

Zu *Riemanns* Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“^{*)}.

(Von Herrn *H. von Mangoldt* in Aachen.)

Von den verschiedenen Fragen, zu welchen die bekannte Abhandlung *Riemanns* „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“^{**)} Anlass giebt, haben einige in der Arbeit des Herrn *J. Hadamard* „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par *Riemann*“^{***)} ihre Erledigung gefunden. Dadurch ist auf diesem Gebiete zum ersten mal seit beinahe 34 Jahren ein wirklicher Fortschritt erzielt. Zugleich ist für weitere Untersuchungen eine sichere Grundlage gewonnen.

Unter Benutzung der von Herrn *Hadamard* gewonnenen Ergebnisse wird im Nachfolgenden zunächst die Frage behandelt, ob die Anzahl derjenigen Nullstellen der *Riemannschen* Function $\xi(t)$, deren reelle Theile zwischen Null und einer sehr grossen positiven Zahl h enthalten sind, wirklich durch den von *Riemann* angegebenen Ausdruck

$$\frac{h}{2\pi} l \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot h l h - \frac{1+l(2\pi)}{2\pi} \cdot h \dagger)$$

näherungsweise dargestellt wird, und wie gross der Unterschied höchstens werden kann. Diese Frage ist zwar schon in den Nummern 36 und 37 der Abhandlung des Herrn *Hadamard* gestreift, aber noch nicht bis zur

^{*)} Ein Auszug aus der nachstehenden Arbeit ist bereits in dem Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 19. Juli 1894 veröffentlicht worden.

^{**)} Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, und Gesammelte Mathematische Werke, 1. Auflage, 1876, Seite 136—144; 2. Auflage, 1892, Seite 145—153.

^{***)} Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^{ème} Série, Tome 9, 1893, p. 171—215.

^{†)} Das Zeichen la bedeutet hier, so wie überall im Nachfolgenden, den natürlichen Logarithmus von a .

äussersten gegenwärtig erreichbaren Grenze erledigt. Denn aus den Ausführungen des Herrn *Hadamard* geht — auch wenn man die nicht ganz einwandfreien Betrachtungen im Anfang der No. 37 in geeigneter Weise abändert, — nur hervor, dass die Grössenordnung der erwähnten Anzahl mit der des Productes $h.lh$ übereinstimmt. Ob aber gerade durch den in *Riemanns* Formel vorkommenden Werth $\frac{1}{2\pi}$ des Coefficienten dieses Productes die grösste mögliche Uebereinstimmung erreicht wird, und ob auch das nächstfolgende Glied von der Ordnung h in dieser Formel richtig bestimmt ist, das bleibt alles unentschieden. Herr *Hadamard* giebt dies selbst zu, indem er seine hierauf sich beziehenden Betrachtungen mit den Worten schliesst: „... de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$... est exact ou non“.

Das Endergebniss des diesem Gegenstande gewidmeten Theiles der nachfolgenden Betrachtungen ist folgendes:

Solange die reelle positive Zahl h nicht grösser als 12 ist, ist die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung

$$\xi(t) = 0,$$

deren reeller Theil zwischen 0 und h enthalten ist, gleich Null. Für alle grösseren Werthe von h ist der Unterschied zwischen dieser Anzahl und dem Riemannschen Näherungswerth

$$\frac{h}{2\pi} \cdot l \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi}$$

absolut genommen kleiner als

$$0,34.(lh)^2 + 1,35.lh + 2,58.$$

Mit Hülfe eines anderen bei Gelegenheit dieser Untersuchung gewonnenen Satzes wird sodann in einem zweiten Abschnitt für eine gewisse Klasse unendlicher Reihen, welche zur analytischen Darstellung zahlentheoretischer Functionen dienen, und auf welche das *Riemannsche* Verfahren führt, der Beweis der Convergenz erbracht. Als ein specieller Fall eines der hierbei gewonnenen allgemeineren Sätze ergibt sich,

dass die in Riemanns Abhandlung vorkommende unendliche Reihe

$$\sum^a \{ Li(x^{\frac{1}{2}+ai}) + Li(x^{\frac{1}{2}-ai}) \}$$

bei der dort näher angegebenen Anordnung ihrer Glieder wirklich convergirt und auch die von Riemann angegebene Summe hat.

Die *Riemannschen* Behauptungen finden somit in allen wesentlichen Punkten Bestätigung.

Die Frage dagegen, ob die Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ wirklich, wie *Riemann* es für sehr wahrscheinlich hält, alle reell sind, bleibt wie bisher unerledigt.

Wie dem Verfasser erst nach Vollendung seiner Arbeit bekannt geworden ist, findet sich ein Theil der Grundgedanken dieses zweiten Abschnittes bereits ausgesprochen in der Habilitationsschrift des Herrn *Adolf Piltz* „Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze“, Jena 1884. Die auf S. 42—43 dieser Schrift gegebenen Andeutungen darüber, wie sich die Convergenz der oben erwähnten Klasse unendlicher Reihen beweisen lasse, wenn man annimmt, dass die von *Riemann* ausgesprochenen Behauptungen über die Vertheilung der Nullstellen der Function $\xi(t)$ im Wesentlichen richtig seien, und die in S. 33—36 enthaltene Angabe eines Weges, welcher zu der Endformel der *Riemannschen* Abhandlung führt, decken sich theilweise mit den im Nachfolgenden vorkommenden Entwicklungen.

I.

Ueber die Vertheilung der Nullstellen der Function $\xi(t)$.

Aus jeder der beiden von *Riemann* gegebenen Darstellungen der Function $\xi(t)$ durch bestimmte Integrale folgt leicht, dass diese Function eine Nullstelle, deren reeller Theil gleich Null wäre, nicht besitzt. Dagegen sind, wie aus der in der Einleitung angeführten Arbeit des Herrn *Hadamard* hervorgeht, Nullstellen, deren reelle Theile von Null verschieden sind, wirklich vorhanden, und zwar in unendlicher Menge.

Demgemäss seien nun

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

diejenigen Nullstellen, deren reelle Theile *positiv* sind. Dabei sei jede etwa vorhandene mehrfache Nullstelle in diese Reihe so oft aufgenommen, als ihre Ordnungszahl angiebt; und die Anordnung sei eine solche, dass die reellen Theile der einzelnen Glieder mit wachsendem Index niemals abnehmen.

Bei Anwendung dieser Bezeichnungen kann man die Endergebnisse,

welche aus den im dritten Theil der Abhandlung des Herrn *Hadamard* durchgeführten Untersuchungen hervorgehen, folgendermassen aussprechen.

Das unendliche Product

$$\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_v^2}\right)$$

ist für jeden Werth der complexen Veränderlichen t unbedingt convergent und stimmt mit der Function $\xi(t)$ bis auf einen constanten Factor überein. Man hat daher die Gleichung

$$(1.) \quad \xi(t) = \xi(0) \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_v^2}\right).$$

Fasst man in der Ebene der complexen Veränderlichen t einen ganz im Endlichen liegenden Bereich B ins Auge, dessen Begrenzung keine Nullstelle der Function $\xi(t)$ enthält, so ist die Anzahl der im Innern dieses Bereiches liegenden Nullstellen bekanntlich gleich dem in positiver Richtung über die Begrenzung von B erstreckten Integral $\int dl \xi(t)$ dividirt durch $2\pi i$. Oder anders und etwas anschaulicher ausgedrückt:

Die Anzahl der im Innern von B enthaltenen Nullstellen ist gleich $\frac{1}{2\pi}$ multiplicirt mit dem Zuwachs, welchen die Abweichung der Function $\xi(t)$ erfährt, wenn die Veränderliche t die Begrenzung von B in positiver Richtung durchläuft.

Obgleich man nun diesen Satz nicht ohne weiteres zur Bestimmung der Anzahl der in einem gegebenen Bereiche enthaltenen Nullstellen der Function $\xi(t)$ benutzen kann, so erweist es sich doch als möglich, durch eine Untersuchung der Aenderungen, welche die Abweichung der Function $\xi(t)$ bei gewissen passend gewählten Bewegungen der Veränderlichen t erfährt, über die Lage der Nullstellen einige Aufschlüsse zu gewinnen, und zwar in folgender Weise:

Man bezeichne durch $a < b$ zwei beliebige *reelle* Constanten und lasse die Veränderliche t längs des geraden Verbindungsweges vom Punkte $a - i\frac{3}{2}$ zum Punkte $b - i\frac{3}{2}$ übergehen. Dann dreht sich jede einzelne der Geraden, welche die Nullstellen der Function $\xi(t)$ mit dem beweglichen Punkte t verbinden, in *positivem* Sinne. Denn, wie schon *Riemann* bewiesen hat, liegt keine der Nullstellen der Function $\xi(t)$ ausserhalb desjenigen Streifens, welcher von den beiden durch die Punkte $-\frac{i}{2}$ und $+\frac{i}{2}$ gehenden Parallelen zur Axe des Reellen begrenzt wird. Die Bahn des Punktes t

verläuft aber ausserhalb dieses Streifens und lässt denselben, wenn die positive Richtung der Ordinatenaxe wie üblich links von derjenigen der Abscissenaxe liegt, ebenfalls zur Linken.

Die Zunahmen, welche die Abweichungen der einzelnen Linearfactoren der Function $\xi(t)$ bei der angegebenen Bewegung des Punktes t erfahren, sind daher *sämmtlich positiv*, und eben deswegen bleibt die Summe jeder beliebigen endlichen Anzahl dieser Zunahmen stets kleiner als der Zuwachs, um welchen sich die Abweichung der Function $\xi(t)$ selbst bei der gleichen Bewegung vergrössert.

Nun sei

Φ der eben erwähnte Zuwachs der Abweichung der Function $\xi(t)$,

A die Anzahl derjenigen Nullstellen der Function $\xi(t)$, deren reelle Theile nicht ausserhalb des Intervalles $a \dots b$ liegen, jede so oft gezählt, als ihre Ordnungszahl angiebt, und

S die Summe aller (positiv zu nehmenden, hohlen) Winkel, unter welchen die Bahn des Punktes t von diesen Nullstellen aus gesehen erscheint, wobei wieder jeder einzelne Winkel so oft zu zählen ist, als die Ordnungszahl der zugehörigen Nullstelle angiebt. Dann ist insbesondere

$$(2.) \quad S < \Phi.$$

Ferner ist, wenn das Zeichen $\arctg$ den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen bedeutet,

$$(3.) \quad A \cdot \arctg \frac{b-a}{2} < S.$$

Denn die Nullstellen, welche bei der Bildung der Summe S zu berücksichtigen sind, liegen sämmtlich im Innern oder auf der Begrenzung desjenigen Rechtecks, welches die Punkte

$$a \pm \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad b \pm \frac{i}{2}$$

zu Ecken hat. Denkt man sich aber die Bahn des Punktes t von irgend einem Punkte dieses Rechtecks aus betrachtet, so wird der Winkel, unter welchem dieselbe erscheint, wie aus einfachen geometrischen Ueberlegungen hervorgeht, dann am kleinsten, wenn sein Scheitel mit einer der beiden Ecken $a + \frac{i}{2}$ oder $b + \frac{i}{2}$ zusammenfällt, und erreicht dann gerade den Werth $\arctg \frac{b-a}{2}$. Jedes Glied der Summe S ist also $\geq \arctg \frac{b-a}{2}$, folg-

lich, wie behauptet wurde

$$(3.) \quad A. \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} < S,$$

und um so mehr

$$(4.) \quad A. \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} < \Phi.$$

Für die Zahl Φ kann man aber durch die folgenden Ueberlegungen eine obere Grenze gewinnen: Man hat nach *Riemann*

$$(5.) \quad \xi(t) = \Pi\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + it\right) \cdot \pi^{-\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right)} \cdot \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

wobei die Zeichen Π und ζ die gleiche Bedeutung haben, wie in *Riemanns* Abhandlung. Setzt man hier

$$t = \tau - i\frac{3}{2},$$

wo τ eine *reelle* Veränderliche bedeuten soll, so erhält man

$$\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right) = \Pi\left(1 + i\frac{\tau}{2}\right) \cdot (1 + i\tau) \cdot \pi^{-\left(1 + i\frac{\tau}{2}\right)} \cdot \zeta(2 + i\tau),$$

oder

$$\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right) = \Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right) \cdot (1 + i\frac{\tau}{2}) \cdot (1 + i\tau) \cdot \pi^{-\left(1 + i\frac{\tau}{2}\right)} \cdot \zeta(2 + i\tau).$$

Versteht man nun unter $l\pi$ den *reellen* und unter

$$l\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right); \quad l\Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right); \quad l\left(1 + i\frac{\tau}{2}\right); \quad l(1 + i\tau); \quad l\zeta(2 + i\tau)$$

diejenigen Werthe der Logarithmen, welche für $\tau = 0$ *reell* sind und sich zugleich mit τ *stetig* ändern, so folgt

$$(6.) \quad l\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right) = l\Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right) + l\left(1 + i\frac{\tau}{2}\right) + l(1 + i\tau) - \left(1 + i\frac{\tau}{2}\right)l\pi + l\zeta(2 + i\tau).$$

Zur Umformung des ersten Gliedes der rechten Seite dieser Gleichung kann man die Ergebnisse benutzen, welche Herr *T. J. Stieltjes* in seiner Abhandlung „Sur le développement de $\log \Gamma(a)$ “*) bei Untersuchung der Frage, ob und wie man die sogenannte *Stirlingsche* Formel auf imaginäre

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^{ème} Série, Tome 5, 1889, p. 425—444.

