

Poursuite par l'ia claudia de la piste du pavage par triminos pour représenter les décompositions de Goldbach des nombres pairs
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claudia, septembre 2026

Résumé

On reprend le document *Non-commutativité dans un pavage de triminos utilisé pour modéliser les décompositions de Goldbach des nombres pairs (par l'ia chatgpt) en septembre 2026*
<https://denisevellachemla.eu/treillis-Goldbach-non-commutativite-chatgpt-dvc-20260905.pdf> ,
à l'endroit précis où il s'arrête :

1. on établit l'asymptotique exacte, inconditionnelle, de $k_X = |T_X|$ et de $N_{nc}(X)$;
2. on montre que la coïncidence numérique $(b, c) = (c, b) = 120$ observée pour $X = 100$ n'est pas un théorème mais un accident de fenêtre, via une formule exacte pour l'écart ;
3. on répond précisément à la question du § 8 sur le groupoïde : la relation de compatibilité cherchée existe, elle donne le groupoïde de paires sur $\{0, 1\}$, et sa C^* -algèbre est $M_2(\mathbb{C})$, sans contenu arithmétique nouveau.

1. Rappel des notations

$P(r) = 1$ si r premier, 0 sinon. $T_X = \{r \text{ impair} \leq X - 2 : P(r) \neq P(r + 2)\}$, $k_X = |T_X|$. Chaque $r \in T_X$ est dit de type D (descendant, $P(r) = 1, P(r + 2) = 0$) ou U (ascendant, $P(r) = 0, P(r + 2) = 1$). Le document établit $N_{nc}(X) = \binom{k_X}{2}$ et, parmi ces paires, une répartition en quatre issues $(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)$ selon les types $(D, D), (U, U), (D, U), (U, D)$ des deux transitions impliquées.

2. Asymptotique inconditionnelle de k_X

Théorème 1. Soit $\pi_2(X)$ le nombre de couples de premiers jumeaux $(p, p + 2)$ avec $p \leq X$. Alors

$$k_X = 2\pi(X) - 2\pi_2(X) + O(1).$$

En particulier, par le théorème des nombres premiers et la majoration inconditionnelle de Brun
 $\pi_2(X) = O\left(\frac{X}{(\ln X)^2}\right),$

$$k_X \sim 2\pi(X) \sim \frac{2X}{\ln X} \quad (X \rightarrow \infty).$$

Démonstration. Pour r impair, $r \leq X - 2$:

$$1[P(r) \neq P(r + 2)] = P(r) + P(r + 2) - 2P(r)P(r + 2).$$

En sommant sur r : $\sum_r P(r) = \pi(X - 2) + O(1)$, $\sum_r P(r + 2) = \pi(X) + O(1)$ (décalage d'indice), et $\sum_r P(r)P(r + 2) = \pi_2(X - 2) = \pi_2(X) + O(1)$ (nombre de couples jumeaux dans la même plage). D'où

$$k_X = \pi(X - 2) + \pi(X) - 2\pi_2(X) + O(1) = 2\pi(X) - 2\pi_2(X) + O(1).$$

Le théorème des nombres premiers donne $\pi(X) \sim \frac{X}{\ln X}$; la borne de Brun (crible, inconditionnelle) donne $\pi_2(X) = O\left(\frac{X}{(\ln X)^2}\right) = o(\pi(X))$. Donc $k_X = 2\pi(X)(1 - o(1)) \sim \frac{2X}{\ln X}$. $\square$

Corollaire 2.

$$N_{nc}(X) = \binom{k_X}{2} \sim \frac{k_X^2}{2} \sim \frac{2X^2}{(\ln X)^2}.$$

Remarque [Vérification numérique] Le rapport $\frac{k_X}{\ln X}$ calculé vaut 0,71 à $X = 100$, 0,91 à $X = 1000$, 0,96 à $X = 20000$: convergence lente vers 1, cohérente avec le terme correctif $-2\pi_2(X) = o(\pi(X))$ mais non négligeable aux échelles modestes, exactement ce que prédit le théorème. Le calcul de $k_{100} = 31$, $N_{nc}(100) = \binom{31}{2} = 465$ du document original est confirmé.

Cette asymptotique est entièrement inconditionnelle : elle ne mobilise que le théorème des nombres premiers et le crible de Brun pour les jumeaux, deux résultats acquis depuis longtemps et sans lien avec Goldbach. $N_{nc}(X)$ n'est donc pas un objet arithmétique *nouveau* au sens où sa taille resterait à découvrir : elle est déjà entièrement déterminée par la statistique des écarts entre nombres premiers.

3. L'égalité $(b, c) = (c, b) = 120$ à $X = 100$: coïncidence, pas théorème

Proposition 3. Notons $t_1 < \dots < t_k$ les éléments de T_X et $\varepsilon_i = +1$ si t_i est de type D , -1 si de type U . Alors

$$\#(b, c) - \#(c, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i (k - 2i + 1).$$

Démonstration. Avec les indicatrices $[\tau_i = D] = \frac{1+\varepsilon_i}{2}$, $[\tau_i = U] = \frac{1-\varepsilon_i}{2}$, un calcul direct donne, pour $i < j$,

$$[\tau_i = D][\tau_j = U] - [\tau_i = U][\tau_j = D] = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}.$$

Sommer sur les $i < j$: le terme ε_i apparaît une fois pour chacun des $k - i$ indices $j > i$, le terme $-\varepsilon_j$ une fois pour chacun des $j - 1$ indices $i < j$; en réindexant,

$$\#(b, c) - \#(c, b) = \frac{1}{2} \sum_i \varepsilon_i (k - i) - \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon_j (j - 1) = \frac{1}{2} \sum_i \varepsilon_i (k - 2i + 1).$$

