Valuations p-adiques des nombres dans les factorielles (Denise Vella-Chemla, 12.8.2017)

Dans la table suivante, on fournit dans la case (i,j) la valuation i-adique de i dans la factorielle de j (ou $val_i(j!)$, pour $i \geqslant 2$). On la note $<$ si elle est inférieure à 1, 1 si elle vaut 1 et $>$ si elle est supérieure à 1.

$val_3(4!) = val_3(4.3.2.1) = val_3(2.2.3.2.1) = 1.$

$val_9(6!) = val_9(6.5.4.3.2.1) = val_9(3.2.5.2.2.3.2.1) = 1.$

$val_i(j!)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$<$	1	1	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$
3	$<$	$<$	1	1	1	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$
4	$<$	$<$	$<$	1	1	1	1	$>$	$>$	$>$
5	$<$	$<$	$<$	$<$	1	1	1	1	1	$>$
6	$<$	$<$	1	1	1	1	1	1	$>$	$>$
7	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	1	1	1	1
8	$<$	$<$	$<$	1	1	1	1	1	1	1
9	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	1	1	1	$>$	$>$
10	$<$	$<$	$<$	$<$	1	1	1	1	1	$>$

On note que $val_{p^2}((2p)!) = 1$.

On simplifie à l'extrême en n'utilisant que 3 images. On aurait pu utiliser une fonction val' qui aurait associé aux nombres des images rationnelles ; par exemple,

$$val'_9(12!) = val_9(12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2) = val'_9(2.2.3.11.2.5.3.3.2.2.2.7.2.3.5.2.2.3.2) = \frac{5}{2}.$$

Les seuls nombres tels que $val_x(x!) = 1$ sont les nombres premiers et 4.