Werthe der unabhängigen Veränderlichen ausdehnen könne, gewonnen hat. Nach Gleichung (20) dieser Abhandlung ist nämlich, wenn man die negativen reellen Werthe aus dem Gebiet der complexen Veränderlichen z ausschliesst, für alle übrigen Werthe von z

$$(7.) \quad l\Pi(z) = lz + lI'(z) = (z + \frac{1}{2})lz - z + \frac{1}{2}l(2\pi) + J(z),$$

wobei für alle vorkommenden Logarithmen diejenigen Werthe zu nehmen sind, die bei stetiger Fortsetzung für reelle positive Werthe von z ebenfalls reell werden, und wo $J(z)$ ein Ergänzungsglied bedeutet, dessen absoluter Werth eine leicht anzugebende Grenze nie überschreitet. Bezeichnet man nämlich durch R den absoluten Werth und durch θ die Abweichung der complexen Zahl z , so ist nach Formel (26) der Abhandlung des Herrn *Stieltjes*:

$$(8.) \quad |J(z)| < \frac{1}{12 \cdot R \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

Unterwirft man nun die Veränderliche τ der Bedingung

$$\tau > 0,$$

und setzt man in (7.) $z = i \frac{\tau}{2}$, so erhält man

$$l\Pi\left(i \frac{\tau}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\tau}{2}\right) \cdot \left(l \frac{\tau}{2} + i \frac{\pi}{2}\right) - i \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} l(2\pi) + J\left(i \frac{\tau}{2}\right),$$

wo $l \frac{\tau}{2}$ den reellen Werth bedeutet, und hierauf aus (6.)

$$(9.) \quad \begin{cases} l\xi\left(\tau - i \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\tau}{2}\right) \left(l \frac{\tau}{2} + i \frac{\pi}{2}\right) + l\left(1 + i \frac{\tau}{2}\right) + l(1 + i\tau) \\ \quad - i \frac{\tau}{2} \cdot (1 + l\pi) - \frac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + l\zeta(2 + i\tau) + J\left(i \frac{\tau}{2}\right). \end{cases}$$

Nun denke man sich jeden der beiden Ausdrücke

$$l\xi\left(\tau - i \frac{3}{2}\right) \quad \text{und} \quad l\zeta(2 + i\tau) + J\left(i \frac{\tau}{2}\right)$$

in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt und bezeichne

durch $F(\tau)$ den Coefficienten von i in dem Ausdruck $l\xi\left(\tau - i \frac{3}{2}\right)$ und

durch $f(\tau)$ den Coefficienten von i in dem Ausdruck $l\zeta(2 + i\tau) + J\left(i \frac{\tau}{2}\right)$.

Dann erhält man, da die Function $\xi(t)$ gerade und auf beiden Coordinatenaxen reell ist,

$$(10.) \quad F(0) = 0,$$

$$(11.) \quad F(-\tau) = -F(\tau)$$

und für $\tau > 0$ aus (9.)

$$(12.) \quad F(\tau) = \frac{\tau}{2} l \frac{\tau}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\tau}{2} + \operatorname{arctg} \tau + \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} (1 + l\pi) + f(\tau),$$

wobei man unter dem Zeichen arctg jedesmal den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen zu verstehen hat.

Ferner ist

$$(13.) \quad l\zeta(2+i\tau) = \sum \left\{ \frac{1}{p^{2+i\tau}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^{2(i+i\tau)}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^{3(i+i\tau)}} + \dots \right\},$$

wo der Summationsbuchstabe p alle Primzahlen von 2 bis ins Unendliche durchläuft. Also wird

$$|l\zeta(2+i\tau)| \leq \sum \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^6} + \dots \right\} = l\zeta(2) = l \frac{\pi^2}{6}.$$

Ausserdem ergibt sich aus (8.) die Ungleichung

$$(14.) \quad \left| J\left(i \frac{\tau}{2}\right) \right| < \frac{1}{12 \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{3 \cdot |\tau|}.$$

Endlich ist nach Formel (25.) der Abhandlung des Herrn *Stieltjes*

$$J\left(i \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{2(\frac{1}{2}-x)^2 dx}{(n+x+i \frac{\tau}{2})(n+1-x+i \frac{\tau}{2})},$$

also, wie hieraus leicht hervorgeht, der Coefficient von i in dem Ausdruck $J\left(i \frac{\tau}{2}\right)$ *negativ*, sobald $\tau > 0$ ist, und daher unter der gleichen Voraussetzung

$$(15.) \quad -l \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{3\tau} < f(\tau) < l \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Function $F(\tau)$ kann daher aus Gleichung (12.) wenigstens näherungsweise berechnet werden. Dasselbe gilt von dem früher erklärten Zuwachs Φ der Abweichung der Function $\xi(t)$. Denn infolge der Festsetzungen, welche im Vorangehenden zur eindeutigen Erklärung der vor-

kommenden Logarithmen getroffen wurden, ist dieser Zuwachs gleich demjenigen Zuwachs, welchen die Function $F(\tau)$ erfährt, wenn τ von a bis b zunimmt, oder in Zeichen

$$(16.) \quad \Phi = F(b) - F(a).$$

Mit Hülfe dieser Entwicklungen gewinnt man über die Vertheilung der Nullstellen der Function $\xi(t)$ die folgenden Aufschlüsse:

1) Die Gleichung $\xi(t) = 0$ besitzt sicher keine Wurzel, deren reeller Theil absolut genommen ≤ 12 wäre.

Beweis: Man nehme $b > 0$ und $a = -b$. Dann muss die Anzahl A wegen der in Bezug auf den Nullpunkt obwaltenden Symmetrie nothwendig gerade sein, ist also, falls sie von Null verschieden ist, mindestens gleich 2. Ferner ist im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} \Phi &= F(b) - F(-b) = 2.F(b) \\ &= b.l \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arctg} b + \frac{\pi}{2} - b.(1+l\pi) + 2f(b). \end{aligned}$$

Da aber nach (4.)

$$A. \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} < \Phi$$

sein muss, so kann die Gleichung $\xi(t) = 0$ nur dann eine Wurzel haben, deren reeller Theil absolut genommen $\leq b$ ist, wenn

$$2 \operatorname{arctg} b < b.l \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arctg} b + \frac{\pi}{2} - b(1+l\pi) + 2f(b),$$

oder

$$(17.) \quad b.l \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2} + 2f(b) > b(1+l\pi)$$

ist.

Setzt man nun $b = 12$, so erhält man

$$\begin{aligned} b.l \frac{b}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2} &= 12.l6 + 2 \operatorname{arctg} 6 + \frac{\pi}{2} \\ &= 21,50111 + 2,81128 + 1,57080 \\ &= 25,88319 \end{aligned}$$

und

$$b(1+l\pi) = 12.(1+1,144730) = 25,73676.$$

Jetzt handelt es sich noch um die Abschätzung von $2f(12)$. Die Formel (15.) gewährt im vorliegenden Falle nicht die nöthige Schärfe. Aber wenn man auf die Erklärung der Function $f(\tau)$ und auf die Gleichung (13.) zurückgeht, so erhält man

$$l\zeta(2+i.12) = \frac{1}{2^2} \cdot e^{-i.12/2} + \frac{1}{3^2} \cdot e^{-i.12/3} + \dots$$

und hieraus, wenn man bedenkt, dass der Coefficient von i in dem Ausdruck $J(i \cdot \frac{12}{2})$ negativ ist,

$$f(12) < -\frac{1}{2^2} \sin(12/2) - \frac{1}{3^2} \sin(12/3) - \dots,$$

oder

$$\begin{aligned} f(12) &< l \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2^2} [1 + \sin(12/2)] - \frac{1}{3^2} [1 + \sin(12/3)] - \dots \\ &< 0,49770 - 0,47360 - 0,17535 \\ &< -0,15125, \end{aligned}$$

also

$$2f(12) < -0,30250$$

und

$$12l6 + 2 \arctg 6 + \frac{\pi}{2} + 2f(12) < 25,58069.$$

Für $b = 12$ ist also die Ungleichung (17.) *nicht* erfüllt. Die reellen Theile der Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ sind somit sämmtlich absolut genommen grösser als 12, wie behauptet wurde.

Dagegen erweist sich die linke Seite der Ungleichung (17.) für $b = 13$ wirklich grösser als die rechte, so dass das Vorhandensein einer Wurzel, deren reeller Theil zwischen 12 und 13 läge nicht ganz ausgeschlossen erscheint.

In einer Note „Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann*“*) hat Herr *J. L. W. V. Jensen* ein Verfahren angedeutet, durch welches unter Voraussetzung der erst später von Herrn *Hadamard* bewiesenen Sätze gezeigt werden kann, dass die reellen Theile aller Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ absolut genommen grösser als 6,561 sind, und ohne Beweis die Behauptung hinzugefügt, dass dieselben auch grösser als 8,4 seien. Das gegenwärtig erhaltene Ergebniss steht hiermit in Einklang.

*) Comptes Rendus, Tome 104, 1887, I, p. 1156.

2) Sind h und k irgend zwei reelle Zahlen, welche die Bedingung

$$\operatorname{tg} 1 = 1,55741 \leq k \leq h-4$$

erfüllen, so ist die Anzahl derjenigen in der Reihe der Nullstellen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

enthaltenen Glieder, deren reelle Theile nicht ausserhalb des Intervalles $h-k \dots h+k$ liegen, kleiner als

$$k.lh.$$

Beweis: Setzt man $a = h-k$ und $b = h+k$, so wird

$$\operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} = \operatorname{arctg} k \geq 1,$$

also

$$A \leq A \cdot \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} < \Phi.$$

Ferner wird, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\tau}{2} l \frac{\tau}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\tau}{2} + \operatorname{arctg} \tau = \varphi(\tau)$$

gesetzt wird,

$$F(\tau) = \varphi(\tau) + \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}(1+l\pi) + f(\tau),$$

also

$$\begin{aligned} \Phi &= F(b) - F(a) = F(h+k) - F(h-k) \\ &= \varphi(h+k) - \varphi(h-k) - k(1+l\pi) + f(h+k) - f(h-k) \\ &= 2k \cdot \varphi'(h+\eta k) - k(1+l\pi) + f(h+k) - f(h-k), \end{aligned}$$

wo

$$-1 < \eta < 1$$

ist.

Nun ist

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4+\tau^2} + \frac{1}{1+\tau^2},$$

folglich

$$\begin{aligned} \varphi'(h+\eta k) &< \frac{1}{2} l \frac{h+k}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4+(h-k)^2} + \frac{1}{1+(h-k)^2} \\ &< \frac{1}{2} l h + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} \\ &< \frac{1}{2} l h + 0,658824. \end{aligned}$$

Ferner ist nach (15.)

$$f(h+k) - f(h-k) < 2l \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{12} = 1,07873.$$

Somit wird

$$A < k.lh - k \left\{ 1 + l\pi - 1,31765 - \frac{1,07873}{k} \right\}.$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer nimmt mit wachsendem k zu und ist für den Minimalwerth 1,55741 der Zahl k gleich +0,13444, also immer positiv. Folglich ist

$$A < k.lh,$$

wie behauptet wurde.

3) Für alle Werthe der reellen Zahl h , welche > 12 sind, wird die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$, deren reelle Theile positiv und nicht grösser als h sind, dargestellt durch den Ausdruck

$$\frac{h}{2\pi} \cdot l \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi} + \frac{5}{4} + \eta \left\{ 0,34.(lh)^2 + 1,35.lh + 1,33 \right\},$$

wo η eine zwischen -1 und $+1$ enthaltene Zahl bedeutet. Dabei ist jede etwa vorkommende mehrfache Wurzel so oft zu zählen, als ihre Ordnungszahl angiebt.

Beweis: Man nehme im Vorangehenden, unter h eine beliebige reelle positive Zahl > 12 verstehend,

$$a = -h \quad \text{und} \quad b = +h.$$

Dann wird nach den Gleichungen (12.) und (16.):

$$\begin{aligned} \Phi &= F(h) - F(-h) = 2F(h) \\ &= hl \frac{h}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{2} + 2 \operatorname{arctg} h + \frac{\pi}{2} - h(1 + l\pi) + 2f(h) \\ &= h.l \frac{h}{2\pi} - h + 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{2} + 2 \operatorname{arctg} h + \frac{\pi}{2} + 2f(h) \\ &= h.l \frac{h}{2\pi} - h + \frac{5\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{h} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{h} + 2f(h), \end{aligned}$$

oder

$$(18.) \quad \Phi = h.l \frac{h}{2\pi} - h + \frac{5\pi}{2} + \eta.1,548,$$

wo

$$-1 < \eta < 1$$

ist.

