Fréquences musicales (Denise Vella-Chemla, mai 2025)

On a programmé, selon une idée d'Alain Connes [1] , un passage des fréquences des notes de la gamme aux nombres entiers successifs.

La fonction f calcule les fréquences des notes de la gamme dodécaphonique [2].

La fréquence d'une note est fonction du nombre de demi-tons qui la séparent de la note “origine”, ici le La-440 Hertz.

$$f\ :\ x \mapsto \left\lfloor 440 \times 2^{x/12} \right\rfloor,$$

La fonction g convertit un ensemble de fréquences (ici, les fréquence successives des 12 notes de la gamme dodécaphonique, à partir de la note La-440, en montant de demi-ton en demi-ton) en les nombres entiers successifs à partir de zéro (F est une fréquence) :

$$g:\ F \mapsto \left\lfloor 12 \times \frac{\ln f - \ln 440}{\ln 2} \right\rfloor$$

On trouve dans les œuvres d'Euler un texte contenant des explications au sujet de la gamme tempérée (voir ://denisevellachemla.eu/Euler-musique-moderne.pdf). Il faut être attentif au fait, non repéré jusque-là, que la suite de nombres entiers qu'Euler propose pour représenter les notes à la quatrième page de ce texte ne comporte que des nombres contenant dans leur factorisation uniquement des puissances de 2, de 3 ou de 5.

On voit en effet, sur la reproduction de la suite de nombres en question ci-dessous, que la suite fournie par Euler ne contient pas les nombres premiers, hormis 2, 3 et 5, et ne contient par exemple pas 22 (= 2.11) ou 77 (= 7.11).

[1]voir par exemple, cette vidéo https://www.youtube-nocookie.com/embed/cr60YwJrPa0

[2]Voir programme https://denisevellachemla.eu/gammereprise.pdf et son résultat d'exécution sur cette image

```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop>python gammereprise.py
Frequences du tableau :
440   466   494   523   558   595   622   660   700   740   784   830   880   932   988   1046   1109   1175   1245   13
19   1397   1480   1568   1661   1760
Frequences calculees
440   466   493   523   554   587   622   659   698   739   783   830   880   932   987   1046   1108   1174   1244   13
18   1396   1479   1567   1661   1760
Frequences du tableau converties :
0   1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12   13   14   15   16   17   18   19   20   21   22   23   24
Frequences calculees converties :
0   1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12   13   14   15   16   17   18   19   20   21   22   23   24


En multipliant 440 (la frequence en Hertz de la note La par les fractions rationnelles 3^9/2^14,3^4/2^6,3^11/2^17,3^6/2^
9,3/2,3^8/2^12,3^3/2^4,3^10/2^15,3^5/2^7,2,3^7/2^10,3^2/2^2,3^9/2^13, on obtient les frequences suivantes (qui sont les
frequences des notes a partir du do (528 Hz) et en montant de demi-ton en demi-ton
528   556   594   626   660   704   742   792   835   880   939   990   1057
C:\Users\Denise_Vella\Desktop>
```

.

177

plus en plus remplis de ſons, comme on verra par les arrangemens ſuivans:

I.	II.	III.	IV.
1, 2	2, 3; 4	4, 5, 6, 8	8, 9, 10, 12, 15, 16
F, *f*	F, *c*, *f*	F, A, *c*, *f*,	F, G, A, *c*, *e*, *f*,

V.	VI.
16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32	32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 60, 64
F, G, A, *c*, *cs*, *d*, *e*, *f*,	F, G, A, H, *c*, *cs*, *d*, *e*, *f*,

VII.

64, 72, 75, 80, 81, 90, 96, 100, 108, 120, 125, 128
F, G, G*s*, A, A*, H, *c*, *cs*, *d*, *e*, *f**, *f*

VIII.

128, 135, 144, 150, 160, 162, 180, 192, 200, 216, 225, 240, 250, 256
F, F*s*, G, G*s*, A A* H, *c*, *cs*, *d*, *ds*, *e*, *f** *f*

Gardons à l'esprit que la fonction g qui a été proposée précédemment convertit les fréquences de la gamme dans la suite **complète** des entiers successifs.

Enfin, remarquons que les gammes d'Euler, dont il dit qu'elles contiennent de plus en plus de notes, vont bien d'octave en octave, et donc que ce sont bien des puissances de 2 (2,4,8,16,32,64,128,256) qui terminent chacune des suites de nombres I, II, III, IV, etc, sur le graphique ci-dessus.