$\square$

Cette quantité est une somme pondérée par la *position* i des types, sans raison structurelle de s'annuler : elle dépend de l'ordre fin dans lequel les transitions D et U s'entrelacent, un fait de nature aussi fine que la répartition des nombres premiers eux-mêmes. La vérification numérique le confirme :

X	k_X	n_D	n_U	$\#(b, c) - \#(c, b)$
100	31	16	15	0
500	138	69	69	69
1000	263	132	131	0
5000	1082	541	541	541
20000	3837	1919	1918	0

L'écart s'annule à $X = 100$ mais vaut 69 à $X = 500$ (où pourtant $n_D = n_U$) et 541 à $X = 5000$: il n'y a donc *aucune* loi de symétrie sous-jacente, seulement une coïncidence de la fenêtre $X = 100$ choisie dans le document original. La “très régulière organisation combinatoire” qu'on croit y voir à $X = 100$ est un effet de bord, pas un phénomène.

4. La piste groupoïde du § 8 : réponse exacte

Le document pose la question : *peut-on extraire du treillis une relation de compatibilité imposant que l'extrémité droite du premier objet égale l'extrémité gauche du second, pour retrouver un vrai groupoïde ?* La réponse est complète et élémentaire.

Théorème 4 (La bande rectangulaire est le groupoïde de paires totalisé). *Soit $S = \{0, 1\}$ (l'alphabet de primalité) et $\text{Pair}(S)$ le groupoïde de paires sur S : objets S , flèches $S \times S$, avec (i, j) composable avec (j, l) pour donner (i, l) , uniquement lorsque le terme central coïncide. Alors :*

1. *les quatre lettres $a = (1, 1), b = (1, 0), c = (0, 1), d = (0, 0)$ sont exactement les quatre flèches de $\text{Pair}(S)$;*
2. *la loi $\star$ des seize règles, $(u, v) \star (x, y) = (u, y)$, est la totalisation de la composition de $\text{Pair}(S)$: elle coïncide avec elle quand $v = x$ (flèches composables), et l'étend arbitrairement (en ignorant la condition $v = x$) quand $v \neq x$;*
3. *imposer la condition de compatibilité $v = x$, exactement celle demandée au § 8, ramène donc $\star$ à la composition usuelle de $\text{Pair}(S)$.*

Démonstration. (1) est la définition même de a, b, c, d comme couples de $\{0, 1\}^2 = S \times S$. (2) et (3) : par définition $(i, j) \star (k, l) = (i, l)$ pour tous $i, j, k, l \in S$, alors que dans $\text{Pair}(S)$ seule la composition $(i, j)(j, l) = (i, l)$ (avec le terme central j commun) est définie. Les deux coïncident exactement quand $j = k$, i.e. $v = x$ dans la notation du document. $\square$

Corollaire 5. *Le “vrai groupoïde” caché sous la bande rectangulaire n'est autre que $\text{Pair}(\{0, 1\})$, le groupoïde de paires à deux objets. Sa C^* -algèbre est*

$$C^*(\text{Pair}(\{0, 1\})) \cong M_2(\mathbb{C}),$$

l'algèbre des matrices 2×2 , c'est un fait général et classique que le groupoïde de paires sur un ensemble fini à n éléments a pour C^ -algèbre $M_n(\mathbb{C})$.*

Remarque : Restaurer la condition de compatibilité oubliée par la bande rectangulaire ne fait donc apparaître, au niveau des *lettres*, aucune structure arithmétique : $M_2(\mathbb{C})$ ne contient ni φ , ni rien qui code une information sur les nombres premiers, c'est l'objet le plus pauvre possible en K -théorie ($K_0 = \mathbb{Z}$, $K_1 = 0$, comme pour toute algèbre de matrices). Le groupoïde intéressant,

s'il existe, ne peut donc pas vivre au niveau des quatre lettres a, b, c, d elles-mêmes : il faudrait le chercher, comme dans le document sur le sous-shift $\{b, c, d\}$, au niveau des *positions* i le long d'une ligne (où l'ensemble sous-jacent n'est plus $\{0, 1\}$ à 2 éléments mais l'ensemble infini des indices), et non au niveau du codage grossier par primalité.

5. Bilan

Les trois pistes ouvertes par le document *Non-commutativité dans un pavage de triminos utilisé pour modéliser les décompositions de Goldbach des nombres pairs* (par l'ia chatgpt en septembre 2026 <https://denisevellaehemla.eu/treillis-Goldbach-non-commutativite-chatgpt-dvc-20260905.pdf>)

sont maintenant closes, chacune avec une réponse précise :

- la taille du lieu non commutatif $N_{nc}(X)$ est asymptotiquement $\frac{2X^2}{(\ln X)^2}$, un fait *déjà entièrement contenu* dans le théorème des nombres premiers et le crible de Brun (théorème 1), pas une découverte sur Goldbach ;
- l'équilibre apparent $(b, c) = (c, b)$ à $X = 100$ n'est pas structurel (proposition 3) ;
- le groupoïde caché sous la bande rectangulaire est le groupoïde de paires à deux objets, dont la C^* -algèbre $M_2(\mathbb{C})$ est arithmétiquement vide.

Comme pour le sous-shift $\{b, c, d\}$, la conclusion est la même à chaque fois : la structure formelle (bande, groupoïde, C^* -algèbre) se construit sans obstacle, mais elle transporte fidèlement, sans l'alléger, la difficulté déjà connue (ici, la statistique des écarts entre premiers), sans jamais toucher à la corrélation $p \leftrightarrow n - p$ qui est le cœur de Goldbach.