Andererseits ist Φ gleich der Summe der Vermehrungen, welche die Abweichungen der Linearfactoren der Function $\xi(t)$ erfahren, wenn die Veränderliche t längs des geraden Verbindungsweges vom Punkte $-h-i\frac{3}{2}$ zum Punkte $+h-i\frac{3}{2}$ übergeht. Zur Berechnung dieser Summe werde festgesetzt, dass das Zeichen arctg jedesmal denjenigen Bogen bedeuten soll, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ ausschliesslich und $+\frac{\pi}{2}$ einschliesslich enthalten ist. Ferner seien

$$(19.) \quad \alpha_v = \beta_v + i\gamma_v \quad (v = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

diejenigen Gleichungen, welche durch Zerlegung der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ in ihre reellen und imaginären Theile entstehen. Dann wird der Zuwachs der Abweichung des Linearfactors $1 - \frac{t}{\alpha_v}$ in allen Fällen durch den Ausdruck

$$\operatorname{arctg} \frac{h+\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} + \operatorname{arctg} \frac{h-\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v}$$

dargestellt. Genau der gleiche Ausdruck ergibt sich für den Zuwachs der Abweichung des Linearfactors $1 - \frac{t}{\alpha'_v}$, wo

$$\alpha'_v = -\beta_v + i\gamma_v$$

die in Bezug auf die Ordinatenaxe zu α_v symmetrisch gelegene Zahl bedeutet. Somit wird

$$\Phi = 2 \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{h+\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} + \operatorname{arctg} \frac{h-\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} \right\}.$$

Nun sei H die Anzahl derjenigen Glieder der Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots,$$

deren reelle Theile nicht grösser als h sind.

Fasst man in der für Φ gefundenen Summe die H ersten Glieder zu einer besonderen Summe zusammen, so erhält man

$$\Phi = 2 \sum_{v=1}^H \left\{ \operatorname{arctg} \frac{h+\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} + \operatorname{arctg} \frac{h-\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} \right\} + 2 \sum_{v=H+1}^{\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{h+\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} + \operatorname{arctg} \frac{h-\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} \right\}.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{arctg} \frac{h+\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2}+\gamma_v}{h+\beta_v}.$$

Ferner ist für jedes Glied der ersten Summe, weil hier $h-\beta_v \geq 0$ ist,

$$\operatorname{arctg} \frac{h-\beta_v}{\frac{3}{2}+\gamma_v} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2}+\gamma_v}{h-\beta_v},$$

dagegen für jedes Glied der zweiten Summe, weil hier $h - \beta_v < 0$ ist,

$$\operatorname{arctg} \frac{h - \beta_v}{\frac{3}{2} + \gamma_v} = -\operatorname{arctg} \frac{\beta_v - h}{\frac{3}{2} + \gamma_v} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v - h}.$$

Somit wird, wenn zur Abkürzung

$$(20.) \quad \sum_{v=1}^H \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{h + \beta_v} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{h - \beta_v} \right\} = S_1$$

und

$$(21.) \quad \sum_{v=H+1}^{\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v - h} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} \right\} = S_2$$

gesetzt wird,

$$(22.) \quad \Phi = 2\pi \cdot H - 2S_1 + 2S_2.$$

Es handelt sich nun noch darum, für die Summen S_1 und S_2 Näherungswerte zu berechnen. Dabei möge zu Gunsten der Einfachheit der Rechnung auf die Erreichung der äussersten Schärfe, welche sich allenfalls erzielen liesse, verzichtet werden. Da

$$|\gamma_v| \leq \frac{1}{2}$$

ist, so hat man zunächst

$$0 \leq S_1 < \sum_{v=1}^H \frac{2}{h + \beta_v} + \sum_{v=1}^H \operatorname{arctg} \frac{2}{h - \beta_v},$$

also um so mehr

$$(23.) \quad 0 \leq S_1 < \frac{2H}{h} + \sum_{v=1}^H \operatorname{arctg} \frac{2}{h - \beta_v}.$$

Nun bezeichne man zur Abkürzung

durch x die Constante $\operatorname{tg} 1 = 1,55741$ und

durch λ diejenige ganze Zahl, welche die Bedingung

$$(24.) \quad \frac{h-12}{2x} < \lambda \leq \frac{h-12}{2x} + 1$$

erfüllt, und zerlege das Intervall $0 \dots h$ durch Schnitte, welche durch die Punkte

$$h - 2\lambda x; \quad h - 2(\lambda - 1)x; \quad h - 2(\lambda - 2)x; \quad \dots; \quad h - 4x; \quad h - 2x$$

geführt sind, in Theilintervalle.

Da nach (24.)

$$h - 2\lambda x < 12$$

ist, so enthält das erste Theilintervall nach Satz 1) keine der Zahlen β_v ,

liefert also auch zu der Summe $\sum_{v=1}^H \operatorname{arctg} \frac{2}{h - \beta_v}$ keinen Beitrag.

Ist nun $\lambda > 1$, so ist für jede dem zweiten Theilintervall angehörige Zahl β_v

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{h-\beta_v} < \frac{2}{h-\beta_v} \leq \frac{2}{h-[h-2(\lambda-1)x]} = \frac{1}{(\lambda-1)x},$$

und da die Anzahl dieser Zahlen nach Satz 2) kleiner ist als

$$x l [h - (2\lambda - 1)x],$$

also um so mehr kleiner als $x l h$, so wird der Gesamtbeitrag, welchen die dem zweiten Theilintervall angehörigen Zahlen β_v zu der Summe

$\sum_{v=1}^H \operatorname{arctg} \frac{2}{h-\beta_v}$ liefern, kleiner als

$$\frac{1}{\lambda-1} \cdot l h.$$

Genau ebenso findet sich, dass die Beiträge, welche die dem dritten, vierten, ..., λ ten Theilintervall angehörigen Zahlen β_v zu der erwähnten Summe liefern, beziehentlich kleiner sind als

$$\frac{1}{\lambda-2} \cdot l h; \quad \frac{1}{\lambda-3} \cdot l h; \quad \dots; \quad \frac{1}{1} \cdot l h.$$

Was endlich das letzte Theilintervall betrifft, so ist die Anzahl der demselben angehörigen Zahlen β_v kleiner als $x l h$, und für jede einzelne derselben

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{h-\beta_v} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Also wird der Gesamtbeitrag dieser Zahlen zu der betrachteten Summe kleiner als

$$x \cdot \frac{\pi}{2} \cdot l h.$$

Fasst man alles zusammen, so erhält man für $\lambda = 1$:

$$\sum_{v=1}^H \operatorname{arctg} \frac{2}{h-\beta_v} < x \cdot \frac{\pi}{2} l h$$

und für $\lambda > 1$:

$$\sum_{v=1}^H \operatorname{arctg} \frac{2}{h-\beta_v} < l h \left(x \cdot \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lambda-1} \right).$$

Nun ist bekanntlich

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lambda-1} < l(\lambda-1) + C + \frac{1}{2(\lambda-1)},$$

wo

$$C = 0,57721\,56649\dots$$

die sogenannte *Eulersche* oder *Mascheronische* Constante bedeutet. Unter Benutzung der Formel (24.) folgt hieraus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lambda-1} < lh - l(2x) + C + \frac{1}{2(\lambda-1)}.$$

Nun ist der Ausdruck

$$-l(2x) + C + \frac{1}{2(\lambda-1)},$$

wie die numerische Ausrechnung zeigt, schon für $\lambda = 2$ negativ. Also ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lambda-1} < lh,$$

und daher in allen Fällen

$$\sum_{v=1}^{\pi} \arctg \frac{2}{h-\beta_v} < (lh)^2 + x \cdot \frac{\pi}{2} \cdot lh,$$

folglich

$$(25.) \quad S_1 = \vartheta \cdot \left\{ \frac{2H}{h} + (lh)^2 + x \cdot \frac{\pi}{2} \cdot lh \right\},$$

wo

$$0 \leq \vartheta < 1$$

ist.

In ähnlicher Weise kann man auch für die Summe S_2 einen Näherungswert finden. Zerlegt man nämlich das Intervall $h \dots \infty$ in die Theilintervalle

$$h \dots h+2x; \quad h+2x \dots h+4x; \quad h+4x \dots h+6x; \quad \dots,$$

so ist die Anzahl der dem ersten Theilintervall angehörnden Zahlen β_v kleiner als

$$x \cdot l(h+x)$$

und für jede einzelne derselben

$$\arctg \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v - h} - \arctg \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} < \frac{\pi}{2},$$

also der Gesamtbeitrag aller dieser Zahlen zu der Summe S_2 kleiner als

$$\frac{\pi}{2} \cdot x \cdot l(h+x).$$

Ist ferner μ irgend eine ganze positive Zahl, so ist die Anzahl derjenigen Zahlen β_v , welche dem $(\mu+1)$ -ten Theilintervall angehören, also die Ungleichung

$$h + 2\mu x \leq \beta_v \leq h + 2(\mu+1)x$$

erfüllen, kleiner als

$$x \cdot l[h + (2\mu + 1)x].$$

Für jede einzelne derselben ist ferner

$$\operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v - h} < \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v - h}$$

und

$$\operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} > \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} \right)^3,$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v - h} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} &< \frac{2h(\frac{3}{2} + \gamma_v)}{(\beta_v - h)(\beta_v + h)} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\frac{3}{2} + \gamma_v}{\beta_v + h} \right)^3 \\ &< \frac{h}{\mu x \cdot (h + \mu x)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(h + \mu x)^3}. \end{aligned}$$

Der Beitrag, welchen diese Zahlen zu der Summe S_2 liefern, ist daher kleiner als

$$h \cdot \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{\mu \cdot (h + \mu x)} + \frac{x}{3} \cdot \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{(h + \mu x)^3}.$$

Folglich ist

$$S_2 < \frac{\pi}{2} \cdot x \cdot l(h+x) + h \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{\mu(h + \mu x)} + \frac{x}{3} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{(h + \mu x)^3}.$$

Nun hat man, unter $[h]$ die grösste in h enthaltene ganze Zahl verstehend,

$$h \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{\mu(h + \mu x)} = h \sum_{\mu=1}^{[h]} \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{\mu(h + \mu x)} + h \sum_{\mu=[h]+1}^{\infty} \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{\mu(h + \mu x)}.$$

Da der Quotient $\frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{h + \mu x}$ sowohl mit wachsendem μ als auch mit wachsendem h abnimmt, und da ausserdem $h > 7x$ ist, so folgt hieraus

$$\begin{aligned} h \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l[h + (2\mu + 1)x]}{\mu(h + \mu x)} &< h \cdot \frac{l(h+x)}{h} \sum_{\mu=1}^{[h]} \frac{1}{\mu} + \frac{h}{x} \cdot \sum_{\mu=[h]+1}^{\infty} \frac{l[2(\mu+4)x]}{\mu(\mu+7)} \\ &< l(h+x) \cdot \left\{ l[h] + C + \frac{1}{2[h]} \right\} + \frac{h}{x} \cdot \sum_{\mu=[h]+1}^{\infty} \frac{l[2(\mu+4)x]}{(\mu+3)^2}. \end{aligned}$$

Da nun die Function $lx + \frac{1}{2x}$ für $x > \frac{1}{2}$ mit wachsendem x zunimmt, so ist

$$l[h] + \frac{1}{2[h]} \leq lh + \frac{1}{2h}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=[h]+1}^{\infty} \frac{l[2(\mu+4)x]}{(\mu+3)^2} &= \sum_{\mu=[h]+4}^{\infty} \frac{l[2(\mu+1)x]}{\mu^2} < \int_h^{\infty} \frac{l[2(x+1)x]}{x^2} dx \\ &= \frac{l[2(h+1)x]}{h} + l \frac{h+1}{h} < \frac{l[2(h+1)x] + 1}{h}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$h \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l[h+(2\mu+1)x]}{\mu \cdot (h+\mu x)} < l(h+x) \cdot \left(lh + C + \frac{1}{2h} \right) + \frac{l[2(h+1)x]+1}{x}.$$

Endlich ist

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l[h+(2\mu+1)x]}{(h+\mu x)^2} &< \frac{x}{3} \cdot \frac{l(h+x)}{h} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(h+\mu x)^2} \\ &< \frac{x}{3} \cdot \frac{l(h+x)}{h} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{(h+xx)^2} < \frac{1}{3} \cdot \frac{l(h+x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} S_2 &< l(h+x) \cdot \left(lh + C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2h} + \frac{1}{3h^2} \right) + \frac{l[2(h+1)x]+1}{x} \\ &< \left(lh + \frac{x}{h} \right) \cdot \left(lh + C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2h} + \frac{1}{3h^2} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(lh + l(2x) + 1 + \frac{1}{h} \right) \\ &< (lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{x} \right) \cdot lh + \frac{1}{x} \cdot l(2x) + 1 + \left(x + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{lh}{h} \\ &\quad + \left(xC + \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{h} + \frac{1}{3} \cdot \frac{lh}{h^2} + \frac{x}{h} \cdot \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{3h^2} \right) \\ &< (lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{x} \right) lh + 2,256, \end{aligned}$$

und da S_2 positiv ist, so kann man

$$(26.) \quad S_2 = \mathcal{S}' \left\{ (lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{x} \right) \cdot lh + 2,256 \right\}$$

setzen, wo

$$0 < \mathcal{S}' < 1$$

ist.

