- $Z_a : 3 + p, \qquad (p < n/2)$
- $Z_c : 3 + c, \qquad (c < n/2)$
- $Y_a : 3 + p, \qquad (p \geqslant n/2)$
- $Y_c : 3 + c, \qquad (c \geqslant n/2)$
- $\{3+p_k\} \quad Y_a = X_a + X_b \quad \{p+p_i\} \cup \{c+p_j\} \qquad (p_i, p_j, p_k \geqslant n/2)$
- $\{3+c_k\} \quad Y_c = X_c + X_d \quad \{p+c_i\} \cup \{c+c_j\} \qquad (c_i, c_j, c_k \geqslant n/2)$
- $\{3+p_k\} \quad Z_a = X_a + X_c \quad \{p_i+p\} \cup \{p_j+c\} \qquad (p_i, p_j, p_k < n/2)$
- $\{3+c_k\} \quad Z_c = X_b + X_d \quad \{c_i+p\} \cup \{c_j+c\} \qquad (c_i, c_j, c_k < n/2)$

Résumé

- $Y_a + Y_c = X_a + X_b + X_c + X_d = \left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$
- $Z_a + Z_c = \left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor$
- $\left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor = Z_a + Z_c \simeq Y_a + Y_c = \left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$
- $Z_c - Y_a \simeq X_d - X_a$
  par définition car $Z_c - Y_a$ correspond à
  $$\{c+p\} \cup \{c+c\} \backslash \{c+p\} \cup \{p+p\}$$

Conclusion

- On a utilisé un langage à 4 lettres pour représenter les décompositions de n comme somme de deux impairs.
- On se situe dans une théorie lexicale des nombres, selon laquelle les nombres sont des mots.
- Il faut toujours bien observer l'ordre des lettres dans les mots.