Nun möge festgesetzt werden, dass solche Zahlen, von denen nichts weiter bekannt zu sein braucht, als dass sie zwischen -1 und $+1$ enthalten sind, durchweg durch den Buchstaben η , solche Zahlen dagegen, von denen nur bekannt zu sein braucht, dass sie ≥ 0 , aber < 1 sind, durch $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{S}'$ bezeichnet werden sollen. Dann kann man der aus (18.), (22.), (25.) und (26.) folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} hl \frac{h}{2\pi} - h + \frac{5\pi}{2} + \eta \cdot 1,548 &= 2\pi H - 2\mathcal{S} \left\{ \frac{2H}{h} + (lh)^2 + x \cdot \frac{\pi}{2}lh \right\} \\ &\quad + 2\mathcal{S}' \left\{ (lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{x} \right) lh + 2,256 \right\} \end{aligned}$$

zunächst die Form geben

$$2\pi \cdot \left(1 - \frac{2\mathcal{S}}{\pi h} \right) \cdot H = hl \frac{h}{2\pi} - h + \frac{5\pi}{2} + 2\eta \cdot \left\{ (lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{x} \right) \cdot lh + 3,03 \right\}.$$

Da ferner

$$\frac{1}{1 - \frac{2\vartheta}{\pi h}} = 1 + \frac{\frac{2\vartheta}{\pi h}}{1 - \frac{2\vartheta}{\pi h}} < 1 + \frac{2\vartheta}{\pi h} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6\pi}},$$

oder

$$\frac{1}{1 - \frac{2\vartheta}{\pi h}} = 1 + \frac{12}{6\pi - 1} \cdot \frac{\vartheta'}{h}$$

ist, so folgt hieraus

$$H = \frac{h}{2\pi} \cdot l \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi} + \frac{5}{4} + \frac{6\vartheta'}{\pi(6\pi - 1)} \cdot \left(lh - l(2\pi) - 1 + \frac{5\pi}{2h} \right) \\ + \frac{6\eta}{6\pi - 1} \left\{ (lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2} z + \frac{1}{x} \right) lh + 3,03 \right\},$$

oder endlich

$$(27.) \quad H = \frac{h}{2\pi} \cdot l \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi} + \frac{5}{4} + \eta \left\{ 0,34(lh)^2 + 1,35 \cdot lh + 1,33 \right\},$$

womit Satz (3.) bewiesen ist.

Hieraus folgt leicht:

Wenn k eine Function von h bezeichnet, welche bei unbegrenzt wachsendem h ebenfalls unendlich wird, und zwar von höherer Ordnung als $(lh)^2$, aber von niedrigerer Ordnung als h , so wird die Anzahl derjenigen Nullstellen der Function $\xi(t)$, deren reelle Theile zwischen h und $h+k$ enthalten sind, bis auf Grössen niedrigerer Ordnung dargestellt durch den Ausdruck

$$k \cdot \frac{1}{2\pi} l \frac{h}{2\pi}.$$

In diesem Sinne kann man sagen, dass die Dichtigkeit der Nullstellen von der Grösse h wie $\frac{1}{2\pi} l \frac{h}{2\pi}$ zunehme.

4) Die Gleichung $\xi(t) = 0$ hat mindestens eine Wurzel, deren reeller Theil zwischen 0 und 53 enthalten ist.

Angenommen nämlich, dies wäre nicht der Fall, so müsste für $h = 53$

$$H = 0 \quad \text{und} \quad S_1 = 0,$$

also nach (22.)

$$\Phi = 2S_2$$

sein. Nun liefert aber die numerische Ausrechnung unter Benutzung von (18.)

$$\Phi > h l \frac{h}{2\pi} - h + \frac{5\pi}{2} - 1,548 = 66,8243,$$

und unter Benutzung von (26.)

$$2S_2 < 2\left\{(lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{x}\right)lh + 2,256\right\} = 65,147,$$

also

$$\Phi > 2S_2.$$

Die gemachte Annahme ist daher unstatthaft.

Für $h = 52$ ist dagegen ein ähnlicher Schluss nicht mehr möglich. Die Zahlen 12 und 53 bilden somit die engsten ganzzahligen Grenzen, zwischen welche man den reellen Theil der Wurzel α_1 der Gleichung $\xi(t) = 0$ mit Sicherheit einschliessen kann, solange man andere Hilfsmittel, als die im Vorgehenden benutzten, nicht zur Verfügung hat und einen grösseren Aufwand numerischer Rechnung vermeiden will.

II.

Convergenzbeweise und Anwendungen.

Im Nachfolgenden bedeuten a, b, u reelle positive Constanten und h eine reelle Veränderliche, welche alle positiven Werthe annehmen kann. Bei jedem der vorkommenden bestimmten Integrale ist als Integrationsweg die die Grenzen verbindende *gerade* Strecke zu nehmen. Unter allen vorkommenden Potenzen und Logarithmen sind die Hauptwerthe zu verstehen.

Hilfssätze.

A) Sind c, d, g, v reelle Constanten, welche die Bedingungen

$$0 \leq c < d,$$

$$g \geq 0,$$

$$v \geq 0$$

erfüllen, so gelten die Formeln

$$(28.) \quad \left| \int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{rs}}{s} ds \right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{rg}}{|v|} \cdot \frac{1}{|g|+c}$$

und

$$(29.) \quad \left| \int_{g-ih}^{g+ih} \frac{e^{rs}}{s} ds \right| < (4+\pi) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{e^{rg}}{|v \cdot g|}.$$

Durch theilweise Integration erhält man nämlich

$$\int \frac{e^{rs}}{s} ds = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{rs}}{v} + \frac{1}{v} \int \frac{e^{rs}}{s^2} ds$$

und hieraus

$$\int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s} ds = \frac{e^{vg}}{v} \cdot \left(\frac{e^{ivd}}{g+id} - \frac{e^{ivc}}{g+ic} \right) + i \frac{e^{vg}}{v} \cdot \int_c^d \frac{e^{ivy}}{(g+iy)^2} dy.$$

Hieraus folgt

$$\left| \int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s} ds \right| < \frac{2e^{vg}}{|v|} \cdot \frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}} + \frac{e^{vg}}{|v|} \cdot \int_c^d \frac{dy}{g^2+y^2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{dy}{g^2+y^2} &= \int_0^{d-c} \frac{d\eta}{g^2+(c+\eta)^2} \leq \int_0^{d-c} \frac{d\eta}{g^2+c^2+\eta^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{d-c}{\sqrt{g^2+c^2}} < \frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Also wird

$$\left| \int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s} ds \right| < \frac{e^{vg}}{|v|} \cdot \frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}} \cdot \left(2 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Da nun

$$2(g^2+c^2) \geq (|g|+c)^2,$$

also

$$\sqrt{g^2+c^2} \geq \frac{|g|+c}{\sqrt{2}}$$

ist, so ergibt sich schliesslich

$$(28.) \quad \left| \int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s} ds \right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{vg}}{|v|} \cdot \frac{1}{|g|+c}.$$

Setzt man hier $c=0$, $d=h$, so folgt

$$\left| \int_g^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s} ds \right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{vg}}{|vg|}.$$

Da ferner

$$-\int_{g-ih}^g \frac{e^{vs}}{s} ds = \int_g^{g-ih} \frac{e^{vs}}{s} ds$$

nichts anderes ist, als der conjugirte Werth von $\int_g^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s} ds$, so ist auch

$$\left| \int_{g-ih}^g \frac{e^{vs}}{s} ds \right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{vg}}{|vg|},$$

folglich

$$(29.) \quad \left| \int_{g-ih}^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s} ds \right| < (4+\pi) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{e^{vg}}{|vg|}.$$

B) Man hat

$$(30.) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{us}}{s} ds - 1 \right| \leq \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{e^{ua}}{hu}$$

36*

und

$$(31.) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{-us}}{s} ds \right| \leq \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ua}}{hu}.$$

Beweis: Man betrachte dasjenige Rechteck, welches die Punkte

$$a-ih, \quad a+ih, \quad -b+ih, \quad -b-ih$$

zu Ecken hat. Da dieses Rechteck den Nullpunkt umschliesst, so hat das über die Begrenzung desselben in positiver Richtung erstreckte Integral

 $\int \frac{e^{us}}{s} ds$ den Werth $2\pi i$. Daher ist

$$(32.) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{us}}{s} ds = 1 - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a+ih}^{-b+ih} \frac{e^{us}}{s} ds \\ \quad - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-b+ih}^{-b-ih} \frac{e^{us}}{s} ds - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-b-ih}^{a-ih} \frac{e^{us}}{s} ds. \end{cases}$$

Nun folgt aus (29.), wenn man g durch $-b$ und v durch u ersetzt,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-b+ih}^{-b-ih} \frac{e^{us}}{s} ds \right| < \frac{4+\pi}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{-ub}}{ub}.$$

Nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Zahl ε kann man daher, indem man b oberhalb einer gewissen Grenze annimmt, stets erreichen, dass

$$(33.) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-b+ih}^{-b-ih} \frac{e^{us}}{s} ds \right| < \varepsilon$$

wird. Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a+ih}^{-b+ih} \frac{e^{us}}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^{-b} e^{ux} \cdot \frac{\cos(ux) + i\sin(ux)}{x+ih} dx, \\ \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-b-ih}^{a-ih} \frac{e^{us}}{s} ds &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{-b-ih} \frac{e^{us}}{s} ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^{-b} e^{ux} \cdot \frac{\cos(ux) - i\sin(ux)}{x-ih} dx, \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a+ih}^{-b+ih} \frac{e^{us}}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-b-ih}^{a-ih} \frac{e^{us}}{s} ds = \frac{1}{\pi} \cdot \int_a^{-b} e^{ux} \cdot \frac{x\sin(ux) - h\cos(ux)}{h^2+x^2} dx.$$

Da ferner

$$\left| \frac{x\sin(ux)}{h^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{2h}$$

und

$$\left| \frac{h\cos(ux)}{h^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{h}$$

ist, so ergibt sich

$$(34.) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a+ih}^{-b+ih} \frac{e^{us}}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-b-ih}^{a-ih} \frac{e^{us}}{s} ds \right| < \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{-h}^a e^{ux} dx < \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{e^{ua}}{hu}.$$

Nunmehr folgt aus (32.), (33.), (34.):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{us}}{s} ds - 1 \right| &< \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{e^{ua}}{hu} + \varepsilon \\ &\leq \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{e^{ua}}{hu}, \end{aligned}$$

womit Formel (30.) bewiesen ist. Ganz ähnlich lässt sich die Ungleichung (31.) beweisen: Man hat nur nöthig, u durch $-u$ zu ersetzen und an Stelle des eben betrachteten Rechtecks dasjenige (den Nullpunkt nicht mehr umschliessende) Rechteck ins Auge zu fassen, welches die Punkte

$$a-ih, \quad a+ih, \quad b+ih, \quad b-ih$$

zu Ecken hat.

C) Aus (30.) und (31.) folgt

$$(35.) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{us}}{s} ds = 1,$$

$$(36.) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{b+ih} \frac{e^{-us}}{s} ds = 0,$$

welchen Gleichungen man als dritte die leicht direct zu bestätigende Gleichung

$$(37.) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2}$$

anreihen kann.

Diese Hilfssätze in Verbindung mit den im ersten Abschnitt erhaltenen Ergebnissen gestatten, für eine gewisse Klasse unendlicher Reihen, die bei der analytischen Darstellung zahlentheoretischer Functionen Anwendung finden, den Beweis der Convergenz zu erbringen. Zu diesen Reihen kommt man durch die folgende Verallgemeinerung der *Riemannschen* Betrachtungen:

Es sei n eine Veränderliche, welche alle ganzzahligen positiven Werthe annehmen kann, und $L(n)$ diejenige Function von n , welche durch die drei folgenden Gleichungen erklärt wird:

$$\alpha) L(1) = 0,$$

$$\beta) L(n) = 0, \text{ wenn } n \text{ aus verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt ist}$$

setzt ist,

$\gamma)$ $L(n) = lp$, wenn $n = p^a$ ist, wo p eine Primzahl und a einen ganzzahligen positiven Exponenten bedeutet.

Ferner sei r eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt für alle Werthe der complexen Veränderlichen s , welche so beschaffen sind, dass der reelle Theil von $s+r$ grösser als 1 ist, die unmittelbar aus der *Riemannschen* Formel

$$l\zeta(s) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s} + \dots$$

folgende Gleichung

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^{s+r}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n^s}.$$

Sind nun a und x zwei reelle positive Constanten, welche die Bedingungen

$$a+r > 1 \quad \text{und} \quad x > 1$$

erfüllen, und h eine reelle positive Veränderliche, so folgt aus der vorstehenden Gleichung durch Multiplication mit $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{x^s}{s}$ und Integration über den geraden Verbindungsweg der Punkte $a-ih$ und $a+ih$:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} \cdot \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds.$$

Nun bezeichne man durch G eine beliebige oberhalb x liegende ganze positive Zahl und denke sich die rechts stehende Summe in die beiden Theile

$$\sum_{n=1}^G \frac{L(n)}{n^r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds \quad \text{und} \quad \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds$$

zerlegt. Für jedes Glied des zweiten Theiles ist

$$ln-lx > 0,$$

also nach (31.)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{-(ln-lx)s}}{s} ds \right| < \frac{3}{2\pi} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^a \cdot \frac{1}{h(ln-lx)}.$$

Somit ist

$$\left| \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds \right| < \frac{3x^a}{2\pi \cdot [l(G+1)-lx]} \cdot \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^{a+r}},$$

also

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds = 0.$$

Auch der erste Theil nähert sich bei unbegrenzt wachsendem h einem endlichen Grenzwert, da die Anzahl der Glieder endlich ist, und jedes einzelne einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Aus den Gleichungen (35.), (36.), (37.) folgt nämlich

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds = \begin{cases} 1 & \text{für } x > n, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = n, \\ 0 & \text{für } x < n. \end{cases}$$

Setzt man daher, unter $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl verstehend, für den Fall, dass x keine Potenz einer Primzahl ist,

$$A(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{L(n)}{n^r},$$

dagegen, wenn x eine Potenz einer Primzahl ist,

$$A(x, r) = \sum_{n=1}^x \frac{L(n)}{n^r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{L(x)}{x^r},$$

so dass $A(x, r)$ als Function von x angesehen an allen Sprungstellen den Mittelwerth zwischen den unmittelbar benachbarten Werthen annimmt, so erhält man die Gleichung

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^x \frac{L(n)}{n^r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^s ds = A(x, r).$$

Also nähert sich auch der Ausdruck $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} \cdot \frac{x^s}{s} ds$ einem endlichen Grenzwert, und zwar wird

$$(38.) \quad -\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} \cdot \frac{x^s}{s} ds = A(x, r).$$

Andererseits ist nach *Riemann*

$$\zeta(s+r) = \frac{1}{s+r-1} \cdot \frac{\pi^{\frac{s+r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)} \cdot \xi\left[i\left(s+r-\frac{1}{2}\right)\right],$$

also

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \frac{1}{s+r-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{s+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)} - i \cdot \frac{\xi'\left[i\left(s+r-\frac{1}{2}\right)\right]}{\xi\left[i\left(s+r-\frac{1}{2}\right)\right]}$$

und unter Benutzung der von Herrn *Hadamard* bewiesenen Gleichung (1.):

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \frac{1}{s+r-1} - \frac{1}{2} \log \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + n^2},$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_n^2} = \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} + \frac{1}{s+r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\},$$

folglich

$$(39.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_n^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s(s+r-1)} ds - \frac{1}{2} l\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \\ &- \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} \frac{x^s}{s} ds. \end{aligned} \right.$$

Nun nehme man wieder an, dass h über alle Grenzen hinaus wachse. Dann nähern sich die 4 Glieder der rechten Seite der vorstehenden Gleichung sämtlich endlichen Grenzwerten. Für das erste und dritte Glied ist dies schon im Vorangehenden bewiesen. Für das zweite hat man, falls $r \geq 1$ ist,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s(s+r-1)} ds = \frac{1}{r-1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds - x^{1-r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-1}}{s+r-1} ds \right\},$$

also

$$(40.) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s(s+r-1)} ds = \frac{1}{r-1} \cdot (1 - x^{1-r}).$$

Falls dagegen $r = 1$ ist, erhält man, da

$$\int \frac{x^s}{s^2} ds = -\frac{x^s}{s} + lx \cdot \int \frac{x^s}{s} ds$$

ist,

$$(40^a.) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s^2} ds = lx = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - x^{1-r}}{r-1}.$$

Für das vierte Glied endlich kann man folgendermassen schliessen: Man hat, wenn zunächst vorausgesetzt wird, dass r von allen negativen geraden ganzzahligen Werten verschieden sei,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{s+r+2n} - \frac{1}{r+2n} \right) + \left(\frac{1}{r+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{(r+2n)(s+r+2n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2n(r+2n)}, \end{aligned}$$

wo

$$C = 0,57721\,56649 \dots$$

wieder die *Eulersche* Constante bedeutet. Daher ist

$$(41.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} \frac{x^s}{s} ds \\ &= \left\{ \frac{1}{2} C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2n(r+2n)} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s+r+2n} ds. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist, wenn G eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s+r+2n} ds = \sum_{n=1}^G \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n} ds \\ + \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n} ds.$$

Da nach (29.)

$$\left| \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n} ds \right| = \left| \int_{a+r+2n-ih}^{a+r+2n+ih} \frac{e^{\sigma l x}}{\sigma} d\sigma \right| < (4+\pi) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{x^{a+r+2n}}{lx} \cdot \frac{1}{a+r+2n}$$

ist, so ergibt sich

$$\left| \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n} ds \right| < \frac{4+\pi}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{x^a}{lx} \cdot \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{1}{(r+2n)(a+r+2n)} \\ < \frac{4+\pi}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{x^a}{lx} \int_G^{\infty} \frac{dy}{(r+2y)(a+r+2y)} \\ < \frac{4+\pi}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{x^a}{lx} \int_G^{\infty} \frac{dy}{(r+2y)^2} \\ < \frac{4+\pi}{2\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{x^a}{lx} \cdot \frac{1}{r+2G}.$$

Nun wähle man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Zahl ε zuerst die Zahl G so, dass die Ungleichungen

$$\sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \frac{4+\pi}{2\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{x^a}{lx} \cdot \frac{1}{r+2G} < \frac{\varepsilon}{3}$$

gleichzeitig bestehen, was ja nur erfordert, dass G oberhalb einer gewissen Grenze liege, und sodann die Zahl h so gross, dass auch

$$\left| \sum_{n=1}^G \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n} ds - \sum_{n=1}^G \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, was nach Formel (30.) immer möglich ist. Hierauf denke man sich

die Differenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s+r+2n} ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n}$$

in die drei Theile

$$\sum_{n=1}^G \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n} ds - \sum_{n=1}^G \frac{x^{-r-2n}}{r+2n}; \quad - \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n};$$

$$\sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{1}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s+r+2n} ds$$

zerlegt. Dann erhält man

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s+r+2n} ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \right| < \varepsilon,$$

oder anders ausgedrückt

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+2n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s+r+2n} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n}.$$

Daher folgt aus (41.) unter Berücksichtigung von (35.):

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} \frac{x^s}{s} ds$$

$$= \frac{1}{2} C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2n(r+2n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n}.$$

Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2} C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)},$$

so bleibt dieselbe auch dann noch richtig, wenn r mit einer negativen geraden ganzen Zahl $-2m$ zusammenfällt, sobald man nur das die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmende Glied

$$\frac{r+2mx^{-r-2m}}{2m(r+2m)}$$

der rechts stehenden Summe durch seinen Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow -2m} \frac{r+2mx^{-r-2m}}{2m(r+2m)} = \frac{1}{2m} - lx$$

ersetzt. Dies ergibt sich unter Benutzung der Formel (40^a.) durch einfache und nahe liegende Abänderungen der vorangehenden Betrachtungen.

Hiermit ist nachgewiesen, dass sämtliche Glieder der rechten Seite der Gleichung (39.) bei unbegrenzt wachsendem h gegen endliche Grenz-

werthe convergiren. Also strebt auch die linke Seite dieser Gleichung einem endlichen Grenzwert zu, und zwar ist

$$(42.) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ = -A(x, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)}, \end{aligned} \right.$$

mit dem Zusatz, dass, falls ein Glied der rechten Seite für einen speciellen Werth r_0 von r die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, an Stelle dieses Gliedes derjenige Grenzwert zu setzen ist, welchem dasselbe bei unbegrenzter Annäherung der Veränderlichen r an den festen Werth r_0 zustrebt.

Auch jedes einzelne Glied der in Gleichung (42.) auf der linken Seite stehenden Summe nähert sich bei unbegrenzt wachsendem h einem endlichen Grenzwert. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \left\{ \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} + \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_v} \right\} \frac{x^s}{s} ds, \end{aligned}$$

und da

$$\frac{1}{(s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v) \cdot s} = \frac{1}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} \cdot \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v}$$

und

$$\frac{1}{(s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_v) \cdot s} = \frac{1}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_v} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_v} \cdot \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_v}$$

ist, so folgt hieraus

$$(43.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds &= \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_v}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} ds \\ &\quad - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_v}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_v} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_v}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_v} ds. \end{aligned} \right.$$

Setzt man nun wieder

$$(19.) \quad \alpha_v = \beta_v + i\gamma_v \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty),$$

wo β_v und γ_v reell sind, und zur Abkürzung

$$(44.) \quad a+r-\frac{1}{2}+\gamma_v = b,$$

so erhält man

$$(45.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-ia_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-ia_\nu} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h-\beta_\nu)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Nimmt man nun $h > \beta_\nu$, und ersetzt man in (28.) g, c, d, σ beziehentlich durch $b, h-\beta_\nu, h+\beta_\nu, lx$, so erhält man

$$\left| \int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma \right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^b}{lx} \cdot \frac{1}{b+h-\beta_\nu},$$

also

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma = 0.$$

Da ferner nach (35.)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma = 1$$

ist, so ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-ia_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-ia_\nu} ds = 1.$$

Ganz ähnlich findet man

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+ia_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+ia_\nu} ds = 1.$$

Folglich nähert sich auch die linke Seite der Gleichung (43.) einem endlichen Grenzwert, wie behauptet wurde, und zwar ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds &= \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} x^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{x^{ia_\nu}}{r-\frac{1}{2}-ia_\nu} + \frac{x^{-ia_\nu}}{r-\frac{1}{2}+ia_\nu} \right\} \\ &= \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} - 2 \cdot x^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(r-\frac{1}{2})\cos(\alpha_\nu lx) - \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2}. \end{aligned}$$

Das hiermit gewonnene Ergebniss führt zu folgender Frage:

Ist die unendliche Reihe, welche die Functionen

$$(46.) \quad W_\nu(x, r) = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} - 2 \cdot x^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(r-\frac{1}{2})\cos(\alpha_\nu lx) - \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2}$$

($\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty$)

zu Gliedern hat, für beliebige Werthe von x und r convergent?

Und stimmt ihre Summe mit der rechten Seite der Gleichung (42.) überein? Mit andern Worten:

Darf man in dem Ausdrucke

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

die Reihenfolge der durch die Zeichen Σ und $\lim$ angedeuteten Operationen umkehren, ohne dass der Werth dieses Ausdruckes eine Aenderung erleidet?

Die Antwort lautet bejahend und wird gegeben durch den folgenden Satz:

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W_{\nu}(x, r)$$

so geordnet werden, wie sie bei wachsenden Werthen des Index ν aufeinander folgen, so ist die Reihe für alle reellen Werthe von r und für alle reellen positiven Werthe von x convergent. Und wenn

$$x > 1$$

ist, so wird ihre Summe durch den Ausdruck

$$-A(x, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)}$$

dargestellt, wobei, falls ein Glied dieses Ausdruckes für einen speciellen Werth von r die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, statt dieses Gliedes der entsprechende Grenzwert zu nehmen ist.

Beweis: Es sei wie im ersten Abschnitt H die Anzahl derjenigen Zahlen α_{ν} , deren reelle Theile $\leq h$ sind. Die Zahl h selbst sei von vorn herein so gross angenommen, dass H mindestens gleich 1 wird. Dann ergibt sich aus der (nur eine andere Form der Gleichung (46.) darstellenden) Gleichung

$$W_{\nu}(x, r) = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}} - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}$$

durch Summation von $\nu = 1$ bis $\nu = H$

$$(47.) \quad \sum_{\nu=1}^H W_{\nu}(x, r) = \sum_{\nu=1}^H \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} - \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}} - \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}.$$

Ebenso folgt aus (43.), wenn man die Summe

$$\sum_{\nu=1}^H \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

durch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds - \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

ersetzt,

$$(48.) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad - \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \cdot \sum_{\nu=1}^H \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} ds \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} ds. \end{aligned} \right.$$

Aus (47.) und (48.) ergibt sich durch Addition

$$(49.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^H W_\nu(x, r) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds - 1 \right) \cdot \sum_{\nu=1}^H \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} ds \right) \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} ds \right) \\ &\quad - \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds. \end{aligned} \right.$$

Wegen des schon früher erhaltenen, durch Gleichung (42.) ausgedrückten Ergebnisses genügt es daher zum Beweise der in Bezug auf die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r)$ ausgesprochenen Behauptungen zu zeigen, dass jedes einzelne der Glieder, welche in Gleichung (49.) auf der rechten Seite stehen, mit alleiniger Ausnahme des ersten bei unbegrenzt wachsendem h gegen Null convergirt. Dies ergibt sich aber durch die folgenden Betrachtungen:

Erstens. Nach Gleichung (35.) ist

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds - 1 \right) = 0.$$

Ferner folgt aus der Convergenz der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_v^2}$, dass auch die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2}$ convergirt. Daher kann der absolute Werth der Summe

$$\sum_{v=1}^H \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2}$$

eine gewisse Grenze niemals überschreiten, wie gross auch H werden mag. Also ist auch

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds - 1 \right) \cdot \sum_{v=1}^H \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} \right\} = 0.$$

Zweitens folgt aus (45.) unter Benutzung der durch (19.) und (44.) erklärten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} ds \\ = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i(h+\beta_v)}^{b+i(h+\beta_v)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{b+i(h-\beta_v)}^{b+i(h+\beta_v)} \frac{x^\sigma}{\sigma} d\sigma \end{aligned}$$

und sodann unter der Voraussetzung, dass $\beta_v \leq h$ ist, welche für alle Glieder der in (49.) auf der rechten Seite an dritter Stelle stehenden Summe zutrifft, mit Hülfe von (28.) und (30.)

$$\left| 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} ds \right| < \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{x^b}{lx} \cdot \frac{1}{h+\beta_v} + \frac{4+\pi}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{x^b}{lx} \cdot \frac{1}{b+h-\beta_v}.$$

Also ist, wie man nach einfachen Zwischenrechnungen findet,

$$(50.) \quad \left\{ \left| \sum_{v=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_v}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_v} ds \right) \right| \right. \\ \left. < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^a}{lx} \left\{ 3 \cdot \sum_{v=1}^H \frac{1}{\beta_v(h+\beta_v)} + \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{v=1}^H \frac{1}{\beta_v(b+h-\beta_v)} \right\} \right\}.$$

Für die Werthe der Summen, welche in dieser Ungleichung auf der rechten Seite vorkommen, kann man aber mit Hülfe der im ersten Abschnitt er-

haltenen Ergebnisse obere Grenzen gewinnen. Hierzu werde, wie im ersten Abschnitt,

$$\operatorname{tg} 1 = 1,55741 = x$$

gesetzt. Ferner sei λ diejenige ganze Zahl, welche die Ungleichung

$$\frac{h-12}{2x} - 1 < \lambda \leq \frac{h-12}{2x}$$

erfüllt. Denkt man sich das Intervall $0 \dots h$ durch Schnitte, welche durch die Punkte

$$12; \quad 12+2x; \quad 12+4x; \quad \dots, \quad 12+2\lambda x$$

geführt sind, in Theile zerlegt, so kann man die Beiträge, welche die diesen Theilintervallen angehörnden Zahlen β_v zu der Summe $\sum_{v=1}^H \frac{1}{\beta_v(b+h-\beta_v)}$ liefern, der Reihe nach abschätzen:

Das erste Theilintervall $0 \dots 12$ enthält keine der Zahlen β_v , kommt also überhaupt nicht in Betracht.

Für das zweite Theilintervall ist die Anzahl der Zahlen β_v kleiner als $x(12+x)$, und jede einzelne derselben erfüllt die Bedingungen

$$\beta_v > 12 \quad \text{und} \quad b+h-\beta_v > b+h-12-2x.$$

Somit ist der Beitrag, welchen diese Zahlen zu der erwähnten Summe liefern, kleiner als

$$\frac{x \cdot l(12+x)}{12 \cdot (b+h-12-2x)}.$$

Ebenso findet sich, dass die Beiträge, welche die dem 3., 4., ..., $(\lambda+1)$ -ten Theilintervall angehörnden Zahlen β_v liefern, beziehentlich kleiner sind, als die Werthe, welche der Ausdruck

$$\frac{x l[12+(2\varrho+1)x]}{(12+2\varrho x) \cdot [b+h-12-2(\varrho+1)x]}$$

für $\varrho = 1, 2, \dots, \lambda-1$ annimmt.

Endlich ist der Beitrag aller dem letzten Theilintervall angehörnden Zahlen β_v kleiner als

$$\frac{x l h}{(12+2\lambda x) \cdot b}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^H \frac{1}{\beta_{\nu}(b+h-\beta_{\nu})} &< \sum_{\varrho=0}^{\lambda-1} \frac{x l [12 + (2\varrho+1) \cdot x]}{(12+2\varrho x) \cdot [b+h-12-2(\varrho+1)x]} + \frac{x \cdot l h}{(12+2\lambda x) \cdot b} \\
&< \frac{x l h}{h+b-2x} \cdot \sum_{\varrho=0}^{\lambda-1} \left\{ \frac{1}{12+2\varrho x} + \frac{1}{b+h-12-2(\varrho+1)x} \right\} + \frac{x}{b} \cdot \frac{l h}{h-2x} \\
&< \frac{x l h}{h+b-2x} \cdot \left\{ \int_{-1}^{\lambda-1} \frac{dx}{12+2x} + \int_1^{\lambda} \frac{dx}{b+h-12-2x} + \frac{1}{b} \right\} + \frac{x}{b} \cdot \frac{l h}{h-2x} \\
&< \frac{x l h}{h-2x} \cdot \left\{ \frac{1}{2x} \cdot l \frac{12+2x(\lambda-1)}{12-2x} + \frac{1}{2x} \cdot l \frac{b+h-12-2x}{b+h-12-2x\lambda} + \frac{2}{b} \right\} \\
&< \frac{l h}{h-2x} \cdot \left\{ \frac{1}{2} l \frac{h}{8} + \frac{1}{2} l \frac{h+b}{b} + \frac{2x}{b} \right\}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber sofort

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^H \frac{1}{\beta_{\nu}(b+h-\beta_{\nu})} = 0.$$

Durch ähnliche Rechnungen ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^H \frac{1}{\beta_{\nu}(h+\beta_{\nu})} = 0.$$

Nunmehr folgt aus (50.)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+ia_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}-ia_{\nu}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-ia_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}-ia_{\nu}} ds \right) = 0.$$

Da der conjugirte Werth der hier vorkommenden Summe ebenfalls gegen Null convergiren muss, so ist *drittens*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^H \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-ia_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}+ia_{\nu}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+ia_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}+ia_{\nu}} ds \right) = 0.$$

Viertens: Man hat nach (43.)

$$(51.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \cdot \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} \\ &\quad - \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \left\{ \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+ia_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}-ia_{\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-ia_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}-ia_{\nu}} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-ia_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}+ia_{\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+ia_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}+ia_{\nu}} ds \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wegen der Convergenz der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2}$ ist

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{2(r+\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} = 0,$$

und da der absolute Werth des Ausdrucks $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds$ nach (29.) die von h unabhängige Zahl $(4+\pi) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{x^a}{ax}$ niemals zu überschreiten vermag, so ist auch

$$(52.) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \cdot \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_{\nu}^2} \right\} = 0.$$

Ferner erhält man unter Benutzung der durch (19.) und (44.) erklärten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}} ds \\ = \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{a-b+i\beta_{\nu}}}{b-a-i\beta_{\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i(\beta_{\nu}+h)}^{b-i(\beta_{\nu}-h)} \frac{x^{\sigma}}{\sigma} d\sigma, \end{aligned}$$

also

$$(53.) \quad \left\{ \left| \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}} ds \right| \right. \\ \left. < \frac{x^{a-b}}{2\pi} \cdot \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{\nu}} \cdot \left| \frac{1}{i} \int_{b-i(\beta_{\nu}+h)}^{b-i(\beta_{\nu}-h)} \frac{x^{\sigma}}{\sigma} d\sigma \right| \right.$$

Nun ist aber

$$\left| \frac{1}{i} \int_{b-i(\beta_{\nu}+h)}^{b-i(\beta_{\nu}-h)} \frac{x^{\sigma}}{\sigma} d\sigma \right| = \left| \frac{1}{i} \int_{b+i(\beta_{\nu}-h)}^{b+i(\beta_{\nu}+h)} \frac{x^{\sigma}}{\sigma} d\sigma \right|,$$

denn die beiden Ausdrücke, deren absolute Beträge hier verglichen werden, haben conjugirte Werthe, und da gegenwärtig nur solche Werthe von ν in Betracht kommen, welche grösser als H sind, für welche also die Differenz $\beta_{\nu}-h$ positiv ist, so kann man die rechte Seite der vorstehenden Gleichung mittelst der Formel (28.) abschätzen, indem man in dieser

$$c = \beta_{\nu}-h; \quad d = \beta_{\nu}+h; \quad g = b; \quad v = lx$$

setzt. So erhält man die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{i} \int_{b-i(\beta_{\nu}+h)}^{b-i(\beta_{\nu}-h)} \frac{x^{\sigma}}{\sigma} d\sigma \right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^b}{lx} \cdot \frac{1}{b+\beta_{\nu}-h}$$

und hierauf aus (53.)

$$(54.) \quad \left| \sum_{v=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+ia_v}}{r-\frac{1}{2}-ia_v} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-ia_v}}{s+r-\frac{1}{2}-ia_v} ds \right| < \frac{4+\pi}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{x^a}{lx} \cdot \sum_{v=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_v(b+\beta_v-h)}.$$

Nun sei wieder zur Abkürzung

$$\operatorname{tg} 1 = x$$

gesetzt. Ferner werde von vorn herein vorausgesetzt, dass $h > b$ sei, und durch μ die grösste in $\frac{h}{2x}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Dann erhält man durch Zerlegung des Intervalles $h \dots \infty$ in Theile, welche die Werthe

$$h; \quad h+2x; \quad h+4x; \quad h+6x; \quad \dots$$

zu Grenzen haben, auf Grund ähnlicher Ueberlegungen wie im Vorangehenden die Ungleichung

$$\sum_{v=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_v(b+\beta_v-h)} < \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{x l[h+(2\rho+1)x]}{(h+2\rho x)(b+2\rho x)}$$

und sodann durch Trennung der $\mu+1$ ersten Summanden der rechten Seite von den übrigen

$$\begin{aligned} \sum_{v=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_v(b+\beta_v-h)} &< \sum_{\rho=0}^{\mu} \frac{x l[h+(2\rho+1)x]}{(h+2\rho x)(b+2\rho x)} + \sum_{\rho=\mu+1}^{\infty} \frac{x l[h+(2\rho+1)x]}{(h+2\rho x)(b+2\rho x)} \\ &< x \cdot \frac{l(2h+x)}{h} \sum_{\rho=0}^{\mu} \frac{1}{b+2\rho x} + x \sum_{\rho=\mu+1}^{\infty} \frac{l[h+(2\rho+1)x]}{(b+2\rho x)^2} \\ &< x \cdot \frac{l(2h+x)}{h} \cdot \left(\frac{1}{b} + \int_0^{\mu} \frac{dx}{b+2xx} \right) + x \cdot \int_{\mu}^{\infty} \frac{l(h+x+2xx)}{(b+2xx)^2} dx \\ &< x \cdot \frac{l(2h+x)}{h} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2x} l \frac{b+h}{b} \right) + \frac{1}{2} \frac{l(h+x+2x\mu)}{b+2x\mu} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h+x-b} \cdot l \frac{b+2x\mu}{h+x+2x\mu} \\ &< x \cdot \frac{l(2h+x)}{h} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2x} l \frac{b+h}{b} \right) + \frac{1}{2} \frac{l(2h+x)}{h+b-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h+x-b} \cdot l \frac{2h+x}{h+b-2x}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber sofort

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{v=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_v(b+\beta_v-h)} = 0,$$

sodann aus (54.)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{v=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+ia_v}}{r-\frac{1}{2}-ia_v} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-ia_v}}{s+r-\frac{1}{2}-ia_v} ds = 0$$

und hierauf durch Betrachtung des conjugirten Werthes der hier vorkommen-

den Summe:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_{\nu}}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_{\nu}} ds = 0.$$

Nunmehr ergibt sich mit Hülfe von (51.) und (52.)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_{\nu}^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds = 0.$$

Mit Ausnahme des ersten convergiren also sämtliche Glieder der rechten Seite der Gleichung (49.) bei unbegrenzt wachsendem h gegen Null. Daher folgt aus (49.) und (42.):

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^H W_{\nu}(x, r) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_{\nu}^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &= -\mathcal{A}(x, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} \ln - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2n x^{-r-2n}}{2n(r+2n)}, \end{aligned}$$

wobei ein auf der rechten Seite etwa auftretender Summand von der Form $\frac{0}{0}$ in der bereits mehrfach angegebenen Weise zu deuten ist.

Hiermit sind die oben hinsichtlich der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} W_{\nu}(x, r)$ ausgesprochenen Behauptungen vollständig bewiesen. Zugleich ist für die zahlen-theoretische Function $\mathcal{A}(x, r)$ der folgende analytische Ausdruck gewonnen

$$(55.) \quad \mathcal{A}(x, r) = \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} \ln - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2n x^{-r-2n}}{2n(r+2n)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} W_{\nu}(x, r).$$

Für $r = \frac{1}{2}$ folgt aus (46.)

$$W_{\nu}(x, \frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{\sin(\alpha_{\nu} l x)}{\alpha_{\nu}}.$$

Daher ergibt sich aus dem Vorangehenden insbesondere der folgende Satz:

Die Vertheilung der Nullstellen α_{ν} der Function $\xi(t)$ ist eine solche, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_{\nu} l x)}{\alpha_{\nu}},$$

vorausgesetzt, dass ihre Glieder so geordnet werden, wie sie bei wachsenden Werthen des Index ν auf einander folgen, für jeden reellen positiven Werth von x convergirt, und zwar besteht bei dieser Anordnung der Glieder für $x > 1$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_{\nu} l x)}{\alpha_{\nu}} &= -\frac{1}{2} \mathcal{A}(x, \frac{1}{2}) + \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{4} \ln - \frac{1}{4} C \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{4n+1}, \end{aligned}$$

oder

$$(56.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v} &= -\frac{1}{2} \mathcal{A}(x, \frac{1}{2}) + \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{4}(l\pi + C) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4} l \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned} \right.$$

Da die links stehende unendliche Reihe eine unstetige Function des Argumentes x darstellt, so convergirt sie nothwendig ungleichmässig, und zwar wird die Convergenz eine beliebig langsame, so oft x sich einer Primzahl oder einer Primzahlpotenz unbegrenzt annähert. Dasselbe findet statt, wenn x abnehmend in 1 übergeht. Denn setzt man direct $x = 1$, so wird

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v} = 0,$$

weil jedes einzelne Glied der Reihe verschwindet. Giebt man dagegen der Veränderlichen x zuerst einen oberhalb 1 liegenden Werth und lässt man dieselbe sodann abnehmend dem Werth 1 unbegrenzt nahe rücken, so wird die Summe der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v}$ unendlich gross, weil der oben für diese Summe gefundene Ausdruck ein Glied enthält, nämlich $\frac{1}{4} l \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, welches über alle Grenzen hinaus wächst, während alle übrigen Glieder endliche Werthe behalten.

Da man der Gleichung (46.) die Gestalt geben kann

$$(57.) \quad \left\{ \begin{aligned} W_v(x, r) &= 2(r-\frac{1}{2}) \cdot \left\{ \frac{1-x^{-r+\frac{1}{2}} \cos(\alpha_v lx)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} - \frac{(r-\frac{1}{2}) x^{-r+\frac{1}{2}} \sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v [(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2]} \right\} \\ &+ 2x^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v}, \end{aligned} \right.$$

so ergibt sich:

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} W_v(x, r)$ kann als Summe zweier Theile dargestellt werden, von denen der eine

$$2(r-\frac{1}{2}) \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-x^{-r+\frac{1}{2}} \cos(\alpha_v lx)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} - \frac{(r-\frac{1}{2}) x^{-r+\frac{1}{2}} \sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v [(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2]} \right\}$$

für alle positiven Werthe von x unbedingt und gleichmässig convergirt, während der andere

$$2x^{-r+\frac{1}{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v}$$

aus der ungleichmässig convergirenden Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v}$$

durch Multiplication mit einem Factor hervorgeht, der eine stetige Function von x ist.

Auch alle anderen ungleichmässig convergenten unendlichen Reihen, welche im Nachfolgenden noch vorkommen werden, haben die gleiche Beschaffenheit: Bei jeder derselben ist der ungleichmässig convergirende Theil das Product einer stetigen Function von x mit der speciellen Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v lx)}{\alpha_v}.$$

Für $r = 0$ folgt aus (55.)

$$\begin{aligned} A(x, 0) = x - 1 - \frac{1}{2} l\pi - \frac{C}{2} - \frac{1}{2} l \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_v^2} \\ - x^{\frac{1}{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_v lx) + 2\alpha_v \sin(\alpha_v lx)}{\frac{1}{4} + \alpha_v^2}. \end{aligned}$$

Da nun, wie sich aus dem Zusammenhang der Functionen $\zeta(s)$ und $\xi(t)$ leicht ergibt,

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = 1 + \frac{1}{2} l\pi + \frac{1}{2} C - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_v^2},$$

oder

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_v^2} = 1 + \frac{1}{2} l\pi + \frac{1}{2} C - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

und

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} *); \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} l(2\pi),$$

also

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_v^2} = 1 + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} l\pi - l2$$

ist, so ergibt sich

$$(58.) \quad A(x, 0) = x - l(2\pi) - \frac{1}{2} l \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - x^{\frac{1}{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_v lx) + 2\alpha_v \sin(\alpha_v lx)}{\frac{1}{4} + \alpha_v^2}.$$

Eine ähnlich aussehende, aber unrichtige Gleichung ist in der Abhandlung des Herrn E. Cahen „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des

*) In den Anmerkungen, welche Riemanns Abhandlung in der zweiten Auflage seiner gesammelten mathematischen Werke beigelegt sind, wird auf Seite 155, letzte Zeile angegeben, die Constante $\zeta(0)$ habe den Werth $\frac{1}{2}$. Es muss statt dessen heissen $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

fonctions analogues“*) am Schluss der Nummer 33. aufgestellt, jedoch ohne dass die Convergenz der rechts vorkommenden unendlichen Reihe bewiesen wäre. Gerade in diesem Beweise besteht aber die hauptsächlichste hierbei zu überwindende Schwierigkeit.

Giebt man der Veränderlichen x irgend einen festen oberhalb 1 liegenden Werth, und sieht man dagegen r als veränderlich an, so ist die unendliche Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} W_v(x, r)$$

auf jedem endlichen Intervall *gleichmässig* convergent. Daher kann das über irgend ein endliches Intervall erstreckte Integral der durch diese Reihe dargestellten Function von r durch Integration der einzelnen Glieder berechnet werden.

Diese Bemerkung führt zur Darstellung einer *zweiten* Klasse zahlen-theoretischer Functionen durch unendliche Reihen in folgender Weise:

Man denke sich eine Function $f(x, r)$ durch folgende Festsetzungen erklärt:

1) Wenn x weder mit einer Primzahl noch mit einer Primzahlpotenz zusammenfällt, so soll sein

$$f(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{L(n)}{\ln n} \cdot \frac{1}{n^r},$$

oder ausführlicher

$$f(x, r) = \sum_1^x \frac{1}{p^r} + \frac{1}{2} \sum_1^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p^{2r}} + \frac{1}{3} \sum_1^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{p^{3r}} + \dots,$$

wo p einen Summationsbuchstaben bedeutet, welcher jedesmal diejenigen Primzahlwerthe durchläuft, welche nicht ausserhalb der unter und über dem Summenzeichen angegebenen Grenzen liegen.

2) Wenn dagegen x eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist, so soll

$$f(x, r) = \frac{f(x+0, r) + f(x-0, r)}{2}$$

gesetzt werden, so dass $f(x, r)$ an den Sprungstellen den Mittelwerth annimmt.

*) Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 3^{ème} Série, Tome 11, 1894, p. 75.

Dann erhält man

$$\int A(x, r) dr = -f(x, r),$$

also aus (55.), wenn man durch r_1 und r_2 zwei beliebige reelle Constanten bezeichnet,

$$(59.) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x, r_1) - f(x, r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2n x^{-r-2n}}{2n(r+2n)} \right\} dr \\ &\quad - \sum_{v=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} W_v(x, r) dr. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber infolge von (46.)

$$(60.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} W_v(x, r) dr &= \int_{r_1}^{r_2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr \\ &\quad - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \cos(\alpha_v l x) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-\frac{1}{2}) x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr \\ &\quad + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \sin(\alpha_v l x) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dl \xi[i(\frac{1}{2}-r)]}{dr} dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi'(\frac{1}{2}r)}{\Pi(\frac{1}{2}r)} + \frac{1}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi + \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{r+2n} \right] + \frac{1}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi + \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} dr. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth zunächst in (60.) und sodann den für

$\sum_{v=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} W_v(x, r) dr$ erhaltenen Ausdruck in (59.) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x, r_1) - f(x, r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{x^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2n} + \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \right] - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} dr \\ &\quad + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \cos(\alpha_v l x) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-\frac{1}{2}) x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \sin(\alpha_v l x) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{x^{1-r}}{1-r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} dr + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \cos(\alpha_v l x) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-\frac{1}{2}) x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr \\ &\quad - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \sin(\alpha_v l x) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr. \end{aligned}$$

Nunmehr lasse man die obere Integrationsgrenze r_2 über alle Grenzen hinaus wachsen, was zulässig ist, da die bisher vorgenommenen Umkehrungen der Reihenfolge von Integration und Summation auch für $r_2 = \infty$ durch Anwendung der Formel

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \sin(\alpha_v l x) \cdot \frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2} dr \\ = \int_{r_1}^{\infty} \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v l x)}{\alpha_v} \cdot x^{-r+\frac{1}{2}} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v l x)(r-\frac{1}{2})^2 x^{-r+\frac{1}{2}}}{\alpha_v [(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2]} \right\} dr \\ = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v l x)}{\alpha_v} \cdot \int_{r_1}^{\infty} x^{-r+\frac{1}{2}} dr - \int_{r_1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_v l x)(r-\frac{1}{2})^2 x^{-r+\frac{1}{2}}}{\alpha_v [(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_v^2]} dr \end{aligned}$$

leicht gerechtfertigt werden können. Dann erhält man, wenn man statt r_1 wieder r schreibt, und die vorkommenden Integrationsveränderlichen gleichmässig durch ϱ bezeichnet, die Gleichung

$$(61.) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x, r) &= \int_r^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho \\ &+ 2 \sum_{v=1}^{\infty} \cos(\alpha_v l x) \cdot \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_v^2} d\varrho - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \sin(\alpha_v l x) \cdot \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_v^2} d\varrho. \end{aligned} \right.$$

Bei der weiteren Umformung dieser Gleichung sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Es sei

$$r > 1.$$

Dann ist

$$\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} = - \int_x^{\infty} y^{-\varrho} dy$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} = \int_x^{\infty} \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{dy}{y^{\varrho+1}},$$

also

$$\begin{aligned} \int_r^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} \right\} d\varrho &= \int_r^{\infty} \int_x^{\infty} \left\{ \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y^{\varrho+1}} - \frac{1}{y^{\varrho}} \right\} dy d\varrho \\ &= \int_x^{\infty} \int_r^{\infty} \left\{ \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y^{\varrho+1}} - \frac{1}{y^{\varrho}} \right\} d\varrho dy \\ &= \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^r} \cdot \left(\frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y} - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$-\int_r^\infty \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} d\varrho = l\zeta(r).$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (61.) ein, so erhält man für

$$r > 1$$

die Gleichung

$$(62.) \quad \begin{cases} f(x, r) = l\zeta(r) - \int_x^\infty \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^r} \cdot \left(1 - \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y}\right) dy \\ + 2 \sum_{\nu=1}^\infty \cos(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{r-1}^\infty \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho - 2 \sum_{\nu=1}^\infty \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{r-1}^\infty \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho. \end{cases}$$

Zweiter Fall: Es sei

$$-2 < r \leq 1.$$

Dann hat man nach willkürlicher Annahme einer oberhalb 1 liegenden reellen Zahl a

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho &= \int_r^a \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho + l\zeta(a) - \int_x^\infty \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^a} dy \\ &= \int_r^a \left\{ \frac{x^{1-\varrho}-1}{1-\varrho} - \left[\frac{1}{\varrho-1} + \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right] \right\} d\varrho + l\zeta(a) - \int_x^\infty \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^a} dy \\ &= \int_r^a \int_1^x y^{-\varrho} dy d\varrho - l[(a-1)\zeta(a)] + l[(r-1)\zeta(r)] + l\zeta(a) \\ &\quad - \int_x^\infty \frac{y^{-a}}{ly} dy \\ &= \int_1^x \frac{y^{-r} - y^{-a}}{ly} dy - l(a-1) + l[(r-1)\zeta(r)] - \int_x^\infty \frac{y^{-a}}{ly} dy \\ &= \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u} - e^{(1-a)u}}{u} du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{(1-a)u}}{u} du \\ &\quad - l(a-1) + l[(r-1)\zeta(r)]. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} l(a-1) &= \int_2^a \frac{dv}{v-1} = \int_2^a \int_0^\infty e^{-u(v-1)} du dv \\ &= \int_0^\infty \int_2^a e^{-u(v-1)} dv du = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-(a-1)u}}{u} du. \end{aligned}$$

Setzt man dies ein, so erhält man

$$\int_r^\infty \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho = \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u} - e^{-u}}{u} du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du + l[(r-1)\zeta(r)].$$

Ferner ist ähnlich wie im ersten Falle

$$\int_r^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} d\varrho = \int_x^\infty \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{dy}{y^{r+1}}.$$

Daher erhält man jetzt aus (61.) die Gleichung

$$(63.) \quad \begin{cases} f(x, r) = \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u} - e^{-u}}{u} du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du + \int_x^\infty \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{dy}{y^{r+1}ly} + l[(r-1)\zeta(r)] \\ + 2 \sum_{\nu=1}^\infty \cos(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho - 2 \sum_{\nu=1}^\infty \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho, \end{cases}$$

welche für

$$-2 < r \leq 1$$

gültig ist.

In dieser Formel ist die Gleichung

$$f(x) = Li(x) - \sum^* (Li(x^{1+\alpha_i}) + Li(x^{1-\alpha_i})) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{dx}{x \log x} - l2^*,$$

welche Riemann für die von ihm durch $f(x)$ bezeichnete zahlen-theoretische Function aufstellt, als ein specieller Fall enthalten.

Setzt man nämlich in Gleichung (63.) $r=0$, so erhält man, da

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

ist,

$$(64.) \quad \begin{cases} f(x, 0) = \int_0^{lx} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du + \int_x^\infty \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{dy}{yly} - l2 \\ + 2 \sum_{\nu=1}^\infty \cos(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho - 2 \sum_{\nu=1}^\infty \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho. \end{cases}$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der eben erwähnten Riemannschen Formel vollständig überein, so dass mit ihrer Aufstellung das Endergebniss der Riemannschen Untersuchung auf etwas anderem Wege wieder erreicht wird.

*) Das schon längst als irrthümlich erkannte Glied $\log \xi(0)$, welches in den in den Monatsberichten und in beiden Auflagen der gesammelten mathematischen Werke enthaltenen Abdrucken der Riemannschen Abhandlung die rechte Seite dieser Gleichung abschliesst, ist hier durch den richtigen Werth $-l2$ ersetzt.

Denn *erstens* ist die Function $f(x, 0)$ identisch mit der Function, welche *Riemann* durch $f(x)$ bezeichnet und zur Darstellung der Anzahl aller zwischen 1 und x enthaltenen Primzahlen benutzt.

Zweitens ist, wenn h wie bisher eine reelle positive Veränderliche bedeutet,

$$\begin{aligned} \int_0^{ix} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{ix}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_h^{ix} \frac{e^u}{u} du + \int_{-ix}^{-h} \frac{e^u}{u} du \right\} + \int_{-\infty}^{-ix} \frac{e^u}{u} du \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^u}{u} du + \int_h^{ix} \frac{e^u}{u} du \right\}, \end{aligned}$$

das heisst der Ausdruck

$$\int_0^{ix} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{ix}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

stimmt überein mit dem sogenannten *Cauchyschen Hauptwerth* des Integrals

$\int_{-\infty}^{ix} \frac{e^u}{u} du$, oder auch $\int_0^x \frac{dy}{ly}$, welchen man als den *Integrallogarithmus* von x zu bezeichnen und durch das Zeichen $Li(x)$ darzustellen pflegt.

Drittens endlich ist die Differenz

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_{\nu} lx) \cdot \int_{-1}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_{\nu}^2} d\varrho - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} \sin(\alpha_{\nu} lx) \cdot \int_{-1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_{\nu}^2} d\varrho$$

gleichbedeutend mit der Summe

$$- \sum_{\nu=1}^{\infty} \{ Li(x^{1+ia_{\nu}}) + Li(x^{1-ia_{\nu}}) \},$$

sobald nur die Bedeutung des Zeichens $Li(e^w)$ für imaginäre Werthe der Veränderlichen w in geeigneter Weise festgestellt und ausserdem bestimmt wird, dass auch in dieser letzteren Summe die Glieder so geordnet werden sollen, wie sie bei wachsenden Werthen des Index ν auf einander folgen. Um dies einzusehen, denke man sich die Ebene der complexen Veränderlichen w längs der Axe des Reellen von $-\infty$ bis 0 zerschnitten und fasse dasjenige die Ebene einfach überdeckende Gebiet T ins Auge, welches von den beiden Rändern dieses Schnittes begrenzt wird. Beschränkt man die Veränderliche w auf das Innere dieses Gebietes, so erweist es sich als möglich, für alle Werthe von w eine Function $Li(e^w)$ in *eindeutiger* Weise so zu erklären, dass sie für alle reellen positiven Werthe von w mit der im Vorangehenden bereits erklärten Function $Li(e^w)$ übereinstimmt und ausserdem im Innern des Gebietes T überall den Charakter einer ganzen Function besitzt.

Setzt man nämlich

$$w = u + iv,$$

wo u und v reelle Zahlen bedeuten, und versteht man unter h wieder eine reelle positive Veränderliche, so braucht man nur folgende Festsetzungen zu treffen:

1) Wenn $v > 0$ ist, so soll sein

$$Li(e^w) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h+iv}^w \frac{e^z}{z} dz + i\pi;$$

2) wenn $v = 0$ ist, so soll sein

$$Li(e^w) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-x}^{-h} \frac{e^z}{z} dz + \int_h^w \frac{e^z}{z} dz \right\};$$

3) wenn $v < 0$ ist, so soll sein

$$Li(e^w) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h+iv}^w \frac{e^z}{z} dz - i\pi.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die so erklärte Function $Li(e^w)$ in der That die verlangten Eigenschaften besitzt.

Bei Zugrundelegung dieser Erklärung ist nun

$$Li(x^{1+ia_v}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h+\frac{1}{2}ix+ia_vlx}^{\frac{1}{2}ix+ia_vlx} \frac{e^z}{z} dz + i\pi = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}ix} \frac{e^{u+ia_vlx}}{u+ia_vlx} du + i\pi$$

und

$$Li(x^{1-ia_v}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h+\frac{1}{2}ix-ia_vlx}^{\frac{1}{2}ix-ia_vlx} \frac{e^z}{z} dz - i\pi = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}ix} \frac{e^{u-ia_vlx}}{u-ia_vlx} du - i\pi.$$

Also ist

$$\begin{aligned} Li(x^{1+ia_v}) + Li(x^{1-ia_v}) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}ix} e^u \left\{ \frac{\cos(\alpha_v lx) + i \sin(\alpha_v lx)}{u + i\alpha_v lx} + \frac{\cos(\alpha_v lx) - i \sin(\alpha_v lx)}{u - i\alpha_v lx} \right\} du \\ &= 2 \cos(\alpha_v lx) \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}ix} \frac{u e^u}{u^2 + (\alpha_v lx)^2} du + 2 \alpha_v lx \sin(\alpha_v lx) \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}ix} \frac{e^u}{u^2 + (\alpha_v lx)^2} du. \end{aligned}$$

Führt man hier durch die Substitution

$$u = -\rho lx$$

eine neue Integrationsveränderliche ρ ein, so erhält man

$$Li(x^{1+ia_v}) + Li(x^{1-ia_v}) = -2 \cos(\alpha_v lx) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_v^2} d\rho + 2 \alpha_v \sin(\alpha_v lx) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_v^2} d\rho,$$

was zu beweisen war.

Hiermit ist die vollständige Uebereinstimmung der Gleichung (64.) mit der von *Riemann* angegebenen Formel dargethan und zugleich für die in der Einleitung hinsichtlich der unendlichen Reihe

$$\sum^a |Li(x^{1+a}) + Li(x^{1-a})|$$

ausgesprochene Behauptung der Beweis erbracht.

In der *zweiten* Auflage von *Riemanns* gesammelten mathematischen Werken wird in den Anmerkungen auf Seite 154 eine Stelle aus einem Briefe, dessen Entwurf in *Riemanns* Nachlass vorliegt, mitgetheilt. Gerade diejenigen beiden Behauptungen, welche dort von *Riemann* selbst als einer genaueren Begründung bedürftig hingestellt werden, haben durch die vorangehenden Entwicklungen — abgesehen davon, dass es unentschieden bleibt, ob die Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ wirklich alle reell sind — Bestätigung gefunden.

Dritter Fall: Es sei

$$r \leq -2.$$

In diesem Falle seien -2λ und $-2(\lambda+1)$ diejenigen beiden negativen geraden ganzen Zahlen, welche den Werth r zwischen sich enthalten, in der Weise, dass

$$-2(\lambda+1) < r \leq -2\lambda$$

ist. Ferner werde zur Abkürzung

$$\frac{(\varrho-1)\zeta(\varrho)}{(\varrho+2)(\varrho+4)\dots(\varrho+2\lambda)} = Z(\varrho)$$

gesetzt. Dann ist die Function $Z(\varrho)$, wie man leicht zeigen kann, in dem Intervall $r \dots \infty$ überall reell und *positiv*. Nimmt man nun wieder eine reelle oberhalb 1 liegende Zahl a nach Belieben an, so kann man dem ersten Gliede der rechten Seite von Gleichung (61.) die Form geben

$$(65.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_r^\infty \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho \\ &= \int_r^a \left\{ \frac{x^{1-\varrho}-1}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^\lambda \frac{x^{-\varrho-2n}-1}{\varrho+2n} + \sum_{n=\lambda+1}^\infty \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{Z'(\varrho)}{Z(\varrho)} \right\} d\varrho \\ &\quad + \int_a^\infty \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \int_r^a \frac{x^{1-\varrho}-1}{1-\varrho} d\varrho &= \int_r^a \int_1^x y^{-\varrho} dy dx = \int_1^x \frac{y^{-r}-y^{-a}}{ly} dy = \int_0^{ix} \frac{e^{(1-r)u}-e^{(1-a)u}}{u} du, \\ \int_r^a \sum_{n=1}^{\lambda} \frac{x^{-\varrho-2n}-1}{\varrho+2n} d\varrho &= -\sum_{n=1}^{\lambda} \int_r^a \int_1^x y^{-\varrho-2n-1} dy d\varrho = -\sum_{n=1}^{\lambda} \int_1^x \frac{y^{-r-2n-1}-y^{-a-2n-1}}{ly} dy \\ &= -\sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{ix} \frac{e^{-(r+2n)u}-e^{-(a+2n)u}}{u} du, \\ \int_r^a \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} d\varrho &= \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} \int_r^a \int_1^x y^{-\varrho-2n-1} dy d\varrho = \int_x^{\infty} \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} \frac{y^{-r}-y^{-a}}{ly} \cdot y^{-2n-1} dy \\ &= \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^3-1} \cdot \frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} - \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^3-1} \cdot \frac{dy}{y^{a+2\lambda+1}}, \\ -\int_r^a \frac{Z'(\varrho)}{Z(\varrho)} d\varrho &= l \frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\dots(r+2\lambda)} - l[(a-1)\zeta(a)] + \sum_{n=1}^{\lambda} l(a+2n). \end{aligned}$$

Ferner ist nach den Ergebnissen des ersten Falles

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho &= l\zeta(a) - \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^a} \cdot \left(1 - \frac{1}{y^3-1} \cdot \frac{1}{y}\right) dy \\ &= l\zeta(a) - \int_{ix}^{\infty} \frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u} du + \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^3-1} \cdot \frac{dy}{y^{a+1}}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (65.) ein, so erhält man nach einfachen Zusammenziehungen

$$(66.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_r^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho \\ &= \int_0^{ix} \frac{e^{(1-r)u}-e^{(1-a)u}}{u} du - \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{ix} \frac{e^{-(r+2n)u}-e^{-(a+2n)u}}{u} du \\ &\quad + \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^3-1} \cdot \frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} + \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^{a+2\lambda+1}} \cdot \frac{y^{2\lambda}-1}{y^3-1} dy \\ &\quad + l \frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\dots(r+2\lambda)} - l(a-1) + \sum_{n=1}^{\lambda} l(a+2n) - \int_{ix}^{\infty} \frac{e^{(1-a)u}}{u} du. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber, wie schon oben gezeigt wurde,

$$-l(a-1) = \int_0^{ix} \frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u} du = \int_0^{ix} \frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u} du + \int_{ix}^{\infty} \frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u} du$$

und ähnlich

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\lambda} l(a+2n) &= \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} - e^{-(a+2n)u}}{u} du \\ &= \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{lx} \frac{e^{-u} - e^{-(a+2n)u}}{u} du + \lambda \int_{lx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^{a+2\lambda+1}} \cdot \frac{y^{2\lambda}-1}{y^2-1} dy.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (66.) und sodann den für die linke Seite dieser Gleichung erhaltenen Ausdruck in Gleichung (61.) ein, so gelangt man zu der für

$$-2(\lambda+1) < r \leq -2\lambda$$

geltenden Gleichung

$$(67.) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x, r) &= \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u} - e^{-u}}{u} du - \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{lx} \frac{e^{-(r+2n)u} - e^{-u}}{u} du \\ &+ \int_x^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} + l \frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\dots(r+2\lambda)} + (\lambda-1) \int_{lx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{\infty} \cos(\alpha_r lx) \int_{r-1}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_r^2} d\varrho - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin(\alpha_r lx) \int_{r-1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_r^2} d\varrho. \end{aligned} \right.$$

Hiermit sind für alle reellen Werthe von r analytische Ausdrücke für die aus den Potenzen der Primzahlen zusammengesetzte zahlentheoretische Function $f(x, r)$ gewonnen.

Wenn es gelingen sollte, nachzuweisen, dass die Wurzeln α_r der Gleichung $\xi(t) = 0$ sämtlich reell sind, oder auch nur die imaginären Theile dieser Wurzeln zwischen engere Grenzen als $-\frac{i}{2}$ und $+\frac{i}{2}$ einzuschliessen, so würden sich aus den vorangehenden Entwicklungen eine Reihe von asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie ergeben. So würde z. B. aus Gleichung (58.) folgen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x, 0)}{x} = 1$$

ist, und hieraus, dass die Summe der Logarithmen aller Primzahlen von 1 bis x für grosse Werthe von x bis auf Grössen niedrigerer Ordnung mit x selbst übereinstimmt.

Aber einstweilen scheinen alle derartigen Folgerungen verfrüht zu sein. Auch derjenige Beweis des eben erwähnten speciellen Satzes, welchen Herr *E. Cahen* in seiner Note „Sur la somme des logarithmes des nombres

premiers qui ne dépassent pas $x^{(*)}$) angegeben und in No. 32 seiner oben angeführten Abhandlung im Wesentlichen unverändert wiederholt hat, ist nicht als befriedigend anzuerkennen. Denn es ist zweifelhaft, ob es überhaupt ein Rechteck giebt, welches alle diejenigen Eigenschaften vereinigt, die Herr *Cahen* von dem von ihm als Integrationsweg benutzten Rechteck voraussetzt. Die Schlüsse des Herrn *Cahen* würden sofort hinfällig werden, wenn die durch den Punkt 1 gehende Parallele zur Axe des Imaginären eine Nullstelle der Function $\zeta(s)$ enthielte, oder wenn auch nur in jeder Nähe dieser Geraden Nullstellen der Function $\zeta(s)$ liegen sollten.

Da es Herrn *Cahen* nicht gelungen ist, diese Möglichkeiten auszuschliessen, so fehlt seinem Beweise die zwingende Kraft.

Aachen, den 2. Juni 1894.

*) Comptes Rendus, Tome 116, 1893. I, p. 85—88.